УЧИТЕЉСКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Стратегије множења у функцији развоја мултипликативног мишљења

(Пројекат докторске дисертације)

Ментор:

проф. др Маријана Зељић

Студент:

Ивана Веселиновић 3003/2018

Београд, јануар 2022.

БИОГРАФИЈА

Ивана Веселиновић је рођена 25.9.1994. године у Бегораду. Основну школу и средњу економску школу „Нада Димић завршила је у Београду. Основне студије на Учитељском факултету у Београду, смер за образовање учитеља, уписала је школске 2013/2014. године и завршила их 2017. године са просечном оценом 9,60. Након тога, 2017/2018. године, уписала је мастер студије на истом факултету, које је завршила 2018. године са просечном оценом 9,67 и одбранила мастер рад на тему Начини разумевања разломака од стране ученика четвртог разреда. Тренутно ради у Основној школи „Бранко Радичевић у Новом Београду.

Докторске студије на смеру Методика наставе математике на Учитељском факултету уписује 2018. године. Током студирања учествовала је на Међународном научном скупу „Савремени приступи у професионалном развоју и раду васпитача и учитеља (2018) где је презентовала рад на тему Начини разумевања разломака у почетној настави математике и на 24. Међународном округлом столу о даровитости „Достигнућа и перспективе у образовању даровитих (2018) на тему Утицај различитих наставних стратегија и контекста учења на развој математичке даровитости деце нижег школског узраста, а рад је објављен у зборнику са поменуте конференције. Објавила је и следеће радове:

1. Начини разумевања разломака у почетној настави математике. *Методичка теорија и пракса,* XVIII, број 1/2018, 31–44;
2. Математичке активности у функцији развоја почетних геометријских појмова. *Методичка теорија и пракса,* XIX, број 1/2019, 21–30.
3. Разумевање разломака ученика четвртог разреда основне школе. *Норма,* XXV, 2/2020, 217–239.

САДРЖАЈ

УВОД 3

I ТЕОРИЈСКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА 7

1. Алгоритамски и креативни приступ настави математике 7

1.1. Алгоритамско и креативно математичко резоновање 7

1.2. Концептуално разумевање појма броја 9

1.3. Ментална аритметика и стандардни алгоритми рачунања 13

2. Множење једноцифрених бројева 19

2.1. Мултипликативно мишљење 19

2.2. Значење операције множења 24

2.3. Семантичка структура текстуалних задатака множења 26

2.4. Менталне стратегије множења 32

2.5. Значај, улога и врста репрезентација у обради множења једноцифреним бројем ... 41

2.6. Значај и улога аритметичких правила за разумевање стратегија множења једноцифреним бројем 46

II МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА 51

1. Предмет истраживања 51

2. Циљ и задаци истраживања 55

3. Варијабле у истраживању 58

4. Методе, технике и инструменти истраживања 58

5. Структура и садржај тестова знања 58

6. Узорак истраживања 61

7. Организација и ток истраживања 61

Литература: 62

УВОД

У последњих неколико деценија пажња истраживачке заједнице усмерена је на уочавање проблема који се односе на разумевање значења операција и стратегија рачунања, као и проналажење начина решавања уочених проблема (Pesek and Kirshner, 2000; Hiebert, 2003; Anghileri, 2000b). Стандардни алгоритам рачунања се дефинише као низ појединачних корака који су правилно и стриктно одређени, при чему је тачан резултат очекиван (Zeljić, Dabić Boričić and Đokić, 2019), а у педагошкој пракси у Србији се најчешће користи термин поступак рачунања. Уколико се стандардни алгоритам уводи постепено уз инсистирање на разумевању значења операције, као и сваког корака у алгоритму може се говорити о учењу алгоритма са разумевањем. С обзиром на недостатке стандардног алгоритма, пре свега учење алгоритма напамет, све више се тежи креативном приступу настави математике, који подразумева лично проналажење продуктивних решења независно од способности ученика (Ervynck, 1991). Трагање за таквим решењима подразумева способност ученика да математичке задатке реши тачно и ефикасно уз употребу одговарајућих стратегија и репрезентација (Baroody & Dowker, 2003; Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007), што се у литератури дефинише као флексибилност и адаптивност.

