Образложење теме докторске дисертације кадидаткиње Милане Дабић Боричић

МЕТОДИЧКИ АСПЕКТИ ФОРМИРАЊА АЛГЕБАРСКИХ ЗАКОНА У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Предложена тема је из уже научне области Методика наставе математике. Мотивација за избор теме пронађена је у бројним отвореним питањима о начину и динимаци увођења алгебарских садржаја у наставу математике, о чему сведочи публиковање мноштва научних радова у овој области, као и посвећивање бројних секција актуелних научних скупова овој теми. Становиште да увођењу алгебарских идеја треба да претходи увођење скупа целих или рационалних бројева углавном је напуштено, као резултат истраживања која су показала да се на овај начин ствара „когнитивни јаз“ између аритметике и алгебре. Општи закључак који се може уочити проучавањем литературе (аутори: Freudenthal, Skemp, Davis, Sfard, Kieran, Kaput, Blanton, Warren, Cai, Filloy,…) јесте да алгебарске идеје треба да буду присутне у математичком образовању још у току формирања скупа природних бројева. Разлика у становиштима о начину интегрисања ових идеја у наставу, резултирала је неуједначеним стандардима и курикулумима у математичком образовању широм света, што је дало основу за дискусију о различитим приступима. Издвојила су се два става. Први је упознавање са алгебарским идејама у оквиру бављења аритметиком, изучавањем функционалних зависности, низова,...(став који је присутан нпр. у фокусним тачкама National Council of Teachers of Mathematics, USA и National Mathematics Advisory Panel, Japan) Други став, ближи нашем, јесте да алгебарске идеје, осим у смислу првог става, треба увести у скупу природних бројева кроз алгебарске законе (Виготски, Давидов). То значи да подржавамо идеју да се у оквиру наставе аритметике може (и треба) развијати алгебарско мишљење и да алгебарски симболизам није једино могуће средство за изражавање генерализација, али да тај приступ не искључује симболичко изражавање онога што је већ уопштено и апстраховано. Наш став је да је употреба симболичког језика на основу модела, који би представљао семантички оквир, најпогоднија за изучавање структуре природних бројева. Утемељење овог става, као и представљање другог (којег не сматрамо супротстављеним већ комплементарним), чинио би теоријски оквир истраживања. Хипотезе формулисане на основу теоријског оквира биле би прихваћене или оповргнуте анализирањем резултата емпиријског дела истраживања.

Операционалне и структуралне концепције. Различити аутори класификовали су две врсте математичког знања. Код Пијажеа то је фигуративно и оперативно (J. Piaget, Genetic Epistemology, 1970.), код Скемпа инструментално и релационо (R. Skemp, Relational Understanding and Instrumental

Understanding, 1976.), код Хиеберта концептуално и процедурално (J. Hiebert and P. Lefevre, Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis, 1986.). Разматрајући наведене типове знања у контексту наставе алгебре, Сфард уводи термине структуралног и операционалног знања у математици (A. Sfard, On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, Educational Studies in Mathematics, 1991). Ова два комплементарна начина уобличавања појмова подразумевају да се математички појам посматра као процес или као објекат. Модел по коме Сфард анализира читав историјски развој алгебре јесте оперативно-структурални. Наиме, она развој алгебре види као „хијерархију у којој оно што је схваћено оперативно (нпр. поступак рачунања) на једном нивоу, на вишем нивоу је реификовано у апстрактни објекат и схваћено структурално" (Sfard, The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives, Journal of Mathematical Behavior, 1995., стр. 16). Иако овај, као и други аутори сматрају да је за већину људи први корак за стицање нових математичких концепата операционални, наше становиште је да би се употребом симболичког језика у структури природних бројева могла направити јача спона између аритметике - која се најчешће схвата прцедурално, и алгебре - у којој је неопходна структурална концепција. Међутим, употреба симболичког језика не искључује интуитивно разумевање и процедурално изражавање правила. Сматрамо да би изражавање идеја, које су претходно утемељене употребом модела симболичким језиком допринело да се брже развије структурално схватање појмова.

