Учитељски факултет

Универзитет у Београду

Оливера Живановић 3003/2015

ЕФЕКТИ ПРОБЛЕСМКЕ НАСТАВЕ У РАЗВОЈУ СПОСОБНОСТИ МАТЕМАТИЧКОГ МОДЕЛОВАЊА

-предлог пројекта за израду докторске дисертације-

јул, 2018.

I ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ ИСТРАЖИВАЊА

1. Проблемска настава у почетној настави математике

Настава у многим школама је и даље заснована на традиционалном приступу и принципу рада. Међутим питање које се све више разматра и које је од круцијелног значаја за образовање у вези је са променама у образовању, где се тежи побољшавању наставе и њених сегмената.

Традиционална настава темељи се на преношењу знања, вештина и навика где је наставник главни преносилац информација, а ученици су пасивни објекти у настави. Сматра се да је овакав вид предавачке наставе неадекватан за целокупан развој личности ученика, те га је потребно променити. Промене које су окупирале традиционалну наставу имале су за циљ да повећају целокупну активност ученика и ефикасност приликом усвајања знања.

Проблемске ситуације и проблеми с којима ће се нови нараштаји младих срести у животу и свом раду ставља школу пред озбиљан задатак да ученике примерено припреми за такав рад. Није довољно само преношење одређених знања ученицима, па ни сналажење у проблемским ситуацијама и уочавање и формулисање проблема, већ је потребно ученике оспособити за решавање проблема. Како то постићи? Курник (2002) разматра ово питање и даје најадекватнији одговор, где предлаже посебан наставни систем, односно проблемску наставу. Идеја о овој настави јавља се почетком XX века, и везује се за име америчког филозофа и педагога Џона Дјуиа (John Dewey, 1859–1952) који проблемску наставу први пут помиње у проблем-методи и пројект-методи, у којима првенствено истиче потребу продуктивног мишљења ученика у настави. Превазилажење слабости предавачке наставе условиле су настанак и развој нових концепција школског учења. Једна од тих концепција која се уједно показала и као најбоља јесте проблемска настава.

Што се тиче математичког образовања у Србији у оквиру коришћења различитих наставних система и иновативних поступака у настави у TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) 2015 циклусу налазе се подаци који указују на „доминацију традиционалних пракси – учитељи кроз фронтални начин рада објашњавају ученицима градиво, начин решавања задатака, а задатак ученика је да правила и поступке упамте“, слична ситуација је и у Хрватској (Ђерић, Станчић и Ђевић, 2017:162) . Како би проблемска настава била ефикасна у погледу остварења предодређених циљева, Цех (Zech, 1999) указује на неопходност услова за решавање проблема у настави математике, где првенствено истиче диференцирану помоћ наставника, по принципу минималне помоћи и рад у малим групама.

Проблемска настава, као део савременог дидактичког система, доприноси подизању квалитета и ефикасности наставног процеса, те као таква може се комбиновати и са другим наставним системима и облицима учења. Брунер истиче четири категорије високе ефикасности проблемске наставе: повећање интелектуалних моћи, повећање унутрашње мотивације, развијање технике откривања и трајније запамћивање наученог (Bruner, 1961).

1.1. Појмовно одређење проблемске наставе

Стратегије савременог образовања захтевају од ученика максимално активирајуће активности, како би се суочили са различитим проблемима, те пронашли исправан пут до њиховог решења. Један од начина организовања процеса учења које подстиче развијање различитих активности ученика и ангажовање сложених мисаоних операција јесте учење путем решавања проблема. У нашем језику и теорији се осим теримна *учење путем решавања проблема*, користи и термин *проблемска настава*. Осим споменутих термина неретко се срећу и називи *проблемско развојна настава* и *учење увиђањем*. Дакле, све наведене термине можемо објединити називом *проблемска настава*.

Реч „проблем“ је грчког порекла и означава тешко питање или задатак који треба решити кроз отклањање бројних недоумица. Проблем је „недовршена спознајна структура и због тога код особе суочене с њим ствара немир, напетост и жељу за његовим решавањем“ (Дураковић, 1985, стр. 41). Пољак (1985) проблем посматра као „субјективни доживљај, спознајни и емоционални, што значи да субјект односно човек доживљава проблем. Што је тежина проблема већа, то је његова емоционална структура јача“ (стр.152).

Појам проблемске наставе дефинише се различито од стране аутора, међутим суштина сваке дефиниције је иста. Рецимо, Ђорђевић (1997) сматра да се суштина проблемске наставе „састоји у проблемској ситуацији, самосталном тражењу идеја за њено решавање и у проверавању исправности тих идеја“ (стр. 473). Вилотијевић (1999) говори о два основна елемента проблемске наставе, а то су проблем и проблемска ситуација. Према његовом мишљењу проблем карактерише: нешто што је непознато, празнина коју треба открити и допунити на основу података који нису изричито дати, различите стратегије решавања, стваралачки и критички приступ решењу, те продубљивање постојећих и усвајања нових знања. Проблемску ситуацију третира као почетно психичко стање упитности, заинтересованости и емоционалне напрегнутости појединца који треба да реши проблем.

Дакле, опште је прихваћен став да је учење путем решавања проблема највиши ниво мисаоне активности ученика, те у вези са тим проблемску наставу је неопходно спроводити како на часовима математике тако и у оквиру других наставних предмета, јер је то један од начина који ће нам помоћи да одговоримо на захтеве савременог образовања.

1.2. Дидактичко- методичке одлике проблемске наставе

Проблемска настава као посебан наставни систем, испољава своју широку примену у почетној настави математике, те као таква оправдано захтева да споменемо и њене дидактичке вредности. Дакле, основне дидактичке одлике проблемске наставе су:

- повећава ефикасност васпитно-образовног рада;
- убрзан развој менталних способности и психичких функција;
- осигурано је активно учење;
- развијање способности апстрактног мишљења као највише интелектуалне функције;
- развијање самосталности и психичке способности ученика;
- упознавање различитих техника и метода ефикасног учења;
- појачана мотивација;
- побољшање трајности знања;
- развијање критичког и стваралачког мишљења;
- коришћење различитих извора за стицање знања;
- повећана примењивост стечених знања (Стевановић, 1998, стр. 183-184).

У даљем тексту упознаћемо се са основним елементима организације часа проблемске наставе, као и са њеном улогом у савладавању математичких садржаја. Имплементација часа проблемске наставе представља велики изазов како за наставнике, тако и за ученике. Артикулација часа проблемске наставе захтева појачане напоре са становишта организације, од стране наставника, а од стране ученика захтева максимално активирање мисаоних активности и способности.

Бавећи се овим проблемом Пољак наводи три етапе које су важне за решавање проблема, при извођењу часа проблемске наставе:

1. „стварање проблемске ситуације,
2. решавање проблема и
3. контролисање и проверавање” (1989, стр. 255).

Већина истраживача (Дејић, 1996; Вилотијевић, 1999; Петровић, 2001) наводи шесет етапа које треба спровести у оквиру проблемске наставе.

1. стварање проблемске ситуације и формулисање проблема,
2. формирање хипотеза,
3. декомпозиција проблема,
4. решавање проблема,
5. анализа резултата, извођење закључака и генерализација, и
6. практична примена нових знања при решавању специјално одабраних задатака.

Јасно је да када бисмо успоставили паралелу између етапа које је потребно спровести на часу проблемске наставе, које предлаже Пољак и етапа које предлажу Дејић, Вилотијевић и Петровић могуће је констатовати да су етапе у основи исте, с тим што се у оквиру наведених шест етапа споменутих аутора, налазе разрађене Пољакове три етапе.