Рачунање применом стандардних алгоритама најчешће захтева коришћење папира и оловке за рачунање, а често је потребно извршити усмено рачунање које ствара тешкоће, јер не разумеју значење операције и бројеве. Све значајније место у настави математике заузима ментално рачунање, које подстиче развој вештина решавања проблема, развија способност процене и доприноси концептуалном разумевању броју. Главне карактеристике менталног рачунања су: рачунање са бројевима, а не цифрама, постојање више могућих поступака рачунања и мање ослањање на писане записе (Linsen et al., 2015). У литератури је најчешће фокус на испитивање следећих поступака рачунања: стандардни алгоритам, подстицање развоја менталних интуитивних стратегија и менталне стратегије које су резултат подучавања (Kamii, 1994; Mulligan and Mitchelmore, 1997; Sherin and Fuson 2005; Downton and Sullivan, 2017).

У бројним истраживањима документоване су тешкоће при учењу множења (Baroody, 2006; Downton, 2008 и др.). Прелазак са адитивног на мултипликативно

мишљење је важно питање којим су се бавили многи истрживачи (Vergnaud, 1983; Clark and Kamii, 1996; Bakkeretal., 2014 и др.). Адитивно мишљење подразумева разумевање бројева у контексту „део−део−целина и најчешће се везује се за разумевање и извођење операција сабирања и одузимања без примене алгоритма (FennemaandCarpenter, 1992; MilolaandStephens, 2020), док мултипликативно мишљење обухвата флексибилно и ефикасно рачунања производа или количника бројева применом различитих стратегија множења и дељења, препознавање и представљање различитих мултипликативних ситуација (Siemon, BreedandVirgona, 2005). Развој мултипликативног мишљења се одвија постепено и утиче на развој других математичких појмова.

Множење једноцифрених бројева обухвата четири важне теме, а то су: репрезентације множења, семантичка структура задатка, менталне интуитивне стратегије, стандардни алгоритми и флексибилна и адаптивна примена стратегија које омогућавају ефикасно и тачно одређивање производа (Sherin and Fuson, 2005: 348).

У литератури се издвајају следеће семантичке структуре текстуалних задатака који се односе на множење: једнакобројне групе, однос мерљивих величина, мултипликативно поређење, пропорција, правоугаоне схеме и Декартов производ (Greer, 1992), једнакобројне групе која се ослања на посматрање множења као поновљеног сабирања (Fischbein et al., 1985; Izsak, 2004, Watanbe, 2003), који не ствара довољну основу за развој мултипликативног мишљења. Истраживања су показала да структура текстуалних задатака утичу на избор стратегија и репрезентација које ће ученици користити (Muliligan and Mitchelmore, 1997; Larsson, 2017), као и да ученици успешно решавају задатке множења различите семантичке структуре пре формалне обраде множења (Muliligan and Mitchelmore, 1997; Marojoke and Beker, 2014).

Менталне стратегија множења можемо поделити у две групе: менталне инутитивне стратегије и менталне стратегије које су резултат подучавања. Менталне интуитивне стратегије се дефинишу као интерне менталне структуре које одговарају класи стратегија рачунања, те постоји директна веза између стратегија рачунања и семантичке структуре задатка (Mulligan and Mitchelmore, 1997). Уколико се стратегије заснивају на примени аритметичких правила или репрезентација реч је о менталним стратегијама које су резултат подучавања (Bruner, 1960; Carpenter et al., 2003). Истраживања показују да је поучавање деце стратегијама менталног рачунања ефикасније од прекомерног понављања алгоритма (Baroody, 1985; Smith and Smith, 2006; Woodward, 2006), као и да ученици ефикасно рачунају користећи менталне

интуитивне стратегије за множење вишецифрених бројева пре увођења формалних инструкција (Carpenter et al., 1993; Baek, 1998; Ambose et al., 2003). На основу различитих истраживања издвајамо следеће стратегије множења: стратегије пребројавања, поновљено сабирање, дуплирање, мултипликативне стратегије које се заснивају на примени познатих производа и неке од претходних стратегије, стратегије засноване на процени и примени аритметичких правила (Kouba, 1989; Mulligan and Mitchelmore, 1997; Sherin and Fuson, 2005; Downton and Sullivan, 2017). Развој стратегија се одвија постепено, а њихов избор је условљен семантичком структуром задатка, заступљеним стратегијама у настави, бројевима у задатку и репрезентацијама које се користе у задатку (Sherin and Fuson, 2005, Downton and Sullivan, 2017).

