

Наставно-научном већу  
Математичког факултета  
Универзитета у Београду

## Извештај Комисије за оцену научне заснованости теме докторске дисертације Соње Телебаковић Оних „Фробенијусове алгебре и тополошке квантне теорије поља“

Одлуком Наставно-научног већа Математичког факултета у Београду, донетој на седници одржаној 28. јуна 2019. године именовани смо за чланове Комисије за оцену научне заснованости теме докторске дисертације „Фробенијусове алгебре и тополошке квантне теорије поља“, кандидаткиње Соње Телебаковић Оних. Након јавне одбране теме, која је одржана 8. јула 2019. године, Комисија подноси Наставно-научном већу следећи извештај.

### 1. Биографија кандидаткиње

Соња Телебаковић Оних рођена је 20. 8. 1981. године у Београду. Математички факултет Универзитета у Београду, смер Теоријска математика и примене, завршила је 2007. године с просечном оценом 9,14. Уписала је докторске студије 2007. године на Математичком факултету у Београду и положила све испите предвиђене планом и програмом, с просечном оценом 10,00 и остварила 150/180 ЕСПБ.

Запослена је на Математичком факултету у Београду, на Катедри за алгебру и математичку логику, од 2007. године. Држала је вежбе из предмета Линеарна алгебра А, Линеарна алгебра Б, Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, Линеарна алгебра, Алгебра 1А, Алгебра 1Б, Алгебра 1, Алгебра 2 и Методологија истраживања у настави математике.

#### Објављени научни радови:

(1) Dj. Baralić, Z. Petrić and S. Telebaković, *Spheres as Frobenius objects*, Theory and Applications of Categories, vol. 33 No. 24 (2018), pp. 691-726 (arXiv:1609.03979) M23

- (2) B. Malešević, D. Todorčić, I. Jovović and S. Telebaković, *Differential Transcendence in the Theory of Linear Differential Systems with Constant Coefficients*, ISRN Mathematical Analysis, vol. 2012 (2012), Article ID 403983, pp. 1-8, (arXiv:0811.0144) M51
- (3) B. Malešević, D. Todorčić, I. Jovović and S. Telebaković, *Formulae of Partial Reduction for Linear Systems of First Order Operator Equations*, Applied Mathematics Letters, vol. 23 (2010), pp. 1367-1371 (arXiv:0811.0141) M21

#### Радови на рецензији:

- (4) S. Telebaković Onić, *On the Faithfulness of 1-dimensional Topological Quantum Field Theories* (arXiv: 1706.02763)
- (5) Z. Petrić and S. Telebaković, *A faithful 2-dimensional TQFT* (arXiv: 1711.06044)

#### Саопштења на научним конференцијама:

1. С. Телебаковић Онић, *1-dimensional Topological Quantum Field Theories and Brauerian Representation*, IX Симпозијум *Математика и примене*, Београд, 30. новембар и 1. децембар 2018.
2. С. Телебаковић, *On the Brauerian Representation and 1-dimensional Topological Quantum Field Theories*, Годишњи сусрет семинара за конфигурационе просторе Математичког Института САНУ, Београд, 25-27. децембар 2017.
3. Б. Малешевић, Д. Тодорић, И. Јововић, С. Телебаковић, *On some reduction formulae for linear systems of operator equations*, 12. Српски математички конгрес, Нови Сад, 28. август- 2. септембар 2008. (излагач)

#### Учешће на пројектима:

1. Анализа и алгебра са применама, евиденциони број пројекта 17403
2. Аналитичке и алгебарске методе и примене у геометрији, топологији и теорији бројева, евиденциони број пројекта 144020

## Кратак приказ радова из области дисертације

(1) Пратећи Фробенијусову структуру која се стандардно додељује једнодимензионалној сфери, у раду се испитује Фробенијусова структура сфера свих других димензија. Почевши од димензије  $d=1$ , све сфере су комутативни Фробенијусови објекти у категоријама чије су стрелице  $(d+1)$ -димензионални кобордизми. У односу на језик којим се описује Фробенијусова структура (множење, комножење, јединица, којединица), нема разлике међу овим сферама, јер су оне ослобођене било каквих једнакости које се могу изразити на том језику. Једини изузетак је нулдимензионална сфера чија одговарајућа Фробенијусова структура није комутативна, већ је само симетрична. Једнодимензионална тополошка квантна теорија поља, која одговара Брауеровој репрезентацији једне класе дијаграматских алгебри, слика нулдимензиону сферу у матричну Фробенијусову алгебру.