Јукић (2001) јасно истиче да у модерној-активној настави, у којој се постављају проблеми, у којој ученици сами трагају за одговорима на основу сопствених посматрања, анализе, синтезе, суђења и закључивања, нужне су активне паузе у којима се решава задати проблем. Сваки проблем који се нађе пред учеником захтева од њега ангажовање различитих мисаоних способности које доприносе развоју критичког и стваралачког мишљења, што је уједно и један од циљева проблемске наставе. Да би ученик успешно решио постављени проблем, мора имати довољно времена да размишља и конструише прави одговор, а потом и да адекватно решење.

Цекуш и Наместовски (2005) истичу да:

> „увек треба дати предност проблемској настави, створити проблем ситуације и ученике суочити са чињеницама. Задатак наставника је да одреди најпоузданије и најефикасније методе, облике рада, садржаје, наставна средства и изворе знања. Учење из различитих извора знања је од посебне важности за активно стицање знања, што је једна од битних карактеристика савременог образовања“ (стр. 17).

Кроз проблемску наставу ученици развијају специфичне вештине, размишљају критички, анализирају и решавају комплексне задатке, реалне проблеме, проналазе, процењују и користе одговарајуће изворе знања (Savery, 2006).

1.3. Реалистично математичко образовање као егземплар савремене примене проблемске наставе

Реалистично математичко образовање (РМО) заснива се на Фројденталовој концепцији наставе математике. То је теорија у којој је процес учења базиран на процесу открића математичких идеја, где је основни циљ разумевање процеса математизације (Heuvel-Panhuizen, 2001; Милинковић, 2007; Романо, 2009а; Ђокић, 2014). Овај процес је доминантан је у већини земаља Европе и у Сједињеним Америчким Државама, те се посматра као једна од важнијих актуелних стратегија подизања математичког образовања (Sriraman & English, 2010).

Идеја препознавања проблема у реалним ситуацијама и могућности његовог решавања су фундаментална карактеристика реалистичног математичког образовања (РМО). Дакле, у РМО се полази од реалних ситуација које су ученицима блиске и у контексту је главни извор учења, не само што се нови појмови уводе кроз решавање проблема, већ такве ситуације делују мотивишуће на ученике подстичући их да стварају нове стратегије за решавање проблема (Милинковић, 2016).

Да бисмо избегли оквире класичног приступа морамо разликовати реалистични проблем од контекстуалног проблема. Оно по чему се реалистични проблем издваја у односу на контекстуални, јесте ситуација која захтева кретање путем целокупног циклуса моделовања и стварања модела, те се такав модел може примењивати у сличним новонасталим ситуацијама. Улога проблема у реалном контексту посматра се са два аспекта. Први се односи на откривање новог појма, док се други посматра кроз проблемску ситуацију која се користи за приказ математичког знања у функцији решавања реалистичног проблема (Милинковић, 2016). Резултати ученичких активности у поступку решавања проблема огледају се у развијању модела са којим су ученици блиски. Модел настаје путем математичког моделовања тј. хоризонталне математизације (Stillman, 2007).

У реалистичном математичком образовању разликујемо четири врсте модела: „1. ситуациони, 2. референтни, 3.општи и 4. ниво формалне математике“ (Gravenmeijer, 1994, према Романо, 2009б, стр. 15). У оквиру ситуационог нивоа указује се на познавање ситуације и формирање стратегије која се користи за решавање дате ситуације. Референтни ниво подразумева везу између модела и стратегија са ситуацијом у датом проблему. Општи ниво захтева преовладавање стратегије у математичком фокусу у односу на контекст. Најзад, усвајање појмова и процедура доводи до нивоа формалне математике. На основу реченог, можемо закључити да РМО с правом представља егземплар савремене примене проблемске наставе.

Оно што је у РМО ситуациони ниво, у проблемској настави је стварање проблемске ситуације. Даље, оно што је у РМО референтни ниво, то је у проблемској настави стварање хипотеза и декомпозиција проблема. Општи ниво у РМО обухватиће решавање проблема, док ће ниво формалне математике омогућити извођење закључака, генерализацију и примену стечених знања. Као што смо већ истакли уочавање веза између одређеног модела и стратегије решавања датог проблема основа је за развој разумевања истог. Јако је важно омогућити ученицима да развијају сагледавање проблема са различитих страна.

Пошто процес решавања подразумева коришћење математичког моделовања, основна тежња је да се олакша развој холистичког приступа проблемима и повезаност функционалних знања (Милинковић, 2010). Рецимо, један такав курикулум за ученике старијих разреда основне школе јесте уџбенички комплет Математика у контексту (Mathematics in Context) чија је основна одлика наглашавање веза између математичких појмова и реалистичних ситуација.

С обзиром на структуру наставног часа Романо (2009б) прави јасну разлику између традиционалног и РМО приступа (Табела 1).

Приступ / Део часа	**ТРАДИЦИОНАЛНИ ПРИСТУП**	**РМО ПРИСТУП**
Уводни део часа	Прегледање домаћег задатка и увод у наставну јединицу.	Увод у наставну јединицу.
Главни део часа	Постављање проблема (наставник уводи појмове, указује на два-три проблема и позива ученике да их реше); Решавање проблема (Ученици покушавају да реше постављене проблеме преузете из уџбеника.	Ученички рад (ученици раде индивидуално и у групама и долазе до властитих решења проблема); Дискусија (наставник представља нови проблем, ученици раде у групама, наставник покреће разговор о теми у вези са проблемом).
Завршни део часа	Наставник указује на проблеме из уџбеника, те захтева од ученика да раде задатке из уџбеника.	Наставник представља закључке на постављена питања, те разговара са ученицима о закључцима.

Табела 1. Разлике између традиционалног и РМО приступа у оквиру структуре наставног часа

У оквиру РМО приступа де Ланж је говорио о „средњим и вишим циљевима“. Средњи циљ подразумева стицање вештина за решавање једноставних проблема, док виши циљ указује на развој вештина резоновања, комуникације и критичког мишљења (de Lange 1996, према Романо, 2009б, стр. 16). Де Ланжову поделу циљева у РМО можемо донекле поистоветити са нашим стандардима постигнућа која се манифестује кроз три нивоа: основни, средњи и напредни ниво (Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања, 2011).

2. Моделовање у почетној настави математике

Наставни програм математике Републике Србије за први циклус образовања математичко моделовање посматра као један од циљева наставе математике. Дакле, циљ наставе математике у основној школи јесте:

> „да ученици усвоје елементарна математичка знања која су потребна за схватање појава и зависности у животу и друштву; да оспособи ученике за примену усвојених математичких знања у решавању разноврсних задатака из животне праксе, за успешно настављање математичког образовања и за самообразовање; као и да доприносе развијању менталних способности, формирању научног погледа на свет и свестраном развитку личности ученика“ (Наставни програм за први циклус основног образовања и васпитања, 2015, стр. 35).

Моделовање пружа велики допринос настави математике у смислу максималног активирања ученика, те је кључна претпоставка многих аутора (Verschaffel et al., 2000; Novotná and Rogers, 2003; Novotná and Sarrazy, 2005) у процесу решавања задатака. С тим у вези, како бисмо се боље упознали са овом способношћу у даљем тексту операционализоваћемо сам појам математичког моделовања и упознаћемо се са његовом улогом и значајем у почетној настави математике.

2.1. Појам математичког моделовања

Да бисмо схватили појам математичког моделовања неопходно је да дефинишемо појам *модел*. „Појам „модел" потиче од латинске речи „modulus" чије је основно значење „мера". Под моделом треба разумети поједностављујући приказ једне компликоване структуре и њене функционалне везе" (Петровић, Мрђа и Ковачевић: 113). Дир и Инглиш дефинишу модел као „систем елемената, операција, релација и правила који се могу користити за описивање, објашњавање, или предвиђање понашања проучаваног система" (Doerr & English, 2003: 112).