Употреба различитих репрезентација за представљање множења доприноси разумевању различитих значења множења и развоја стратегија множења. У нашем раду обухватићемо две врсте репрезентација множења: правоугаоне схеме и репрезентације са декадном основом. Представљање множења преко правоугаоне схеме је кључно за развој мултипликативног мишљења, јер омогућава представљање задатака различите семантичких структура и подстиче развој различитих стратегија рачунања (Siemon et al., 2011; Young-Loveridge, 2005; Jacob and Mulligan, 2014). Репрезентације са декадном основом су блиске нашем Наставном плану и програму, јер се скуп бројева до 10 се упознаје кроз ове репрезентације. У овом случају акценат се ставља на десетице, што је важно за разумевање стандардног алгоритма за множење двоцифрених бројева (Марјановић, 1997).

Неке стратегије множења се развијају на основу научених правила аритметике, док неки аутори наводе да се аритметичка правила инуитивно развијају кроз развој стратегија множења (Larsson, 2015; Ambrose et al., 2003). Без обзира који је приступ заступљен у настави, треба тежити постизању концептуалног раумевања аритметичких правила, која се користе и значајна су за многобројне математичке садржаје, нарочито за аримтетичке операције и развој ефикасних стратегија рачунања.

У нашем раду приказаћемо на који начин различити приступи обради множења једноцифреног броја утичу на развој стратегија множења, значења операције множења и уопште на развој мултипликативног мишљења. Сматрајући да разумевање множења као једнакобројних група, инсистирање на разумевању множења као поновљеног сабирања и учење таблице множења напамет не доприноси разумевању значења операције множења, које је кључно за разумевање и других математичких садржаја (пропоција, однос мерљивих величина и сл.) развили смо два модела обраде множења

једноцифреним бројевима. Први модел се заснива на примени аритметичких правила и развоју стратегија које се темеље на аритметичким правилима. Други модел обухвата обраду множења једноцифрених бројева заснованих на значењу операције множења и примени репрезентација. Циљ овог рада јесте утврђивање и анализирање ефеката Модела на развој менталних стратегија множења и мултипликативног мишљења. Нашим истраживањем проверићемо и да ли се врши трансфер знања стечених на овај начин на множење двоцифреним бројевима и дељење у скупу бројева до 100.

Развој мултипликативног мишљења је важан задатак наставе математике у млађим разредима, те сматрамо да је битно подићи свест о значају концептуалног разумевања значења операције множења и развоја стратегија менталног рачунања, које доприносе флексибилном и ефикасном рачунању.

I ТЕОРИЈСКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА

1. Алгоритамски и креативни приступ настави математике

1.1. Алгоритамско и креативно математичко резоновање

Настава математике у млађим разредима основне школе треба да буде усмерена на развој математичких компетенција кроз концептуално разумевање математичких садражаја који се усвајају. Често се обрада одређених математичких појмова своди на усвајање правила и процедура без концептуалног разумевања истих (Hiebert, 2003). Знања стечена на тај начин су краткотрајна и не стварају основу за трансфер знања и повезивање математичких садржаја, који се логички кроз основну и средњу школу надовезују и проширују.

У математици алгоритам се односи на низ поступака у рачунању. Може се дефинисати као низ појединачних корака који се спроводе у циљу решавања задатака (Anderson et al., 2007). Употреба алгоритама у настави омогућава брзо и поуздано планукоришћења алгоритма су транспарентност, ефикасност, општост, прецизност и једноставност (Kilpatrick et al., 2001). С друге стране, учење засновано на алгоритмима може бити веома тешкои кочница за развој концептуалног разумевање значења алгоритма (Pesek and Kirshner, 2000), јер је оно резултат механичког учења (Hiebert, 2003). Многи наставни планови и програми, као и уџбеници који се користе у настави математике акценат стављају на учење стандардних алгоритама (Brayer Ebby, 2005). С друге стране, Национални савет наставника математике (NCTM, 2000) наводи да су стандардни алгротими рачунских операција само средство за постизање брзине и тачности у решавању задатака, али уз разумевање значења операција и бројева. Наставним планом и програмом у Србији предвиђена је употреба усмених поступака рачунања уз записивање израза, али и усмено рачунање без записивање до трећег разреда. У трећем разреду се уводе стандардни алгоритми, односно писмени поступци рачунања који се изводе кроз записивање бројева у форми збира вишеструких декадних јединица, коришћење таблице месних вредности и скраћено, кроз потписивање у циљу разумевања значења стандардног алгоритма. Тешкоће у разумевању алгоритама се јављају као последица неразумевања броја и значења месне вредности цифре у броју што је од суштинске важности за разумевање значења алгоритма. Како би се избегло наведено, усвајање алгоритма треба да буде последица

разумевања значења операције и примене низа стратегија рачунања, чиме се истиче значење сваког корака алгоритма.