(4) У овом раду је доказано да су, у односу на поље карактеристике нула, све 1-димензионалне тополошке квантне теорије поља, које пресликавају нулдимензионалну многострукост која се састоји од једне тачке у векторски простор димензије бар 2, верни функтори.

(5) У коауторском раду са ментором проф. др Зораном Петрићем показано је да комутативној Фробенијусовој алгебри, која је настала као тензорски производ групне алгебре и центра групне алгебре, одговара верна 2-димензионална тополошка квантна теорија поља.

## 2. Предмет и циљ докторске дисертације

Фробенијусове алгебре се први пут појављују у теорији репрезентација, у раду немачког математичара Фробенијуса из 1903. године. Он је проучавао коначно-димензионалне алгебре код којих су прва и друга регуларна репрезентација изоморфне. Сам термин Фробенијусова алгебра први користе Брауер, Незбит и Накајама у низу радова тридесетих година прошлог века. Они дају и неколико еквивалентних карактеризација Фробенијусових алгебри. Према једној од тих дефиниција, Фробенијусова алгебра је

конечно-димензионална алгебра  $A$  над полем  $K$  заједно са линеарном формом  $\varepsilon: A \rightarrow K$ , таквом да важи

$$(\forall a \in A) \varepsilon(ab) = 0 \Rightarrow b = 0.$$

На пример, алгебра квадратних матрица над полем  $K$  са трагом је пример Фробенијусове алгебре.

Алтернативну карактеризацију Фробенијусових алгебри као алгебри које су истовремено и коалгебре, при чему множење и комножење задовољавају одређене услове компатибилности, даје Лоувир 1967. године, а касније ови услови привлаче пажњу и Квина и Абрамса.

У последње време интересовање за Фробенијусове алгебре је порасло због њихове повезаности са тополошким квантним теоријама поља (TQFT). Иако је верност функтора као што је TQFT посебно битна, пошто обезбеђује да алгебарска слика категорије кобордизама нема дефекта, проблем верности TQFT се веома ретко спомиње у релевантној литератури.

У предложеној тези би требало да се реше неки од следећих проблема:

- (1) С обзиром да прелаз из димензије 1 на димензију 2 у категорији кобордизама са сферама као објектима доноси комутативност множења и комножења у односу на постојање само симетричности тих операција, требало би утврдити да ли даље повећање димензије кобордизама доноси нове једнакости на канонској структури тих категорија.
- (2) К. Дошен и З. Петрић су доказали верност једног симетричног моноидалног функтора из категорије 1-кобордизама у категорију матрица, који је пример једне верне 1-димензионалне тополошке квантне теорије поља. У дисертацији би требало решити проблем верности произвољне једнодимензионалне TQFT.
- (3) Постојање верних вишедимензионалних TQFT је и даље отворен проблем који би требало решити.

### 3. Основне хипотезе и резултати од којих се полази у истраживању

Везу између Фробенијусових алгебри и тополошких квантних теорија поља први је приметио Дијкграф. Тиме су се касније бавили и Квин, Савин и Абрамс, као и многи други математичари, а ова веза је најдетаљније објашњена у књизи Јоакима Кока [10]. На основу Атијине аксиоматизације,  $n$ -димензионална тополошка квантна теорија поља ( $n$ -TQFT) је симетрични моноидални функтор из категорије оријентисаних  $n$ -кобордизама у

категорију коначно-димензионалних векторских простора над фиксираним пољем. Овакав функтор свакој затвореној оријентисаној  $(n-1)$ -димензионалној многострукости придружује векторски простор, а сваком оријентисаном  $n$ -кобордизму линеарно пресликавање.

Познато је да свакој 2-TQFT одговара једна комутативна Фробенијусова алгебра и обрнуто. Прецизније речено, категорија чији су објекти 2-TQFT је еквивалентна категорији комутативних Фробенијусових алгебри. Аксиомама комутативне Фробенијусове алгебре одговарају релације које важе за 2-димензионалне оријентисане кобордизме.