Алгебарски закони у почетној настави математике. Постоје многа истраживања којима се упућује на недовољно раумевање и коришћење алгебарских закона у почетној настави математике. Чајклин и Лезголд (Chaiklin & Lesgold, Prealgebra Students' Knowledge of Algebraic Tasks with Arithmetic Expressions, 1984.) радили су са ученицима шестог разреда којима је задато да не рачунајући вредности израза процене еквиваленцију трочланих аритметичких израза са сабирањем и одузимањем (на пример, 685 – 492 + 947, 947 + 492 – 685, 947 – 685 + 492, 947 – 492 + 685). Ученици су радије рачунали вредност израза, што указује да нису били у могућности да посматрају изразе независно од њихове бројевне вредности. Искуства оцењивања еквивалентности израза без израчунавања вредности, развијају разумевање које је независно од бројева или објеката којима се оперише (нпр. a + b = b + a, без обзира на то да ли су a и b цели бројеви, децимални бројеви или варијабле). Ворен (Warren) напомиње да „ће бити важно за истраживаче да испитају да ли добро одабрани примери и искуства у основној школи могу да олакшају прогресију, тј. трансфер разумевања од аритметике, преко опште аритметике, до алгебре" (Warren & Pierce 2004, стр. 295).

Наставним програмом образовања и васпитања за први и други разред основног образовања и васпитања РС прдвиђена је употреба слова у другом разреду за означавање непознатог броја и

употреба променљиве за одређивање вредности најпростијих израза. Наставним програмом за трећи разред основног образовања и васпитања РС прдвиђено је да ученици умеју да прочитају и запишу помоћу слова својства рачунских операција, да умеју да одреде вредност израза са словима из дате вредности слова, док је Наставним програмом за четврти разред основног образовања и васпитања РС осим овога, предвиђено да учиници примењују упозната својства рачунских операција при трансформисању израза и у случају рачунских олакшица, али се у начину остваривања програма не наговештава на који начин треба имплементирати овај оперативни задатак. Употреба променљивих се следећи пут спомиње у Наставним програму за шести разред основног образовања и васпитања РС, при увођењу скупа целих бројева, као генерализација правила извођења аритметичких операција у скупу Z, на моделу настављања усмерених дужи.

Настава математике треба да буде усмерена на развијање фундаменталних вештина у генерализовању и на изражавање и систематично оправдавање генерализација (Kaput & Blanton, 2001, Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades, J. Cai, E. Knuth (eds.), Early Algebraization, Advances in Mathematics Education, 2011.), јер таква искуства развијају разумевање које је независно од бројева или објеката којима се оперише. Алгебарски закони у почетној настави математике при увођењу имају дидактички прилагођене називе – здруживање сабирака, нула као сабирак, множење збира бројем, итд. Уведени су путем примера, коришћењем непотпуне индукције. Прва изражавања ових правила су у реторичкој форми. Генерализација у симболичкој форми предвиђена је у трећем и четвртом разреду, и спроведена је над бројевима. Наставним планом и програмом није прецизиран начин увођења генерализација. Осим генерализација над бројевима, сматрамо важним генерализације посредством различитих модела. Такође, осим алгебарских закона структуре N, није предвиђено разматрање других алгебарских формула.

Предмет, циљ, задаци и хипотезе истраживања у дисертацији

Узевши горе наведено у обзир, желели бисмо да испитамо у којој мери су ученици оспособљени за изражавање алгебарских закона након завршетка увођења скупа N (начином на који је предвиђено Наставним планом и програмом РС). Ово сматрамо важним, јер је употреба симболичког језика предвиђена при увођењу целих бројева, а појам целог броја је апстрактнији (у терминима које је увео Скемп) од појма природног броја. Према Скемпу (Mathematics in the Primary School, 1989, стр. 64), основни принципи у „комуницирању нових појмова“, јесу да „појмови вишег реда“ треба да буду комуницирани кроз пажљиво изабране примере“ и да „треба да будемо уверени да ли су појмови нижег реда доступни у уму ученика“.

Такође желимо да дамо предлоге модела и испитамо њихову ефикасност, којима би се побољшала употреба симболичког језика у изражавању структуре скупа N.