Насупрот алгоритамском приступу учењу, истиче се креативни присту настави математике. У данашње време креативност се посматра као стварање нечег новог и корисног. Деца су природна креативна бића, те њихову креативност треба подстицати и развијати, јер само креативни људи могу створити нешто нове и донети одговарајуће одлуке у неочекиваним ситуацијама. Природа математика као науке и наставног предмета у школи је веома погодна за подстицање и развој креативности. Математичка креативност се односи на откривање непознатих веза између математичких појмова, обраду математичких појмова и решавање задатака на другачији начин, као и откривање нечег новог у математичким идејама које су већ познате (Nadjafikhah et al., 2012: 290). Према Ервинку (Ervynck, 1991), математичка креативност обухвата индивидуално проналажење флексибилног и ефикасног решења независно од математичких способности ученика уз способност прилагођавања проблему и примене дедукције у закључивању. Силвер и Ервинк (Silver and Ervynck, 1991) истичу да математичка креативност обухвата способност решавања и постављања проблема на различите начине, уз стварање нових, оригиналних и иновативних решења. Слично њима, и други аутори посматрају математичку креативност као проналажаење оригиналног решења проблема ипосматрање познатих проблема из нове перспективе (Sriraman and Liljedahl, 2006), као и формирање нових знања уз флексибилно решавања проблема (Kwon, Park and Park, 2006). У складу са тим Срираман (Sriraman, 2006) истиче да математичка креативност представља процес проналажења нових и необичних решења проблема с једне стране, док се сдруге стране односи на формулисање нових питања, који подстичу посматрање датог проблема на другачији начин. Лајкок (Laycock, 1970) дефинише математичку креативност као способност анализирања датог проблема из различитих перспектива, проналажење одређених образаца, сличности и разлика и бирање различитих начина решавања уз избор најприкладније метода за решавање непознатог проблема. У поређењу са алгоритамским учењемпримена креативног математичког резоновања утиче на ефикасније и квалитетније формирање знања и концептуално разумевање математичких појмова (Jonsson et al., 2014). Може се закључити да креативно математичко резоновање обухвата:

1. Креативност: нови начини резоновања или продубљивање већ постојећег начина резоновања;

2. Веродостојност: изношење аргумената који подупиру одабир одговарајуће стратегије;
3. Аргументе који су утемељени у математичким својставима која су укључена у решавање проблема (Lithner, 2008).

Треба истаћи да се математичка креативност мери преко флексибилности, флуентности и оригиналности одговора ученика на постављен проблем (Mihajlović, 2012).

Развој математичке креативности се најбоље подстиче решавањем нестандардних математичких проблема задатака отвореног типа, јер се на тај начин ученици суочавају са новим, непознатим ситуацијама. Овакве ситуације подстичу концептуално разумевање и развој дечије креативности која доводи до нових математичких идеја (Aizikovitsh Udi, 2014: 229). Како би ученици развили математичку креативност потребно је да самостално истражују, претпостављају, испитују, прилагођавају стратегије, осмишљавају нове стратегије и праве план решавања проблема, закључују, образлажу своје закључке и сл. (Nadjafikhah et al., 2012: 289).

Развијање математичке креативност подстиче и развој флексибилности. Проналажењем различитих начина решавања, анализирањем проблема из различитих перспектива ученици развијају нове идеје и оспособљавају се за различито посматрање математичких садржаја и прилагођавање стратегија решавања карактеристикама задатог проблема, што је основа за развој флексибилности у рачунању. Знања које се стичу кроз активан рад ученика и захтевају мисаону ангажованост у проналажењу решења су основа за развој концептуалног разумевање математичких појмова.

1.2. Концептуално разумевање појма броја

Најзаступљенија подела математичкогзнањајепрема Скемповој теорији. Он разликује инструментално и релационоразумевање. Инструментално разумевање подразумева знање правила и чињеница,просту примену истих и увежбавање научених правила, докрелационо разумевање подразумева да је ученик у стању да вешто барата сапојмовима користећи њихова својства и међусобне релације између њих и успешно ихпримењује у новим и сложенијим ситуацијама(Skemp, 1993: 10). Насупрот овим појмовима, често се говори о концептуалном и процедуралном знању (Hiebert, 2003).