Особина верности TQFT функтора је веома важна, пошто даје комплетну инваријанту у проблему класификације кобордизама. Код верних TQFT важи следеће својство: Ако су линеарна пресликавања која одговарају кобордизмима једнака, онда су ти кобордизми еквивалентни. Од раније је познато да постоји верна 1-TQFT. Једна од хипотеза која ће бити потврђена у предложеној дисертацији је да су све 1-TQFT верне.

#### **4. Методе које ће се у истраживању применити**

У истраживању ће се пре свега користити све расположиве методе теорије категорија, посебно категоријалне логике. У неким резултатима потпуности се очекује коришћење алгебарско тополошких техника. Пошто су основни објекти проучавања алгебарске природе и алгебарска средства ће налазити своју примену. У ситуацији када алгебарска топологија не буде давала одговор на питања потпуности, очекује се помоћ елементарне теорије бројева. Добро познавање линеарне алгебре ће такође бити од користи.

#### **5. Очекивани резултати и научни допринос**

Није тешко проверити да је за свако  $d \geq 1$ , сфера  $S^{d-1}$  симетричан Фробенијусов објекат у категорији чије су стрелице  $d$ -кобордизми. Лако се може проверити и да је за свако  $d \geq 2$ , сфера  $S^{d-1}$  комутативан Фробенијусов објекат у овој категорији. Према томе, када се димензија сфере повећа са 0 на 1, то резултира сужавањем класе симетричних на класу комутативних Фробенијусових објеката. Стога се природно поставља питање: да ли са новим повећањем димензије сфера добијамо нове класе Фробенијусових објеката? У предложеној дисертацији ће бити показано да је одговор на ово питање негативан. У односу на језик Фробенијусових објеката, нема разлике између сфера—почевши од димензије 1, све сфере су слободне од додатних једнакости које су формулисане на овом језику. Овај резултат потпуности биће значајан научни допринос повезивању логике, алгебре и топологије.

Један део истраживања биће посвећен сфери  $S^0$ , симетричном али некомутативном Фробенијусовом објекту, и класичном резултату Брауера о матричној репрезентацији једне класе дијаграматских алгебри, коју су уопштили Дошен и Петрић. Они су добили један веран симетрични моноидални функтор између категорије 1-кобордизама и категорије матрица, који називају брауеријанска репрезентација. У предложеној дисертацији ће бити показано да се свака 1-TQFT, која пресликава нулдимензионалну многострукост која се састоји од једне тачке у природан број већи од 2, поклапа са брауеријанским функтором до на множење инвертибилним матрицама. На тај начин ће бити могуће уопштити резултат верности брауеријанског функтора на све 1-TQFT.

Очекује се и конструкција комутативне Фробенијусове алгебре, која задовољава само оне једнакости на језику множења, јединице, комножења и којединице, које и дефинишу појам комутативне Фробенијусове алгебре. Овој алгебри ће одговарати 2-TQFT која је веран функтор. Добијени резултат ће имати како алгебарски, тако и тополошки значај у класификацији дводимензионалних кобордизама.

## 6. Оквирни списак литературе

1. L. ABRAMS, *Two-dimensional topological quantum field theories and Frobenius algebras*, *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, vol. 5 (1996), pp. 569-587
2. L. ABRAMS, *Modules, Comodules, and Cotensor Products over Frobenius Algebras*, *Journal of Algebra*, vol. 219 (1999), pp. 201-213
3. M. ATIYAH, *Topological quantum field theories*, *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.*, vol. 68 (1988), pp. 175-186
4. R. DIJKGRAAF, *A geometric approach to two dimensional conformal field theory*, Ph.D. Thesis, University of Utrecht, 1989
5. K. DOŠEN AND Z. PETRIĆ, *A Brauerian representation of split preorders*, *Mathematical Logic Quarterly*, vol. 49 (2003), pp. 579-586
6. K. DOŠEN AND Z. PETRIĆ, *Generality of proofs and its Brauerian representation*, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 68 (2003), pp. 740-750
7. K. DOŠEN AND Z. PETRIĆ, *Symmetric self-adjunctions: A justification of Brauer's representation of Brauer's algebras*, *Proceedings of the Conference "Contemporary Geometry and Related Topics"* (N. Bokan et al., editors), Faculty of Mathematics, Belgrade, 2006, pp. 177-187
8. K. DOŠEN AND Z. PETRIĆ, *Symmetric self-adjunctions and matrices*, *Algebra Colloquium*, vol. 19, (Spec 1) (2012), pp. 1051-1082
9. G. FROBENIUS, *Theorie der hyperkomplexen Grössen*, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, vol. 24 (1903), pp. 504-537; 634-645
10. J. KOCK, *Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003