Тервел и сарадници посматрају модел као „одређени структурални облик репрезентације" где је репрезентација шири и свеобухватнији појам из когнитивне психологије, а модел појам који се користи у математичком образовању (Terwel et al., 2009: 27).

Новотна (Novotná, 1997*)* сматра да модел треба да испуњава следеће захтеве:

- да буде једноставан и јасан;
- активира мисаону активност ученика;
- визуализује апстрактне информације из задатка;
- буде довољно флексибилан да омогући лаку модификацију различитих проблема у групи сличних проблема.

„Математичко моделовање је сложен процес превођења одређеног проблема у математичку форму" (Милинковић, 2014: 46). Оно почиње упознавањем ученика са реалним проблемом из живота, потом ученици анализирају проблем и стварају план за његово решавање, те након свега посредством модела који су развили приказују резултате и износе закључке до којих су дошли. Модел им служи као средство за посредовање између стварног и апстрактног света математике. Другим речима, модели помажу ученицима да реше проблем на сваком нивоу апстракције (Милинковић, 2016). Како говори Ван ден Ховел-Панхуизен (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000), модели омогућавају премошћавање јаза између неформалног и формалног математичког система.

Математичко моделовање прати и процес „математизације", коју према Треферсу (Treffers,1987) разврставамо на хоризонталну и вертикалну.

Хоризонтална математизација посматра се као процес померања из стварног света у свет математичких симбола, док се вертикална математизација гледа као процес изградње и реорганизације унутар одређене математичке структуре која се изграђује утврђивањем веза између математичких појмова. „Резултат математичког моделовања је стварање математичког модела или репрезентације феномена или проблема, који довољно верно одсликава карактеристике и релације оригиналног феномена са одговарајућег аспекта“ (Милинковић, 2014: 46).

2.2. Улога и значај математичког моделовања

„Да ли би требало да упознајемо математичке моделе и затим их примењујемо у решавању проблема или би (обрнуто), требало да постављамо проблеме који би нас водили откривању математичких модела? “ (Servais and Varga, 1971, стр. 73). Моделовање у настави математике даје бројне подстицаје како би ученици разумели математичке појмове, уочавали чињенице, анализирали и решавали одређене математичке проблеме који су резултат реалних ситуација. Такође, настоји да развије и продуби како креативно тако и критичко мишљење и активира остале мисаоне процесе код ученика, ради бољег и ефикаснијег разумевања појединих математичких концепата.

Грир (Greer, 1997) указује на велики значај математичког моделовања, посебно истичући да оно повезује две стране математике, утемељеност математике у стварност, с једне стране и апстрактне структуре, с друге стране. Математичко моделовање укључује и пет сложених поступака који како истиче Кабасут (Cabbasut, 2010) подстичу развој ученика, базирајући се на мисаоним операцијама. То су: 1) стварање модела, 2) представљање модела на различите начине, 3) разумевање односа језичке формулације проблема и симболичког записа, 4) утврђивање правилности, релација и шема и 5) интерпретација.

Новотна (Novotná, 1997) наводи следеће функције моделовања:

- поновно представљање које води стварању адекватне менталне слике;
- организација већ постојећих знања;
- тумачење које олакшава разумевање проблема;
- трансформација коришћеног језика у начин представљања ближи ученицима.

Врло често се математичко моделовање поистовећује са проблемском методом. Међутим, оно се не своди само на стриктно решавање проблема, већ захтева проналажење низа ситуација које се могу описати и објаснити уз помоћ истог модела (Милинковић, 2014). Вершафел и сарадници (Verschaffel et al., 2000) сматрају да је математичко моделовање у директној вези са одређеном проблемском ситуацијом и описују га као сложен процес са више фаза. Ученици прво морају разумети ситуацију описану у задатку (изградња ситуационог модела). На основу овог модела гради се математички модел. Ученици затим примењују математичке операције описане у математичком моделу ради налажења решења. Најзад, ученици формулишу одговор.

Јасно је да математичко моделовање даје велики допринос савременом приступу настави математике, а да би се та способност ефикасно развијала код ученика неопходна је и подршка учитеља. Учитељ треба да створи такву атмосферу која ће да уважава учениково моделовање, истраживање, расправљање и представљање ученичких метода. Треба да подстиче сталну интеракцију између ученика, као и да сам буде део те интеракције у смислу постављања питања ученицима: Да ли овај проблем може да се реши другачије? Како знаш да је ово решење тачно? Да ли овакав начин решавања даје увек тачане резултате? и сл. (Kaput & Blanton, 2001).

3. Алгебарски садржаји

Како бисмо говорили о алгебарским садржајима, прво ћемо представити концептуализацију појма *алгебра*. Многи научници (Herstein, 1964; Usiskin, 1997; Van Amerom, 2003; Kieren, 2004) су дефинисали појам алгебре и тих дефиниција је много, међутим основа и суштина сваке је иста. Ми ћемо се определити за ону коју дају Меклејн (MacLane) и Биркоф (Birkoff) који алгебру виде као „уметност манипулисања, збировима, производима и степенима бројева. Правила манипулација важе за све бројеве, тако да манипулације могу бити изведене и на словима која стоје уместо бројева“ (према Harvey, Wits and Demana, 1995: 75).

Тол (Tall) и Томас (Thomas) говоре о три нивоа алгебре:

1. Евалуациона алгебра (евлуација алгебарских израза као што је $2 \cdot a + 1$);
2. Манипулациона алгебра (манипулација алгебарским изразима како би се решиле једначине);
3. Аксиомска алгебра (која се односи на векторске просторе и системе линеарних једначина) (Tall and Thomas, према Зељић, 2014).

За наш рад посебно је значајан други ниво, односно манипулациона алгебра, јер ће једначине заокупити већи део наше пажње. Још од првог разреда основне школе у Републици Србији ученици се упознају са елементима алгебре. Дакле, у првом разреду ученици се упознају са појмовима непознате и једначине, док се у трећем разреду упознају са појмовима променљиве и неједначине.

Један од оперативних задатака математике у првом разреду је да ученици „ ...исправно употребљавају знаке једнакости и неједнакости и одређују непознати број у одговарајућим једнакостима искључиво путем ‘погађања‘ ‘‘(Правилник, 2004). У трећем разреду ученици треба да „знају да решавају једноставније једначине у скупу бројева до 1000“, као и неједначине облика $x > 15$, $x < 245$, те да овладају скупом решења неједначина, док у четвртом разреду ученици треба да „знају да решавају једначине и неједначине у скупу природних бројева“ (Правилник, 2005,2006).

Када је у питању наш програм с правом ћемо констатовати да је алгебра заступљена још од раног школског узраста, те не би требале да се појаве потешкоће код ученика, при овладавању алгебарским садржајима. За потребе овог рада за нас је посебно важно решавање једначина и неједначина, па ћемо на њих ставити посебан акценат у даљем тексту.

3.1. Увођење појма променљиве

Почетак формирања математичког језика заснован је на симболима, изразима и формулама. Први математичар који је бројеве заменио симболима био је Вијет (Francois Viete). Даље, у 20. веку Пикок (George Peacock) направио је јасну разлику између аритметичке алгебре и словне алгебре. Аритметичка алгебра подразумевала је релације између конкретних бројева, које је Пикок касније замењивао словима. Тако се променљива више није схватала као број, већ као самостални објекат (према Зељић, 2014). Већ смо нагласили да се у трећем разреду основне школе поступно уводи појам променљиве, где слово заузима симбол променљиве. „Ученици најпре одређују вредности најпростијих израза (облика: a+3, b-4, a+b, a-b) за различите бројевне вредности слова која у њима фигуришу. Касније постепено упознају сложеније изразе“ (Правилник, 2005).