Циљ истраживања јесте утврђивање и анализирање ефеката различитих модела на постигнућа ученика у разумевању алгебарских закона пре увођења скупа Z. Осим тога, желимо да испитамо да ли су алгебарски садржаји који су уведени у оквиру наставе аритметике у скупу природних бројева резултирали структуралним концепцијама потребним за наставу алгебре. Ово истраживање резултирало би имликацијама за коришћење симболичког језика у настави аритметике и алгебре.

Задаци истраживања

1. Осмислити инструмент за испитивање степена разумевања алгебарских закона кроз изражавање генерализација и формализација аритметичких правила и својстава операција на крају четвртог разреда.

2. Испитати степен у којем су ученици разумели употребу слова у математичким записима пре примене Модела.

3. Осмислити два Модела (Модел 1 и Модел 2) којима би се систематизовало знање о структури скупа природних бројева. Ефикасност модела ће се испитати помоћу успешности ученика на задацима који су груписани према контексту и то на следећи начин: a. Задаци примене алгебарских закона у рачунским процедурама b. Задаци примене алгебарских закона у текстуалним задацима c. Задаци примене алгебарских закона у симболичком констексту

4. Утврдити ефикасност и упоредити два конструисана Модела.

5. Интерпретирати добијене резултате са аспекта теоријског оквира и Наставног плана и програма РС. С тога би резултати дали импликације за побољшање наставе аритметике и алгебре.

Општа хипотеза:

Конструисани модели су ефикасни у односу на издвојене задатке истраживања који описују припремљеност за почетно бављење наставом алгебре, као и на задатке предвиђене Наставним планом и програмом РС.

Помоћне хипотезе:

1. Ученици су значајно успешнији у реторичком него у симболичком изражавању алебарских закона.

2. Ученици разумеју употребу слова у математичким записима као непознате, генерализованог броја и могу га „игнорисати“.

3. Један од предложена два модела је ефикаснији у односу на издвојене задатке истраживања.

4. Ученици су у стању да прихвате појам еквивалентних израза при формирању алгебаских закона

5. Ефикасност два модела је иста, без обзира да ли је мерена на задацима примене у рачуну, у текстуалним задацима, или у симболичком контексту.

Прелиминарни садржај тезе и методе истраживања

Теза ће садржати следеће основне целине, при чему је могуће додавање нових и проширивање постојећих у зависности од тока и резултата истаживања.

Увод. У уводном делу биће представљен предмет и циљеви истраживања, мотивација за избор теме, као и терминологија која се користи у дисертацији.

Теоријски део истраживања. Ово поглавље ће обухватити преглед досадашњих резултата у овој области. Посебна пажња биће обрађена на алгебарско мишљење и истраживање везе између аритметике и алгебре. Биће анализирани приступи овој теми у настави математике у различитим земљама, као и аргументовани различити ставови о употреби симболичког језика у структури природних бројева. У овом делу представили бисмо и различите моделе које је могуће користити при увођењу симболичког језика.

Емпиријски део истраживања. Најпре, био би представљен методолошки оквир истраживања којим би се представили предмет, циљ, задаци, хипотезе, методе, технике, инструменти, узорак, начини обраде података, као и ток истраживања. У фокусу истраживања биће испитивање постигнућа ученика у симболичком изражавању алгебарских закона и постигнућа у испитивању еквивалентости алгебарских израза.

<u>Метода</u> које ће се користити јесте експеримент са две експерименталне и једном контролном групом. У експерименталним групама планирано је подучавање по два модела а у контролној није планиран утицај експерименталног програма. Планирани инструменти су: иницијални тест знања за уједначавање група и анализирање степена познавања алгебарских закона структуре природних бројева, и завршни тест знања за анилизу појава које се испитују.

Анализа и интерпретација резултата истраживања. Добијени резултати из емпиријског дела истраживања били би представљени и интерпретирани, најпре са становишта која су описана у теријском делу истраживања, а потом и са становишта операционалних задатака предвиђених Наставним планом и програмом РС.

Закључак. Интерпретација резултата дала би закључке за које очекујемо да ће дати научни, практични и теоријски допринос настави аритметике и алгебре, као и дискусији о времену и начину изучавања симболичког записа у настави математике.

Списак стручне литературе

Beasley, T. M., & Schumacker, R. E. (1995). Multiple regression approach to analyzing contingency tables: Post hoc and planned comparison procedures. The Journal of Experimental Education, 64(1), 79-93.