Знања која се повезују током изучавања Хиберт (Hiebert, 2003)назива концептуалним знањима,под којима се подразумева разумевање концепата и односа међу њима и применапроцедура (Zeljić i Dabić, 2014; Kilpatrick, Swafford i Findell 2001; Rittle-Johnson andSchneider 2015). Основна одлика концептуалног знања јесте повезаност знања, а топодразумева да сваки појам настаје из других појмова и доприноси формирањуследећих појмова. За ова знања су битна сва знања са којима су се ученици некада инегде срели. Насупрот концептуалном знању јављасе процедурално знање, које се односи на учење готових дефиниција, процедура,симбола, без претходног осмишљавања значења појмова и поседовање знања о начинукоришћења и флексибилног извршавања процедура, како би се проблем тачно иефикасно решио (Zeljić i Dabić, 2014; Kilpatrick, Swafford i Findell 2001; Rittle-Johnsonand Schneider 2015). Процес учења математичког садржаја треба да се заснива на интеграцији процедуралног и концептуалног знања, односно на уопштавању процедуралних поступака које води формирању система знања у коме су знања хијерархијски организована и повезана (Baroody et al., 2007; Schneider & Stern, 2009). Ученикетреба оспособити да решавајузадатке употребом алгоритама, али уз разумевање истих.

Флексибилност и адаптивност су важни аспекти математичког знања и основа за разумевање процедуралних знања. Решавање математичких задатака не подразумева само брзину и тачност, већ захтева способност решавања математичких задатака флексибилном употребом различитих стратегија и репрезентација у зависности од личности појединца, типа и карактеристике задатка (Baroody & Dowker, 2003; Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007). Процедурална флуентност дефинисана је као способност примене процедура флексибилно, тачно и ефикасно, уз могућност препознавањаи избора одговарајућестратегије у зависности од проблема (NCTM, 2014).

Флексибилност и адаптивност се често посматрају као синоними, те их већина аутора на тај начин и дефинише. Флексибилност и адаптивност се могу дефинисати као познавање и разумевање различитих стратегија, при чему се бирајунајприкладније за дати проблем (Rittle-Johnson, Star and Durkin, 2012; Star and Newton, 2009; Verschaffel et al. 2009 R89, Rathgeb-Schnierer & Green, 2013; Verschaffel et al., 2009). Када је реч о извођењу рачунских операција, флексибилност се односи на анализирање стратегија, адекватан избор и разумевање коришћених стратегија рачунања уз акценат на оне које омогућавају брзо, тачно и ефикасно рачунање. Уопштено гледано, флексибилно и адаптивно коришћење стратегија

подразумевасвестан или несвестан избор и употребу најприкладнијих стратегија рачунања у зависности од типа и контекста задатка, као и појединца (Vetschaffel, Luwel, Torbeyns and Van Dooren, 2009: 343 R87). Насупрот овом ставу, други аутори (Heinze, Star and Verschaffel, 2009) наведене појмове посматрају одвојено. Према њиховом мишљењу, флексибилност се односи на избор између различитих стратегија, али тај избор не подразумва нужно употребу најприкладније стратегије, док адаптивност подразумева избора и употребу најприкладније стратегије (Heinze, Star and Verschaffel, 2009: 536). Употреба и избор ефикасних стратегија је основа за успешно решавање задатака и уопште за концептуално разумевање математичких појмова.

На основу различитих дефиниција, под флексибилношћу и адаптивношћу ћемо подразумевати разумевање различитих стратегија решавања задатака и избор најприкладније стратегије која појединцу омогућава брзо, тачно и ефикасно решавање задатка.

Различити аутори под флексибилним и адаптивним избором стратегија подразумевају следеће:

1. Прикладан избор стратегије условљен контекстом задатка (Blöte et al. 2000; Klein et al. 1998; Star and Newton2009);
2. Брзина и тачност у решавању задатка (Torbeyns et al. 2009);
3. Бирање стратегија на основу бројева у задатку, односно коришћење знања о бројевима и аритметичким својствима за решавање задатка, као и активирање свих претходних знања ученика (Threlfall 2002).