Важно је напоменути да полазак од реалних ситуација олакшава ученику овладавање појмом променљиве. На пример, бавећи се читањем података о висини чланова породице ученици спонтано усвајају појам променљиве и долазе до потребе увођења обједињујућег (апстрактног) математичког појма (Ђокић, 2014).

Усискин (Usiskin, 1997) наглашава да је алгебра језик. А да бисмо разумели тај језик, морамо пре свега разумети концепт променљиве. Алгебра као језик подразумева читање, писање и манипулисање бројевним и словним изразима у формулама, једначинама и неједначинама. Да би се у потпуности разумео појам променљиве мора се водити рачуна о правилима алгебарског језика. На пример израз 3x, значи 3 помножено са x, међутим и израз x3 значи x помножено са 3, што је заправо исто као и претходни израз, али углавном се пише 3x јер постоји конвенција о томе да се коефицијент, у нашем случају 3, увек пише на првом месту.

Многи аутори се слажу са чињеницом да се ученици у основној школи више сусрећу са словом као непознатом, него као са променљивом. Стога се Карпентер и Леви (Carpenter and Levi, 2000) залажу за чешћи сусрет ученика са словом као променљивом, јер сматрају да то може помоћи у превазилажењу бројних недоумица у оквирима ране алгебре. Рецимо, Кухман је у свом истраживању чији је узорак чинило 3000 британских средњошколаца узраста од 13 до 15 година испитивао како они схватају слова и словне изразе. Резултати истраживања су показали да је мали број ученика слово схватило као променљиву, док је већина ученика слово схватила као непознату. Чак је већи број ученика слово пре схватила као уопштен број, него као променљиву .

С тим у вези јасно је зашто Карпентер и Леви захтевају чешће додире са појмом променљиве на раном школског узрасту и залажу се за рану алгебру.
Права значења алгебарске нотације могу се открити једино уз помоћ ране алгебре. Истраживања су показала да ученици највише потешкоћа имају да схвате да слово x (или било које друго слово) може означавати било који број. Основа проблема огледа се у томе што су ученици у оквиру аритметике навикли да се баве конкретним случајевима, док алгебру осликавају општи случајеви (Carraher, at al., 2007).

Марјановић и Зељић (2006) у почетној настави алгебре идентификују четири случаја коришћења слова, то су:

1. „састављање и решавање једноставних облика једначина;
2. састављање и решавање једноставних облика неједначина;
3. симболичко изражавање правила аритметике;
4. састављање словних израза и једнакости које изражавају правило коресподенције између два квантитета (изражавање функционалне зависности између променљивих)‘‘ (стр. 13).

3.2. Једначине

Наш програм предвиђа постепено упознвање са једначинама кренувши још од првог разреда основне школе. Марјановић (1996) једначине посматра као помоћно средство ученицима, које им омогућава манипулацију словима и словним изразима у смислу развијања идеје о променљивој. Такође наглашава да је од круцијелног значаја веза између сабирања и одузимања, којом ученици реба да овладају како би решавали једначине типа a + b = c, c – b = a. Увежбаност везе између сабирања и одузимања повезан је са поступком решавања једначина. Рецимо, једначину x + 3 = 5 ученици решавају тако што траже број који сабран са 3 даје 5. Следећа фаза односи се на растављање збира на два сабирка од којих је јадан унапред познат, дакле једначина x + 3 = 5 преводи се на једначину x + 3 = 2 + 3 (Дејић и Егерић, 2003). Кнут са сарадницима такође истиче да је познавање аритметичких операција и односа неопходно за решавање једначина (Knuth, at all., 2006).

Појам непознатог броја и једнакости у којима фигурише непознати број уводи се још у првом разреду основне школе.

> „Ученици тада треба да схвате да не постоји никакав непознати број у апсолутном смислу, већ то може бити сваки број који је прикривен неким условом. Ту ‘прикривеност‘ можемо осмислити разним дидактичкимм играма (у кутији, прекривен нечим и сл.) а након откривања и бројања, стање ‘прикривености‘ нестаје, па откривамо број који се ‘крио‘ иза непознатог броја x. Тада можемо писати једнакости x = 4, x = 6 итд.Следећи корак представља мотивисано писање словних израза и једначина.
> То значи да на основу ситуација у окружењу ученици пишу словне изразе и једнакости (Зељић, 2014 стр. 134). На пример:

15	
x	5

x + 5 = 15

Прича која може да прати ову слику гласила би „на једној грани је неколико птица (x), а на другој 15, а укупно их је x + 5, тј. 15“. Провера решења је такође битан завршни корак при решавању једначина. Неопходно је споменути да ученици млађих разреда могу решавати и сложеније облике једначина , за које им је потребно функционално знање аритметичких операција и овладавање аритметичким изразима у скупу природних бројева. На пример, ако ученици израз $12 \cdot 3 - 20$ схватају као разлику бројева (производа $12 \cdot 3$ и броја 20), неће имати потешкоће да у једначини $12 \cdot x - 20 = 28$, уоче израз у коме се налази x и третирају га као непознати умањеник (Зељић, 2014).

Према Кијеран (Kieran, 1992) методе решавања једначина су следеће:

- „употреба нумеричких чињеница,
- употреба техника бројања,
- сакривање,
- распакивање (рад уназад),
- проба-грешка замена,
- транспозиција („мења страну-мења знак‘)
- извођење исте операције са обе стране једнакости ‘‘ (стр. 400).

Кијеран сматра да последња два приступа спадају у формалне методе решавања једначина и да су примеренији ученицима виших (шести и седми) разреда. Док су бројна истраживања која је спровела показала да је метод „проба – грешка замена“ најприсутнији код ученика млађих разреда приликом решавања једначина.

3.3. Неједначине

Већ смо споменули да наш програм прописује увођење појма неједначина у трећем разреду основне школе, даље ученици се оспособљавају да решавају неједначине и у четвртом разреду у скупу природних бројева. Зељић (2014) јасно указује на поступке које је претходно неопходно спровести пре приступа решавању неједначина:

- овладавање аритметичким изразима и познавање структуре истих, као и прихватање словних израза процедурално и структурално;
- разумевање и спровођење поступка при решавању једначина;
- увођење скуповно-теоријске нотације;
- упознавање са неједначинама облика $x > a$ и $x < a$;
- изграђивање разумевања функционалне зависности резултата операције од промене њених компонената.

Када говоримо о увођењу неједначина у настави Бланко (Blanco) и Гарот (Garrote) захтевају следеће:

- појам не уводити сувуше брзо;
- уверити се да је развијено значење симбола;
- јасно нагласити разлике између једначина и неједначина;

- користити различите језике (свакодневни и алгебарски) како би се појам разумео;
- увести формалне нотације који су у вези са процесима неопходим за решавање неједначина;
- користити различите стратегије решавања (Blanco and Garrote, 2007: 227).

Да би ученици успешно савладали неједначине потребно је користити различите репрезентације при њиховој обради као што су: графички модели, табеле, текстуални проблеми, симболи и сл. (Verikios and Farmaki, 2008). Правилник прописује следеће:

> „Код решавања неједначина у разредној настави, треба користити начин ‘погађања‘ на погодно одабраним примерима. Исто тако, уз дату неједначину, треба посматрати и одговарајућу једначину која се добија кад се у неједначини знак неједнакости замени знаком једнакости. Ако одредимо решење једначине, онда је лако одредити скуп решења дате неједначине. Једначине и неједначине пружају велике могућности за још потпуније сагледавање својстава рачунских операција и функционалне зависности резултата операције од њених компонената. Када одређени број задовољава (не задовољава) дату једначину или неједначину, онда то ученици треба да исказују и записују речима ‘тачно‘ (‘нетачно‘) или на неки други, краћи начин“ (Правилник, 2005).