Banerjee, R. & Subramaniam, K. (2012). Evolution of a teaching approach for beginning algebra. Educational Studies in Mathematics, Vol 80, 351-367.

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S. & Suggate J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. Educational Studies in Mathematics, Vol. 70, 217-241.

Blanton, M. & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route into Algebra in the Elementary Grades. In E. Cai & J. Knuth (Eds.), Early Algebraization (pp. 5 - 23). BerlinHeidelberg: Springer.

Brizuela, B., Blanton, M., Sawerey, K., Newman-Owens, A. & Gardiner, A. (2015). Children's Use of Variables and Variable Notation to Represent Their Algebraic Ideas. Mathematical Thinking and Learning, Vol. 17: 34-63.

Blum, W. (1994). Mathematical modeling in mathematics education and instruction. In T. Breiteig, I. Huntley & G. Kaiser-Messmer (Eds.), Teaching and learning mathematics in context (pp. 3-14). Chichester, England: Ellis Horwood Limited.

Booth, L. (1998). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.). The Ideas of Algebra. K-12 (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cai, J. & Knuth, E. (2011). A Global Dialogue About Early Algebraization from Multiple Perspectives, Early Algebraization, In E. Cai & J. Knuth (Eds.), Early Algebraization (pp. vii – xi). Berlin-Heidelberg: Springer.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (p. 669–706). Charlotte, NC: Information Age.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 235–272). Mahwah, NJ: Lawrence ErlbaumAssociates/Taylor & Francis Group.

Carpenter, T. & Levi, L. (2000). Developing Conceptions off Algebraic Reasoning in The Primary Grades. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Canada.

Chaiklin, S. & Lesgold, S. B. (1984). Prealgebra Students' Knowledge of Algebraic Tasks with Arithmetic Expressions. Paper presented at the meeting of the American Research Association, New Orleans. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 247 147).

Chrysostomou, M., Pitta-Pantazi, D., Tsingi, C., Cleanthous, E. & Christou, C. (2013). Examining number sense and algebraic reasoning through cognitive styles. Educational Studies in Mathematics, 83, 205-223.

De Bock, D., Deprez, J., Van Dooren, W., Roelens, M. & Verschaffel, L. (2011). Abstract or Concrete Examples in Learning Mathematics? A Replication and Elaboration of Kaminski, Sloutsky, and Heckler's Study. Journal for Research in Mathematics Education, Vol 42. No. 2, 109-126.

Дејић, М., Егерић, М. (2003). Методика наставе математике 1. Јагодина: Учитељски факултет.

Ding, M. & Li, X. (2014). Transition from concrete to abstract representation: the distributive property in a Chinese textbook series. Educational Studies in Mathematics, Vol 87, 103-121.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fagnant, A. & Vlassis, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. Educational Studies in Mathematics, Vol. 84, 149-168.

Filloy, E., Puig, L. & Rojano, T. (2008). Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach. Melbourne: Springer.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). The Transition from Arithmetic to Algebra. For the Learning of Mathematics, Vol. 9, No. 2, 19-25.

Fischbein, E. Deri, M., Nello, M. S. & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. Journal for Research in Mathematics Education, Vol 16, No. 1, 3-17.

Flores, R, Koontz, E. Inan, F. A. & Algic, M. (2015). The Impact of Multiple Representations First versus Algorithms First on Student Abilities. Educational Sudies in Mathematics, Vol. 89, 267-281.

Franke, T. H., Ho, T. & Christie, C. A. (2012). The Chi-Square Test: Often Used and More Often Misinterpreted. American Journal of Evaluation, 33(3), 448-458.

Fujii, T. & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of a variable. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics, Seventieth Yearbook (pp. 127–140). Reston, VA: NCTM.

Fyfe, E., McNeil, N., Son, J. & Goldstone, R. (2014), Concretness Faiding in Mathematics and Science Instruction: a Systematic Review. Educational Psychology Review, Vol. 26, 9-25.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 276-295). New York: Macmillan.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A Cognitive Gap between Arithemetic and Algebra. Educational Studies in Mathematics, Vol. 27, 59-78.