## 7. Референце предложеног ментора, проф. др Зорана Петрића

- (1) Modal functional completeness (co-author: K. Došen), in *Proof Theory of Modal Logic*, H. Wansing ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1996), pp. 167-211
- (2) Isomorphic Objects in symmetric monoidal closed categories (co-author: K. Došen), *Mathematical Structures in Computer Science* vol. 7 (1997), pp. 639-662
- (3) Cartesian isomorphisms are symmetric monoidal: A justification of linear logic (co-author: K. Došen), *The Journal of Symbolic Logic* vol. 64 (1999), pp. 227-242
- (4) On permuting cut with contraction (co-authors: M. Borisavljević and K. Došen), *Mathematical Structures in Computer Science* vol.10 (2000), pp. 99-136, (arXiv:math/9911065)
- (5) The maximality of the typed lambda calculus and of cartesian closed categories (co-author: K. Došen), *Publications de l' Institut Mathematique*, tome 68 (82) (2000), pp. 1-19, (arXiv:math/9911073)
- (6) The maximality of cartesian categories (co-author: K. Došen), *Mathematical Logic Quarterly*, vol. 47 (2001), pp. 137-144, (arXiv:math/9911059)
- (7) Cut elimination in a category-like sequent system, in: A. Krapež, (ed.) *A Tribute to S.B. Prešić* (2001), pp. 73-78, Mathematical Institute, Belgrade
- (8) Пермутовање сечења и контракције (co-authors: M. Borisavljević and K. Došen), *10. Конгрес математичара Југославије*, Београд 2000, Резимеи, стр. 13.
- (9) The typed Bohm theorem (co-author: K. Došen), in: J.J. Levy et al. (eds.), *Proceedings of the Satellite Workshops of the 28<sup>th</sup> ICALP*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science 50(2001), no 2, pp. 119-131 (<http://www.elsevier.nl/locate/entcs/volume50.html>)
- (10) Coherent bicartesian and sesquicartesian categories (co-author: K. Došen), in: R. Kahle et al. (eds.), *Proof Theory in Computer Science*, Lecture Notes in Computer Science 2183 (2001), pp. 78-92 (arXiv:math/0006091)
- (11) Bicartesian coherence (co-author: K. Došen), *Studia Logica* vol. 71 (2002), pp. 331-353, (arXiv:math/0006052)
- (12) Kauffman monoids (co-authors: M. Borisavljević and K. Došen), *Journal of Knot Theory and its Ramifications* vol. 11 (2002), pp. 127-143, (arXiv:math/0008187)
- (13) Coherence in substructural categories, *Studia Logica* vol.70 (2002), pp. 271-96, (arXiv:math/0006061)
- (14) Generality of proofs and its Brauerian representation (co-author: K. Došen), *The Journal of Symbolic Logic* vol. 68 (2003), pp. 740-750, (arXiv:math/0211090)
- (15) Self-adjunctions and matrices (co-author: K. Došen), *Journal of Pure and Applied Algebra* 184 (2003), pp. 7-39, (arXiv:math/0111058)
- (16) G-dinaturality, *Annals of Pure and Applied Logic* 122 (2003), pp. 131-173, (arXiv:math/0012019)
- (17) A Brauerian representation of split preorders (co-author: K. Došen), *Mathematical Logic Quarterly* 49 (2003), pp. 579-586, (arXiv:math/0211277)
- (18) The geometry of self-adjunction (co-author: K. Došen), *Publications de l' Institut Mathematique*, 73 (87) (2003), pp. 1-29 (arXiv:math/GT.0111058)
- (19) Negation and Involutive Adjunction (co-author: K. Došen), *We Will Show Them*, Sergei N. Artëmov, Howard Barringer, Artur S. d'Avila Garcez, Luis C. Lamb, John Woods (eds.), Essays in Honour of Dov Gabbay on his 60<sup>th</sup> Birthday, vol. 1 (2005), pp. 577-585, College Publications, London, (arXiv:math/0506302)