Дакле, решавање неједначина у почетној настави математике ослања се на решавање једначина уз функционалну примену правила зависности резултата операције од промене њених компонената. На пример, неједначину олика $20 + x > 44$, решићемо тако што ћемо прво решити једначину $20 + x = 44$ ($x = 24$), а потом вршимо анализу израза $20 + x$. Када x узима вредност 24, вредност израза $20 + x$ једнака је броју 44. Вредност израза $20 + x$ расте када x расте, па је решење неједначине $x > 24$. Врло је важно водити рачуна при решавању неједначина са променљивим умањеником и умањиоцем у скупу природних бројева, због изводљивости операције одузимања у том скупу. Прво морамо одредити скуп D у коме се траже решења, јер сва остала решења изван скупа била би бесмислена. На пример, при решавању неједначине $56 – x < 40$, прво одређујемо скуп D у оквиру кога можемо тражити решења ($D = \{56, 55, 54, 53, 52, 51, ..., 0\}$). Након тога решавамо једначину $56 – x = 40$ ($x = 16$). Анализирамо израз $56 – x$: вредност израза расте ако се умањилац смањује, односно вредност израза опада ако се умањилац повећава. Дакле вредност израза, $56 – x$ биће мања од 40 ако умањилац x има вредности веће од 16. Па је решења скуп $D = \{17, 18, 19, 20, ..., 56\}$.

Бројне су недоумице приликом решавања неједначина од стране ученика, а проблеми који до њих доводе су: погрешно посматрање и разумевање везе између јеначина и неједначина, схватање ученика да неједначина има само једно решење, манипулација алгебарским симболима без развијеног значења истих и конфузија при решавању сложенијих неједначина (Ursini and Trigueros, према Зељић, 2014). Да би се наведени проблеми избегли, неопходно је поступити према претходно наведеним поступцима при увођењу појма неједначина.

3.4. Концепт функционалне зависности

Представљање функционалних односа у настави матеатике постиже се на три начина: геометријски (шеме, дијаграми, графици, сртежи); аритметички (бројеви, табеле, уређени парови); алгебарски (словни симболи, формуле, придруживање) (Verstappen, према Kieran, 1992). За нас је најзначајнији алгебарски начин, јер се у раду бавимо алгебарским садржајима, тачније једначинама и неједначинама.

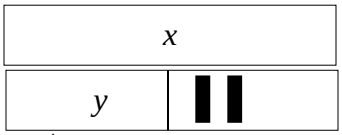
Функција је уређена тројка објеката (X, Y, f) где је X домен, Y кодомен, а f закон придруживања.У почетној настави математике не користе се појмови домен и кодомен већ се они спонтано усвајају. Дакле функцију записујемо на следећи начин y = f(x).

> ,,Идеја функције прожима све програмске садржаје, почевши још од формирања појма броја и операције. Највећи значај придаје се пресликавању (нпр. свакој дужи, при одређеној јединици мерења, одговара један одређени број итд.). Изграђивању појма пресликавања помаже увођење таблица и дијаграма. ... Таблични начин изражавања пресликавања користи се за утврђивање промене резултата операција, у зависности од промене једне од компонената. У процесу систематског рада с таблицама, ученици овладавају самим начином коришћења таблица за утврђивање одговарајућих зависности између података (величина) што је, само по себи, посебно важно. Откривању идеје функције доприносе и разноврсна вежбања с бројевним низовима. На пример, може се дати задатак: 'Продужити низ 10, 15, 20... Који ће број бити у низу на осмом (петнаестом) месту? Да ли је у датом низу број 45 (или 44)? На којем ће месту у датом низу бити број 55 (или 70) ? ' '' (Правилник, 2005).

Функцију треба схватити као релацију, коју карактерише својство да за сваки елемент из домена (полазни скуп) на основу датог пресликавања, имамо тачно један елемент кодомена (пресликавањем добијени скуп). Појам функције треба уводити од почетка школовања, а као помоћна средства користити: попуњавање таблица где у завсиности од промене компоненте зависи и промена резултата, могу се дати бројеви из домена и кодомена, а од ученика захтевати да успоставе везу између њих и то запишу симболички (Дејић и Егерић, 2003).

Један од задатака почетне наставе математике јесте ,,да ученици усвоје основне чињенице о скуповима, релацијама и пресликавањима" (Правилник, 2005). Зељић (2014) сматра да би идеју функције требало развијати вођењем ученика до симболичког (словног) изражавања функционалне зависности између променљивих , а не путем дефиниција. На основу реалне ситуације може се сачинити табела на основу које ће ученици процедурално схватити функционалну зависност.

Рецимо: *На једној полици има x књига, а на другој y књига. Када на другу полицу додамо две књиге, на обе полице биће једнак број књига.*
Сликом ћемо представити дату ситуацију на следећи начин:



Јасно се види да је x = y + ___ .

Ова једнакост биће тачна ако је n = 0 и m = 2. Нађи више вредности за које је једнакост тачна и попуни табелу.

y	1	2	3	6	10
x					

4. Преглед досадашњих истраживања

Значај проблемске наставе у почетној настави математике како је већ истакнуто, препознат је у прошлом веку. Данас се налази у основи многих дискурса и истраживања с циљем да се што више примењује. Приликом проучавања релевантне литературе наишли смо на истраживања која углавном истичу улогу и значај проблемске наставе и истраживања која расветљавају проблеме са којима се ученици сусрећу приликом решавања једначина и неједначина, али кроз појединачни контекст.

Не постоје истраживања која говоре о улози проблемске наставе у развоју спсособности моделовања, односно при решавању једначина и неједначина. Тако да с правом можемо рећи да је тема овог рада актуелна и оправдано исказује потребу да се дубље истражи.

Имплементација проблемске наставе пружа ученицима могућност да уоче везу између проблема из реалног живота и света математике. Ову констатацију нам потврђује истраживање које су спровели Портал и Сампсон (Portal & Sampson, 2001) где јасно указују на незадовољство ученика средње школе при извођењу наставе традиционалним приступом. С тим у вези извели су закључак да би наставу требало модификовати, а решавање математичких проблема повезивати са проблемима из реалног живота, те извршити реструктуирање са становишта спровођења наставних стратегија. Резултати овог истраживања су заиста оправдани, јер ако бисмо РМО приступ упоредили са традиционалним увидели бисмо бројне разлике. У традиционалном приступу од ученика се тражи да у задацима примене знања у проблемима који су дати у контексту, док су у РМО приступу математички проблеми смештени су у контекст од самог почетка, конкретније контекстуални проблеми и свакодневне ситуације у РМО представљају извор за учење (Heuvel-Panhuizen, 2001). С тога је јасно зашто су ученици испољили незадовољство према традиционалном приступу.

Барановић и сарадници (2010) су испитивали мишљења учитеља и наставника математике, у вези са наставним системима који се користе у настави у основим и средњим школама у Хрватској. Испитивање је извршено на узорку од 292 наставника и учитеља. Резултати истраживања показују да, према мишљењу учитеља и наставника, у настави математике у школама доминирају традиционални приступ и традиционалне методе поучавања и учења. Проценили су да се у настави математике највећи нагласак ставља на решавање математичких задатака, а мање на употребу математике у свакодневном животу. Дакле,

крајњи закључак на основу спроведеног испитивања упућује на то да се у настави математикеретко примењују метода откривања и проблемска настава.

Емпиријско истраживање чији је узорак чинило укупно 500 учитеља и наставника математике у основним школа у Гани, показало је да чак 90,1 % учитеља и наставника не спроводе скоро никако проблемску наставу на часовима математике. То је указало на велики проблем у њиховом образовању, те се приступило имплементацији идеја о програмима обучавања наставника у оквиру иновативних наставних система, с циљем унапређења наставе математике (Nyala, Assuah, Ayebo & Tse, 2016).