Kaminski, J., Sloutsky, V. & Heckler, A. (2008). The Advantage of Abstract Examples in Learning Math. Science, Vol. 320, 454-455.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, New York: Macmillan Publishing Company.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? The Mathematics Educator (Singapore), Vol. 8, No. 1, 139–151.

Kieran, C, Boileau, A., Tanguay, D. & Drijvers, P. (2013). Design researchers' documentational genesis in a study on equivalence of algebraic expressions. ZDM Mathematics Education, Vol 45, 1045-1056.

Kieran, C. (2013). The false dichotomy in mathematics education between conceptual understanding and procedural skills: an example from algebra. In K. R. Leatham (Ed.), Vital Directions for Mathematics Education Research (pp. 153-171). New York: Springer.

Kilpatrick, J. (2011). Commentary on Part I. In E. Cai & J. Knuth (Eds.), Early Algebraization (pp. 125-130). Berlin-Heidelberg: Springer.

Knuth, E., Alibali, M., McNeil, N., Weinberg, A. & Stephens, M. (2005). Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equivalence & Variable. ZDM Mathematics Education, Vol. 37, No. 1, 68-76.

Krummheuer, G. (2013). The relationship between diagrammatic argumentation and narrative argumentation in the context of the development of mathematical thinking in the early years. Educational Studies in Mathematics, Vol. 87, 249-265.

Kuchemann, D. (1978). Children's Undrestanding of Numerical Variables, Mathematics in School, Vol. 7, No. 4, 23–26.

Linchevski, L. & Herscovics, N. (1996). Crossing the Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra: Operationg on the Unknown in the Context of Equations. Educational Studies in Mathematics, Vol. 30, 39-65.

Linchevski L. & Livneh, D. (1999). Structure sense: The Relationship between Algebraic and Numerical Contexts. Educational Studies in Mathematics, Vol. 40, 173 – 196.

Marijanović, M. (1996). Metodika matematike 1. Beograd: Učiteljski fakultet.

Mijajlović, Ž. (1993). Algebra 1. Beograd: Milgor.

Nathan, M. & Koedinger, K. (2000). Teachers' and Researchers' Beliefs about the Development of Algebraic Reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 31, No. 2, 168–190.

Palm, T. (2008). Impact of authencity on sense making in word problem solving. Educational Studies in Mathematics, Vol. 67, 37-58.

Rojano, T., Filloy, E. & Puig, L. (2014). Intertextuality and sense production in the learning of algebraic methods. Educational Studies in Mathematics, Vol. 87, 389-407.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. Educational Studies in Mathematics, Vol 22, No 1, 1-36.

Skemp, R. (1987). The Psychology of Learning Mathematics. London: Routledge

Skemp, R. (1989). Mathematics in the Primary School. London: Routledge.

Skemp, R. (1993). Structured Activities for Intelligent Learning. Calgary: EEC Ltd.

Stacey, K. & MacGregor, M. (1999). Learning the Algebraic Method of Solving Problems. Journal of Mathematical Behavior, Vol. 18, No. 2, 149-167.

Tall, D. (2001). Reflections on early algebra. In M. V. D. Heuvel Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 149–152). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Usinski, Z. (1988). Conceptions about School Algebra and Uses of Variables. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), The ideas of algebra, K-12 (1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2013). Educated adults are still affected by intuitions about the effect of arithmetical operations: evidence from a reaction-time study. Educational Studies in Mathematics, Vol. 82, 323-330.

Vigotski, L. S. (1983). Mišljenje i govor, Beograd: Nolit

Watanabe, T. (2011). Shiki: A Critical Foundation for School Algebra in Japanese Elementary School In E. Cai & J. Knuth (Eds.), Early Algebraization (pp. 25 – 41). Berlin-Heidelberg: Springer. 87 - 107.

Wittmann, M., Flood, V. & Black, K. (2013). Algebraic manipulation as motion within a landscape. Educational Studies in Mathematics, Vol. 82, 169-181.

Zeljić, M. (2014). Metodički aspekti rane algebre, Beograd: Učiteljski fakultet.

Zeljić, M. (2015). Modelling the Relationships Between Quantities: Meaning in Literal Expressions. Euroasia Journal of Mathematics, Scinece and Technology Education, Vol. 11, No. 2, 431-442.