Разумевање флексибилног избора стратегија је најшире обухваћено трећим приступом, јер оно повезује индвидуална знања појединца и карактеристике задатка. Уопштено гледно, флексибилност у рачунању подразумева успостављање везе између карактеристика проблема, бројева у задатку и разумевању везе између бројева и аритметичке операције коју захтева задатак. Наведене компоненте су показатељи развијене флексибилност у менталном рачунању (Rathgeb-Schnierer and Green, 2013).

Флексибилан избор стратегија рачунања захтева познавање својстава аритметичких операција, али и концептуално разумевање броја, које омогућава разумевање структуре броја, односа између бројева и извођење аритметичких операција применом стратегија које се заснивају на карактеристикама броја (Bobis, 1996). Концептуално разумевање броја се развија постепено и оно подразумева разумевање значења броја и његове структуре, упостављање веза између бројева,

флексибилно извођење аритметичких операција и ствара основу за ментално рачунање. Разумевање значења броја обухвата следеће претпоставке:

- коришћење различитих репрезентација бројева,
- идентификовање релативне и апсолутне величине бројева,
- употребу више различитих јединица пребројавања,
- састављање и разлагање бројева,
- концептуално разумевање операција,
- процену величине,
- ментални рачун, и
- расуђивање о тачности резултата (Verschaffel et al. 2007).

Приликом формирања скупа бројева до 10 у првим разредима основне школе потребно је инсистирати на употреби различитих репрезентација, модела и манипулативних материјала у циљу представљања бројева на различите начине, чиме се утиче на разумевање структуре бројева. Представљањем бројева на различите начине утиче се на развој бројних стратегија бројања које нису ограничене само на просто пребројавање (Presmeg, 1986, Mason, 1992), већ имају адитивни карактер, а деца се временом оспособљавају да уоче бројност скупа елемената без пребројавања што је основа за развој различитих менталних стратегија рачунања. Концептуално разумевање бројева је од суштинске важност за следеће математичке садржаје:

- ментално рачунање (Hope and Sherrill, 1987; Trafton, 1992);
- стицање и развијање способности процене (Bobis,1991),
- разумевање релативне вредности броја (Sowder, 1988);
- препознавање односа дела и целине и разумевање месне вредности цифара у броју (Fischer, 1990; Ross, 1989);
- решавање проблема (Cobb et al., 1991).

Разумевање структуре броја је значајно за разумевање месне вредности цифре. Број треба посматратити као структуру састављену од мањих структура, што подразумева способност растављање бројева на различите начине. Како би се постигло наведено потребно је да се ради на развијању способности растављања и састављања бројева у делове и целину (Wright et al. 2012: 4). У настави је потребно спроводити активности којима се ученицима даје прилика да истраже и открију везе и обрасце између бројева (Baroody, 2006: 29). Фусон (Fuson et al., 1997) истиче да када деца савладају вишецифрене бројеве треба да буду оспособљена да разумеју број као збир вишеструких декадних јединица и као производ једноцифреног броја и одговарајуће

декадне јединице. У циљу испитивања разумевања месне вредности цифре Доналд и други аутори (Donald et al.) су користили различите типове задатака: бројање, груписање од 10, декомпозиција, прегруписавање, веза између месне вредности цифре и броја и поређење бројева. На основу резултата установљено је да деца имају потешкоћа са вишецифреним бројевима у одсуству конкретног материјала, односно да не разумеју месну вредност цифара у тим бројевима (Donald et al.), што је у складу са ранијим истраживањима (Fuson et al, 1997), а потврђује значај коришћења конкретних материјала приликом формирања скупа природних бројева (Vright et al, 2012). Разумевања односа између десетица и јединица или других декадних јединица је важно за разумевање „дописивања или прецртавања нула при рачунским операцијама множење и дељење. Битно је напоменути да је у различитим земљама другачији приступ аритметичким операцијама условљен и различитом приступом бројевима. У Енглеској разумевање броја се темељи на разумевању месне вредности цифре, а након тога се почиње са аритметичким операција (SCAA, 1997) које се заснивају на примени алгоритма. Насупрот томе, у Холандији се разумевање броја и месне вредности цифре развија постепено кроз извођење аритметичких операција и употребу различитих стратегија рачунања, односно различтих менталних модела (Beishuizen and Anghileri, 1998; Thompson, 1997), чиме се акценат ставља на структуру броја.