- (20) A new proof of the faithfulness of Brauer's representation of Temperley-Lieb algebras (co-authors: K. Došen and Ž. Kovijanić), *International Journal of Algebra and Computation* 16, 5(2006), pp. 959-968 (arXiv:math/0204214)
- (21) Coherence of Proof-Net Categories (co-author: K. Došen), *Publications de l'Institut Mathématique*, tome 78 (92)(2005), pp. 1-33, (arXiv:math/0503301)
- (22) Coherence for Star-Autonomous Categories (co-author: K. Došen), *Annals of Pure and Applied Logic* 141 (2006), pp. 225-242, (arXiv:math/0503306)
- (23) Associativity as Commutativity (co-author: K. Došen), *The Journal of Symbolic Logic* 71, 1 (2006), pp. 217-226, (arXiv:math/0506600)
- (24) Symmetric self-adjunctions: A justification of Brauer's representation of Brauer's algebras (co-author: K. Došen), *Proceedings of CGRT 2005*, pp. 177-188, (arXiv:math/0512102)
- (25) Medial Commutativity (co-author: K. Došen), *Annals of Pure and Applied Logic* 146 (2007), pp. 237-255, (arXiv:math/0610934)
- (26) Coherence and Confluence (co-author: K. Došen), *Perspectives on Universal Logic*, Jean-Yves Béziau and Alexandre Costa-Leite (eds.), Polimetria, Monza, Italy (2007), pp. 205-215, (arXiv:math/0506310)
- (27) Relevant Categories and Partial Functions (co-author: K. Došen), *Publications de l'Institut Mathématique*, tome 82 (96)(2007), pp. 17-23, (arXiv:math/0504133)
- (28) Equality of Proofs for Linear Equality (co-author: K. Došen), *Archive for Mathematical Logic*, 47 (2008), pp. 549-565 (arXiv:math/0601490)
- (29) Bicartesian Coherence Revisited (co-author: K. Došen), *Logic in Computer Science*, Zoran Ognjanović (ed.), Zbornik radova 12 (20), Matematički institut SANU (2009), pp. 5-34 (arXiv:0711.4961)
- (30) Coherence in Linear Predicate Logic (co-author: K. Došen), *Annals of Pure and Applied Logic*, 158 (2009), pp. 125-153 (arXiv:0709.1421)
- (31) Coherence for Monoidal Endofunctors (co-author: K. Došen), *Mathematical Structures in Computer Science*, 20 (2010), pp. 523-543 (arXiv:0907.2194)
- (32) Coherence for Monoidal Monads and Comonads (co-author: K. Došen), *Mathematical Structures in Computer Science*, 20 (2010), pp. 545-561 (arXiv:0907.2199)
- (33) Coherence for Modalities (co-author: K. Došen), *Journal of Pure and Applied Algebra*, 215 (2011), pp. 1606-1628 (arXiv:0809.2494)
- (34) Hypergraph Polytopes (co-author: K. Došen), *Topology and its Applications*, 158 (2011), pp. 1405-1444 (arXiv:1010.5477)
- (35) Intermutation (co-author: K. Došen), *Applied Categorical Structures*, 20 (2012), pp. 43-95 (arXiv:math/0701325)
- (36) Isomorphic Formulae in Classical Propositional Logic (co-author: K. Došen), *Mathematical Logic Quarterly*, 58(2012), pp. 5-17 (arXiv:0912.1271)
- (37) Shuffles and Concatenations in Constructing of Graphs (co-author: K. Došen), *Mathematical Structures in Computer Science*, 22, Special Issue 06 (2012), pp. 904-930 (arXiv:1002.3577)
- (38) Symmetric Self-Adjunctions and Matrices (co-author: K. Došen), *Algebra Colloquium*, 19, No. spec01(2012), pp. 1051-1082 (arXiv:math/0510039)
- (39) Ordinals in Frobenius Monads (co-author: K. Došen), *Journal of Pure and Applied Algebra*, 217 (2013), pp. 763-778 (arXiv:0809.2495)
- (40) Syntax for Split Preorders (co-author: K. Došen), *Annals of Pure and Applied Logic*, 164 (2013), pp. 443-481 (arXiv:0902.0742)