Јанковић (2016) је испитивала мишљења и ставова учитеља о учесталости, значају примене и начинима реализације проблемске наставе на часовима математике и анализирање ставова и искустава ученика о настави математике организованој применом проблемске наставе. Анкетирано је 67 учитеља и 94 ученика трећег разреда основних школа у Врању. Резултати су показали да учитељи и ученици имају позитивне ставове о примени проблемске наставе у реализацији математичких садржаја. Учитељи познају значај и предности примене проблемске наставе, док су ученицима су часови проблемске наставе интересантни и сматрају да се оваквим видом наставе могу стећи доста квалитетнија знања.

Концепт једначина и неједначина био је у домену различитих истраживања последњих деценија у којима су аутори углавном представљали потешкоће са којима се ученици сусрећу приликом њиховог решавања. Сфард (Sfard, 1987) на основу свог истраживања на узорку од 94 ученика старости од 14 до 16 година, закључила да ученици много боље једноставне текстуалне проблеме решавају дајући вербална упутства, него састављањем једначина. Проблем са којим су се ученици сусретали приликом решавања једначина крије се у неадекватном посматрању релације једнакости у аритметици, где се тај знак схвата као команда „израчунај“. Кијеран (Kieran, 1982) је извршила експеримент са ученицима шестог разреда и закључила да ученици иако су успели на основу једнакости 35 + 42 = 77 да запишу једнакост 35 = 77 – 42 , ипак то знање у већини случајева нису могли применити на процес решавања једначина. Нису успели на основу једнакости x + 42 = 77, да запишу једнакост x = 77 – 42, што потврђује постојање проблема који смо споменули.

Драјфус и Хох (Dreyfus and Hoch, 2004) су у свом истраживању са ученицима средњих школа у Израелу, дошли до закључка да ти ученици нису у могућности да структурално схвате једначине, те да су резулатати показали доминацију процедуралног схватања једначина.

Кијеран (Kieran, 2004) наглашава да је кроз своја спроведена истраживања схватила да највећи проблем лежи у проналсаку адекватних начина који ће ученицима помоћи да се чувају замки везе између једначина и неједначина. Истраживање које је спровела са

ученицима осмог разреда у Јапану показало је да ученици врло често поведени поступком решавања једначина, за неједначину не пронађу скуп њених решења већ напишу једно решење. Урсини и Тригверос такође се слажу са констатацијама Кијеран и истичу да су у својим истраживањима закључили да ученици најчешће греше јер не разумеју везу између једначина и неједначина (Ursini and Trigueros, према Зељић, 2014).

Према TIMSS 2015 циклусу истраживање је показало да су ученици 4. разреда основе школе у Србији у просеку дали 62,67% тачних одговора из области *Изрази, једначине и релације,* у оквиру које су идентификоване следеће групе задатака: „(1) проналажење непознатог броја или непознате операције у бројевном изразу (нпр. 17 + w = 29); (2) препознавање или писање израза како би се представила проблемска ситуација која укључује непознате вредности; (3) препознавање и коришћење односа у јасно дефинисаном бројевном низу (нпр. описати релацију између суседних чланова и идентификовати парове природних бројева према датом правилу)“(Милинковић и др., 2017: 37).

Као што смо нагласили на почетку, нисмо се сусрели са истраживањима које повезују проблемску наставу и методе решавања једначина и неједначина, те смо се одлучили да тај проблем расветлимо и дубље анализирамо.

II МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР ИСТРАЖИВЊА

1. ПРОБЛЕМ И ПРЕДМЕТ ИСТРАЖИВАЊА

У овом истраживању испитиваћемо *Ефекте проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања* приликом решавања једначина и неједначина у четвртом разреду основне школе, потом ћемо сагледати и утицај уведеног модела на тематске области изван наведених. Досадашња истраживања су показала да недостаци у данашњем образовно-васпитном систему и даље постоје, те се као главни наводе: недовољна активност ученика, несамосталност ученика, фаворизовање механичког учења напамет и смисленог вербалног учења, док учење путем открића, стваралачко учење и кооперативно учење значајно изостају. Међутим, како је проблемска настава нарочито погодна за примену код учења математичких садржаја, поставља се питање: *да ли је она ефиксан облик наставе који допроноси развоју способности математичког моделовања?* То је проблем који се поставља пред нас и који ћемо покушати да решимо, разматрајући га са теоријског и експерименталног становишта.

Предмет овог истраживања је испитивање и проучавање ефеката проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања приликом решавања једначина и неједначина у четвртом разреду основне школе, у циљу унапређивања квалитета ученичких знања. Како је проблемска настава врло ефиксано средство којим наставници доводе ученике у ситуацију да самостално откривају и надограђују знања, сматрамо да има и великог удела у развоју способности математичког моделовања. Сходно томе, можемо констатовати да су проблем и предмет нашег истраживања актуелни и да имају научни, педагошки и друштвени значај.

Научни и педагошки значај огледају се у чињеници да на основу досадашњих теоријских разматрања и наших сазнања, није било покушаја проучавња ефиката проблемске наставе у контексту развоја способности математичког моделовања. Друштвени значај истичемо као жељу да ученике васпитавамо у духу самосталног суочавања са проблемима, извођења закључака, креирања идеја које могу бити пут до решења одређеног проблема и сл.

Сматрамо да ће наше истраживање оправдати ефикасност проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања, те ће подстаћи друге истраживаче за нова истраживања, кроз неки другачији контекст.

2. ЦИЉ И ЗАДАЦИ ИСТРАЖИВАЊА

Циљ овог истраживања је испитати ефекте проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања.

Да би се постављени циљ реализовао, потребно је остварити следеће **задатке истраживања**:

1. Испитати да ли постоје разлике између ученика експерименталне и контролне групе у постизању успеха израженим резултатом на иницијалном тесту;

2. Испитати у којој мери је код ученика четвртог разреда основне школе применом проблемске наставе могуће утицати на развој способности математичког моделовања при решавању једноставних једначина и неједначина;

3. Утврдити да ли ће ученици четвртог разреда основне школе након спровођења проблемске наставе успешније решавати сложене једначине и неједначине уз помоћ математичког моделовања;

4. Испитати колика је успешност ученика у састављању текстуалних задатака у вези са једначинама и неједначинама на основу задатих иконичких и симболичких представа, након спровођења проблемске наставе ;

5. Испитати ефикасност проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања у ситуацијама изван тематских области једначина и неједначина;

6. Испитати ставове ученика експерименталне групе у вези са ефектима имплементације проблемске наставе на часу математике.

3. ХИПОТЕЗЕ ИСТРАЖИВАЊА

Општа радна хипотеза

Претпоставља се да је проблемска настава ефикасно средство у развоју способности математичког моделовања.

Посебне хипотезе:

1. Претпоставља се да не постоје значајне разлике између ученика експерименталне и контролне групе у постизању успеха израженим резултатом на иницијалном тесту;

2. Претпоставља се да ће реализација проблемске наставе у великој мери утицати на развој способности математичког моделовања код ученика четвртог разреда основне школе, приликом решавања једноставних једначина и неједначина;

3. Очекује се да ће ученици без потешкоћа решавати сложеније једначине и неједначине применом математичког моделовања, након спровођења проблемске наставе;

4. Претпоставља се да ће ученици из експерименталне групе показати знатно већи успех у односу на ученике из контролне групе у састављању текстуалних задатака у вези са једначинама и неједначинама на основу задатих иконичких и симболичких представа;

5. Претпоставља се да ће ученици експерименталне групе показати виши ниво знања у домену решавања задатака изван тематских области једначина и неједначина у односу на ученике контролне групе;

6. Очекује се да ће ставови ученика експерименталне групе у вези са ефектима које остварује проблемска настава на часу математике бити позитивни.