Сви аритметички садржаји су повезани и представљају корак ка увођењу и разумевању алгебре. Како би ученици развили математичку флексибилност, која је посебно важна за аритметичке операције потребно је подстицати креативан приступ математичким садржајима од најранијих узраста. То подразумева употребу конкретних модела, цртежа и дијаграма који мисаоно ангажују децу и подстичу их да проблем посматрају на различите начине. Даље, важан аспект развоја алгебарског мишљења јесте и формирање појма броја. При формирању појма броја акценат треба ставити на његову структуру која ће се представљати кроз репрезентације засноване на декадној основи, али и кроз друге репрезентације које истичу структуру броја.

1.3. Ментална аритметика и стандардни алгоритми рачунања

Поступци рачунања и тачност и ефикасност у рачунању важне су теме математичког образовања. У математици алгоритам се односи на низ писаних корака у

рачунању. Може се дефинисати као низ појединачних корака који су правилно и стриктно одређени, при чему је тачан резултат очекиван (Zeljić, Dabić Boričić and Đokić, 2019). Извођење стандардног алгоритма се темељи на растављању бројева на вишеструке декадне јединице у циљу једноставнијег извршавања рачунских операција, што заправо представља једну врсту цифарског рачунања (Fuson and Beckmann, 2012). Ови аутори (Fuson and Beckmann) наглашавају да је у прошлости учење стандардног алгортима посматрано као усвајање тачног редоследа поступака који су се изводили без разумевања и објашњавања истих. Овакво схватање алгоритама подразумева да се свако рачунање своди на растављање бројева на десетице и јединице, што подразумева познавање и разумевање месне вредности цифре у бројевима и механичко извођење операција, без стављања акцента на структуру броја, односно свака цифра у броју се посматра као посебна целина (Kamii, 1994; McNeal, 1995). У наставној праксе се често тежи увежбавању стандардних алгоритама рачунања, како би се постигла тачност и брзину у решавању, што је пример процедуралног разумевања, при чему недостаје разумевање значења алгоритма и аритметичке операције.Овако стечена знање онемогућавају флексибилно решавање задатака и повезивање различитих репрезентација и математичких садржаја (Anghileri, 1995; Siemon, Breed and Virgona, 2008). Цифарско рачунање, односно примена стандардног алгоритма писменог рачунања није погодна без употребе папира и оловке и због тога се често јављају грешке, те истраживања (Илић и Зељић, 2017; Зељић и др., 2017) показују да успешност коришћења стандардних алгоритама значајно опада када се рачунање врши без записивања, што је показатељ одуства процедуралне флуентности (Kilpatrick et al., 2001; Torbeyns et al., 2009). Стандардни алгоритми могу бити веома тешки за учење и не омогућавају развој релационог разумевање (Pesek and Kirshner, 2000). Увођење стандардног алгоритма обезбеђује много формалније структуре и погодно је за ставарње грешака, јер је у супротности са интуитивним стратегијама рачунања (Anghileri, 2000). Сличан став заступају и други аутори, који наводе да учење стандардних алгоритама обезбеђује брзо и ефикасно рачунање, али без јасног приказивања и разумевања значења појединачних корака алгоритма (Ellis and Yeh, 2008). Насупрот мишљењу наведених аутора, Фусон и Бекман (Fuson and Beckmann, 2012) наглашавају да се стандардни алгоритми рачунских операција генерализују временом кроз постепено развијање значења алгоритама употребом репрезентација које се постпено напуштају и прелази се на симболичке записе. Концептуално разумевање алгоритма постиже се употребом различитих репрезентација (нпр.

правоугаона схема) које наглашавају значење алгоритма, примера из реалног окружења, као и менталних стратегија које ученици самостално или уз помоћ наставника развијају (Baroody, 1990; Fuson, 190, Resnick, 1983; Verchaffel, Greer and De Corte, 2007).При учењу стандардних алгоритама потребно је да ученици разумеју значење и улогу месна вредност цифре у броју при извођењу алгоритма, растављање бројева на збир прозвода вишеструких декадних јединица, као и својства одређене рачунске операције.