- (41) Graphs of Plural Cuts (co-author: K. Došen), *Theoretical Computer Science*, 484(2013), pp. 41-55 (arXiv:1104.4064)
- (42) On Stretching the Interval Simplex-Permutohedron, *Journal of Algebraic Combinatorics*, 39 (2014), pp. 99-125 (arXiv:1106.3250)
- (43) Symmetric bimonoidal intermuting categories and  $\omega \times \omega$  reduced bar constructions (co-author: T. Trimble), *Applied Categorical Structures*, 22 (2014), pp.467-499 (arXiv:0906.2954)
- (44) Classifying spaces of monoidal categories (in Serbo-Croatian, co-author: S.Lj. Čukić), *Treća Matematička Konferencija Republike Srpske*, Zbornik radova I, Trebinje (2014), pp. 23-29
- (45) Segal's multisimplicial spaces, *Publications de l' Institut Mathematique*, tome 97 (111) (2015), pp. 11-21, (arXiv:1407.3914)
- (46) Weak Cat-Operads (co-author: K. Došen), *Logical Methods in Computer Science*, 11 (2015), pp. 1–23, (arXiv:1005.4633)
- (47) Monoids, Segal's condition and bisimplicial spaces, *Četvrta Matematička Konferencija Republike Srpske*, Zbornik radova I, Trebinje (2015), pp. 7-16(arXiv:1505.05010)
- (48) 270 Minutes on Categorical Proof Theory, *Logic in Computer Science*, Silvia Ghilezan (ed.), Zbornik radova 18 (26), Matematički institut SANU (2015), pp. 7-35
- (49) A Planarity Criterion for Graphs (co-author: K. Došen), *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 29(4) (2015), pp. 2160–2165 (arXiv:1203.0996)
- (50) Representing conjunctive deductions by disjunctive deductions, (co-author: K. Došen), *The Review of Symbolic Logic*, 10 (2017), pp. 145-157 (arXiv:1511.05462)
- (51) A note on semisymmetry (co-author: A. Krapež), *Quasigroups and Related Systems*, (2017), 269-278 (arXiv:1507.02149)
- (52) The n-fold reduced bar construction (co-author: S.Lj. Čukić), *Journal of Homotopy and Related Structures*, 13 (2018), pp.503-543 (arXiv:1309.6209)
- (53) Spheres as Frobenius objects (co-authors: Dj. Baralić and S. Telebaković), *Theory and Applications of Categories*, 33 (2018), pp.691-726 (arXiv:1609.03979)

## 8. Закључак

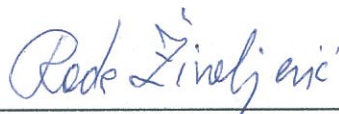
Предложена тема се налази у области истраживања значајних за алгебру, логику, топологију и математичку физику. Веома је савремена и очекује се да ће добијени резултати имати одјека у тим областима. Кандидаткиња има три објављена рада, од којих је један директно повезан са предложеном темом дисертације, док су два рада посвећена овој теми на рецензији.

Стога предлагемо Наставно-научном већу Математичког факултета да донесе одлуку о прихватању теме докторске дисертације Соње Телебаковић Онић „Фробенијусове алгебре и тополошке квантне теорије поља“ и одлуку о одређивању проф. др Зорана Петрића за ментора.

У Београду, 8. јула 2019. године

## КОМИСИЈА

Председник комисије:



проф. др Раде Живаљевић,

научни саветник, Математички институт САНУ, Београд

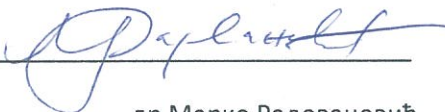
редовни професор, Физички факултет Универзитета у Београду

Чланови комисије:



проф. др Александар Липковски,

редовни професор, Математички факултет Универзитета у Београду



др Марко Радовановић,

доцент, Математички факултет Универзитета у Београду



др Ђорђе Баралић,

научни сарадник, Математички институт САНУ, Београд