4. МЕТОДЕ, ТЕХНИКЕ И ИНСТРУМЕНТИ ИСТРАЖИВАЊА

Истраживање које намеравамо да спроведемо захтева експерименталну, дескриптивну научноистраживачку методу и методу теоријске анализе. Експерименталну методу у овом истраживању посматраћемо као базичну како бисмо упоредили ефекте проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања при решавању једначина и неједначина с једне стране, са нивоом развоја математичког моделовања под утицајем класичне наставе, с друге стране. Користићемо експеримент са паралелним групама. У сваку од 2 експерименталне групе биће уведен експериментални програм, док ће се настава у 2 контролне групе реализовати на традиционалан начин. Дескриптивну методу применићемо код анализе, обраде и интерпретације резултата тестова. Методу теоријске анализе користићемо приликом проучавања прикупљених теоријских и практичних сазнања и постојеће литературе о проблемској настави, математичком моделовању и алгебарским садржајима.

У истраживању применићемо технику тестирања. Тестирањем ћемо утврдити ефекте експерименталног програма утицаја проблемске наставе на развијање способности математичког моделовања . Тестирање ће бити обављено у три наврата. Прво, пре почетка деловања експерименталног фактора – иницијално мерење, друга два- финална, након завршетка експерименталног програма.

У истраживању од инструмената користићемо следеће тестове:

- иницијални тест знања (садржаји у вези са решавањем једначина и неједначина);

- први финални тест знања решавања једначина и неједначина након развоја способности математичког моделовања под утицајем проблемске наставе;

- други финални тест знања, којим испитујемо примену знања изван тематских области једначине и неједначине. Овим тестом прикупићемо податке у вези са постојањем трансфера учења на нове садржаје.

Применом методе квалитативне анализе спровешћемо циљано посматрање и анализу активности (одабраних) ученика на часовима проблемске наставе (белешке и запажања од стране посматрача часа, користићемо у сврху писања детаљног извештаја о току реализоване активности).

Такође извршићемо индивидуално интервјуисање ученика експерименталне групе које ће се односити на испитивање ставова ученика у вези са улогом и значајем проблемске наставе на часу математике. Дакле ученички водич за интервју базираће се на следећим темама: општи утисци о математици, ставови ученика у вези са проблемском наставом на часу математике, мишљења ученика у вези са задацима у оквиру проблемске наставе. Сваки ученик ће одговорити на 10 формираних питања. Учесницима интервијуа (ученицима) обезбедићемо пријатну атмосферу како бисмо им дали прилику да слободно искажу своје ставове и мишљења у вези са темом.

5. ВАРИЈАБЛЕ У ИСТРАЖИВАЊУ

На основу анализе свих сегмената проблема и предмета истраживања утврдили смо варијабле које, према функцији у истраживању, имају статус зависних и независних варијабли.

Зависне варијабле су:

- постигнуће ученика (резултати на тесту) и
- ставови ученика у вези са ефектима проблемске наставе на часу математике.

Независна варијабла је: овладавање методама решавања једначина и неједначина под утицајем проблемске наставе (модел који се уводи).

6. УЗОРАК ИСТРАЖИВАЊА

Узорак овог истраживања чиниће ученици у експерименталној и контролној групи и то 88 ученика који у школској 2018/2019. години похађају четврти разред основне школе у Крупњу и Лозници. Пошто смо се определили за експеримент са паралелним групама, формирали смо две групе ученика експерименталну и контролну групу. Узорак ће чинити 88 ученика, по 44 ученика у свакој групи.

Узорак има елементе случајног и групног узорка. Случајним избором одабрали смо основне школе за експерименталну и контролну групу. Експерименталну групу чиниће 44 ученика четврог разреда у ОШ „Боривоје Ж. Милојевић“ у Крупњу, док ће контролну групу чинити 44 ученика истог разреда у ОШ „Анта Богићевић“ у Лозници. Кажемо да је узорак групни јер смо одабрали већ формиране групе ученика – одељења.

7. ОПИС ИСТРАЖИВАЧКИХ АКТИВНОСТИ

Истраживање ће се реализовати у периоду мај – јун 2018. године, и то кроз следеће фазе:

- израда припрема за час за спровођење проблемске наставе у овладавању алгебарским садржајима (једначинама и неједначинама) ;
- формирање експерименталних и контролних група;
- иницијално тестирање ученика контролне и експерименталне групе;
- реализација наставних часова (од стране аутора рада) по утврђеном моделу у експерименатлним групама и реализација наставних часова (од стране учитеља) класичним приступом у контролним групама;
- прво финално (завршно) тестирање ученика контролне и експерименталне групе;
- друго завршно тестирање контролне и експерименталне групе којим испитујемо утицај проблемске наставе на решавање задатака изван тематских области једначина и неједначина;
- спровођење интервјуа са ученицима експерименталне групе;
- статистичка обрада података;
- извођење и инетрпретација закључака.

За потребе овог истраживања распоред и број часова релевантних наставних јединица унапред ће бити утврђен, те ће експериментална и контролна група имати једнак број часова. Реализација ће се извести у оквиру следећих наставних јединица:

Мај

1. Једначине са множењем и дељењем – обнављање;
2. Неједначине са множењем и дељењем- обрада;
3. Неједначине са множењем и дељењем- утврђивање;

Јун

4. Једначине и неједначине са сабирањем и одузимањем- утврђивање;
5. Једначине и неједначине са множењем и дељењем- утврђивање;
6. Једначине и неједначине – вежбање.

ИНИЦИЈАЛНА ЛИСТА БИБЛИОГРАФСКИХ ЈЕДИНИЦА

1. Барановић, Б., Штибрић, М. и Чизмешија, А. (2010). Мишљење учитеља и наставника математике о настави математике у основим и средњим школама у Хрватској - резултати емпиријског истраживања проведеног на Трећем конгресу наставника математике. Зборник радова-*Четврти конгрес наставника математике*, Загреб : Хрватско математичко друштво и Школска књига , 45-46.

2. Blanco, L. J. and Garrote, M. (2007). Diffi culties in learning inequalities in students of the fi rst year of pre-university education in Spain. *EurasiaJournal of Mathematics Science and Technology Education*, 3, 221–229.

3. Bruner, J. S. (1961). *The Act of Discovery*, Harvard Educational, Review, No 31.

4. Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 63-75.

5. Verikios, P. and Farmaki, F. (2008). Approaching the inequality concept via α functional approach To school algebra in a problem solvingcontext. In Gagatsis, A. (Eds.), *Research in Mathematics Education* (191–205). Nicosia – Cyprus.

6. Вилотијевић, М. (1999). *Дидактика 1 - предмет дидактике*. Београд: Научна књига и Учитељски факултет.

7. Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9, Utrecht: Utrecht University.

8. Verschaffel, L., Greer, B. and De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

9. Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: the case of word problems. *Learning and Instruction*, 7 (4) (293-307).

10. Doerr, H. M. & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2), 110–136.

11. Дејић, М. (1996). *Методичка трансформација одабраних садржаја нумеричке математике*. Вршац: Виша школа за образовање васпитача.

12. Дејић, М. и Егерић, М. (2003). *Методика наставе математике.* Јагодина: Учитељски факултет.

13. Dreyfus, T. and Hoch, M. (2004). Equations – A Structural Approach. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for thePsychology of Mathematics Education* (I, 152–155). Bergen, Norway.

14. Дураковић, М. (1985). *Развијање стваралачких способности у проблемско-креативној настави*. Пула: Истарска накнада.

15. Ђерић, И., Станчић, М. и Ђевић, Р. (2017). *TIMSS 2015 – Квалитет наставе и постигнућа ученика у математици и природним наукама*. Београд: Институт за педагошка истраживања.

16. Ђорђевић, Ј. (1997). *Настава и учење у савременој школи*. Београд: Учитељски факултет.

17. Ђокић, О. (2014). Реално окружење у почетној настави геометрије. *Иновације у настави - часопис за савремену наставу* , 27(2), 7-21.

18. Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања (2011). *Општи стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања за предмет Математика*, Београд.

19. Zech, F. (1999).*Grundkurs Mathematikdidaktik - Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik*, BeltzVerlagWeinheim und Basel.

20. Зељић, М. (2014). *Методички аспекти ране алгебре*. Београд: Учитељски факултет.

21. Јанковић, С. (2016). Примена проблемске наставе у реализацији садржаја почетне наставе математике. *Годишњак*, VII, (363-374). Врање: Педагошки факултет, Универзитет у Нишу.

22. Јукић, С. (2001). *Настава у којој ученик мисли*. Вршац: Виша школа за образовање васпитача.

23. Kaput, J. J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. In Chick, H., Stacey, K., Vincent, J., & Vincent, J. (2001). Proceedings of the 12th ICMI Study Conference (Eds.) *The Future of the Teaching and Learning of Algebra.* (Vol. 1, pp. 344-352). University of Melbourne.

24. Kieran, C. (1982). *The learning of algebra*: *A teaching exsperiment*. Paper presented at the annual meeting of the AREA, New York.

25. Kieran, C. (1992). Th e learning and teaching of school algebra. In Grouws, D. A. (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (390–419). New York: Macmillan.

26. Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, **8**(1), 139-151.

27. Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N. and Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education,* 36 (4), 297–312.

28. Marjanović, M. i Zeljić. M. (2006). Solving Inequalities in Primary School. *The teaching of Mathematics*, IX (1), 13–30.

29. Марјановић, М. (1996). *Методика математике*. Београд: Учитељски факултет.

30. Милинковић, Ј. (2007). Реално окружење као извор математичких појмова, у: *Дидактичко - методички аспекти промена у основношколском васпитању*, Учитељски факултет, Београд, стр. 111-117.

31. Milinković, J. (2010). Pupils' active learning in integrated mathematics and technical education class: case study. In *Stydent in contemporary learning and teachnig* (97-109), Beograd: Učiteljski fakultet.

32. Милинковић, Ј. (2014). Математичко моделовање у наставним системима. *Иновације у настави*, XXVII, 2014/2 (45-55). Београд: Учитељски факултет.

33. Милинковић, Ј. (2016). *Огледи о учењу у настави математике*. Београд: Учитељски факултет.

34. Милинковић, М., Јаблановић- Марушић, М., и Боричић-Дабић, М. (2017). *TIMSS 2015- Постигнуће ученика из математике: главни налази, трендови и наставни програм*. Београд: Институт за педагошка истраживања.

35. Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије (2015). Наставни програм за први циклус основног образовања и васпитања. http://www.zuov.gov.rs/poslovi/nastavni-planovi/nastavni-planovi-os-i-ss/

36. Novotná, J. (1997). Phenomena Discovered in the Process of Solving Word Problems. In: Hejny, M. and Novotná, J. (Eds.). *Proceedings* ERCME 97 (105–109). Praha: Prometheus.

37. Nyala, P., Assuah, C., Ayebo, A., & Tse, N. (2016). The prevalent rate of problem-solving approach in teaching mathematics in Ghanaian basic schools. *International Journal of Research in Education and Science* (IJRES), 2(2), 444-452.

38. Петровић, Н. (2001). *Математички проблеми у причама*, Нови Сад: Едука.

39. Петровић, Н; Мрђа, М и Ковачевић, П (2004).Моделско-проблемски приступ настави математике. *Норма*, X(1-2) 111-121.

40. Novotná, J. and Rogers, L. (2003). Word Problems: A Framework for Understanding. In: *Rogers, L.* and *Novotná, J.* (Eds.). *Analysis and Teaching. Classroom Contexts. Effective Learning and Teaching of Mathematics from Primary to Secondary School* (79–96). Bologna: Pitagora Editrice.

41. Novotná, J. and Sarrazy, B. (2005). Model of a professor's didactical action in mathematics education: professor's variability and students' algorithmic flexibility in solving arithmetical problems. In: Drouhard, J. P (Ed.). *The Fourth Congress of the European Society in Mathematics Education* (696–705). Retrieved May 25, 2014. from: http: //www. cerme 4.crm.es.

42. Пољак, В. (1985). *Дидактика*. Загреб: Школска књига.

43. Пољак, В. (1989). Настава, *Педагошка енциклопедија*, Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

44. Portal, J. & Sampson, L. (2001). *Improving high school students' mathematics achievement through the use of motivational strategies*. Masters of Arts Action Research Project, St. Xavier University.

45. Правилник о наставном плану и програму за први и други разред основног образовања и васпитања (2004). *Просветни гласник*, LIII (10), 45–48.

46. Правилник о наставном плану програму за први, други, трећи и четврти разред основног образовања и васпитања и наставном програму за трећи разред основног образовања и васпитања (2005). *Просветни гласник*, LIV (1), 38–41.

47. Правилник о наставном програму за четврти разред основног образовања и васпитања (2006). *Просветни гласник*, LV (3), 41–43.

48. Романо, Д. А. (2009а). Истраживање математичког образовања, *Истраживање математичког образовања* , Бања Лука, Вол. 1, број 1, 1-10.

49. Романо, Д. А. (2009б). Теорије математичког образовања, први део: PME-теорија, *Истраживање математичког образовања,* Бања Лука, Вол.1, број 1, 23-35.

50. Savery, R. J. (2006). Overview of Problem-based Learning: Definitions and Distinctions. *The Interdisciplinary Journal of Problem-based Learning*, 1 (1), 9-20.

51. Servais, W. & Varga, T. (1971). *Teaching school mathematics*. Penguin Books Ltd, Harmondsworth.

52. Sriraman, B. & English, L. (2010).*Theories of mathematics education*. Springe.

53. Stillman, G. (2007). *Mathematical Modelling in the Real World*, PowerPoint presentation, Teachers' Training Faculty, Belgrade, Serbia, October 31st.

54. Стевановић, М. (1998). *Дидактика*. Тузла: P & C.

55. Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. In Bergeron, J. C., Herscovic, N. and Kieran, C. (Eds.), *Proceedings of Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (III, 162–169). Montreal, Canada: Universite de Montreal.

56. Terwel, J., Van Oersa, B., Van Dijka, I. and Vanden Eeden, P. (2009). Are representations to be provided or generated in primary mathematics education? Effects on transfer. *Educational Research and Evaluation*, *15* (1), 25–44.

57. Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – the Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

58. Usiskin, Z. (1997). Doing algebra in grades K-4. *Teaching children mathematics*, **3**, 346-356.

59. Harvey, J., Waits, B. and Demana, F. (1995). Th e Influence of Technology on the Teaching and Learning of Algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 75–109.

60. Herstein, I. N. (1964). *Topics in Algebra*, Blaisdell Pub. Co., Mass.

61. Heuvel-Panhuizen, van den M. (2001). Realistic Mathematics Education as work in progress", F.L. Lin (Ed.) *Common Sense in Mathematics Education – Proceedings of 2001 the Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education*, Taipei, Taiwan, pp.1-40.

62. Cabassut, R. (2010). The double transposition in mathematisation at primary school. *Proceedings of CERME* 6, January 28th–February 1st 2009. France: Lyon.

63. Carraher, D., Schliemann, A. D. and Schwartz, J. (2007). Early Algebra Is Not the Same as Algebra Early. In Kaput, J., Carraher, D. and Blanton, M. (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (235–272). Mahwah,NJ: Erlbaum.

64. Carpenter, T. P. and Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades* (Research report No. 00–2).NCISLAMS, Madison: University of Wisconsin.

65. Цекуш, Г., Наместовки, Ж. (2005). Примена рачунара на наставним часовима, *Информатика, образовна технологија и нови медији у образовању*, Сомбор, 1, 16-29.