Традционално учење наставе математике, пре свега учење стандардних алгоритама рачунских операција све више замењује неалгоритамски приступ, односно примена менталне аритметике, која се темељи на релационом разумевању математичких појмова, пре свега аритметичких операција и бројева. Ментално рачунање је процес у којем нумерички рачун може бити изведен брзо и прецизно уз коришћење одређених стратегија рачунања (Maclellan, 2001). Даље, оно је важно средство у промовисању математичког мишљења, при чему се базира на концептуалном разумевању, а не на учењу правила и инструкција напамет (Reys and Barger, 1994:31). Ментално рачунање се може посматрати као низ активности чији се развој подстиче током школовања, а његова сврха према Томпсону (Thompson, 1999) је:

- Оспособљавање ученика за ментално рачунање изван наставног процеса;
- Развој бројевног система, односно осетљивости за број;
- Оспособљавање ученике за решавање проблемских задатака;
- Стварање основе за учење алгоритма са разумевањем.

Према Томпсону (Thompson, 1999), ментално рачунање се односи на примену стратегија које се заснивају на примени познатих чињеница или стратегија брзог рачунања, а оне су засноване на употреби специфичних својстава бројева. Основна карактеристика менталног рачунања јесте стратешка флексибилност које подразумева флексибилно прилагођавање структури проблема (Verschaffel et al., 2010; Blöte et al., 2001) За разлику од алгоритамског приступа менталне стратегије карактерише рачунање са бројевима, а не цифрама, постојање неколико различитих исправних поступака рачунања, бројеви се обично налазе у хоризонталном запису и мање ослањање на писане записе (Linsen et al., 2015). Менталне стратегије се развијају на темељу претходних знања ученика, али доприносе и развоју осталих математичких идеја, као што је разумевање месне вредности цифре, односно растављање бројева на десетице и јединице, што су потврдили и бројни аутори (Carpenter et al., 1996; Cobb &

Wheatley, 1988; Fuson, 1990). Оне подразумевају ефикасно и флексибилно рачунање засновано на разумевању карактеристика бројева, аритемтичких операција и развијеном осећају за бројеве (Verschaffel et al., 2007). Најчешће служе као олакшице у рачуну, могу да убразају рачунање и у неким примерима је погоднија њихова примена у односу на коришћење стандардних алгоритама (Илић и Зељић, 2017). Менталне стратегије доприносе развијању интуитивних модела рачунања и стварају основу за разумевање значења стандрадног алгоритама. Оне су показатељ разумевања значења броја, концептуалног разумевања декадног система и рачунских операција, па ученици који поседују то разумевање бирају стратегије менталне рачунања (Зељић и др., 2017). Интуитивне стратегије рачунања које се постепено развијају омогућавају тачно решавања сложенијих математичких проблема истичући специфичне карактеристике проблем, више него у ситуацијама када се користе наметунити модели (Mulligan and Watson, 1998).

Може се закључити да ментално рачунање представља „откривање и примену стратегија прикладних за одређени пробем, базираних на разумевању основних карактеристика бројевног система и аритметичких операција (Verschaffel and De Corte, 1996: 120). Ментално рачунање подразумева прилагођавање стратегија структури задатка (Зељић и др., 2017). Флексибилно ментално рачунање се посматра као индивидуална, субјективна реакција на одређени проблем при чему се успоставља веза између постојећих знања и конкретних карактеристика проблема, што зависе и од искуства ученика (Threlfall, 2006). Истраживања су показала да деца рачунају на основу познатих чињеница и на њима темеље примену нових стратегија. Заступљеност стандардних алгоритама у настави подстиче њихово коришћење без разумевања и у случајевима када деца поседују боље менталне стратегије (Cooper, Heirdsfield and Irons, 1996). Овакви налази истраживања аутора показују да прерано увођење и инсистирање на употреби стандардног алгоритма ограничава развој дечијих менталних стратегија и концептуално разумевање аритметичких операција. Инсистирање на брзој употреби алгоритма подстиче учење напамет, које гуши дечију математичку креативност, а она је нопходна за учење математике са разумевањем.

Без обзира која је аритметичка операција у питању дечији развој стратегија рачунања према Барудију (Baroody, 2006) прати кретање кроз три фазе, а то су:

1. Стратегије пребројавања употребом прстију, конкретних објеката или реторички уз именовање сваког елемента;

2. Стратегије резоновања засноване на коришћењу познатих чињеница у циљу одређивања непознатих чињеница;
3. Ефикасне стратегије које карактерише брзина и флексибилност.

Менталне стратегије рачунања подразумевају ментално рачунање које прати низ акција и радњи које су смислене и могу се објаснити и поновити, јер су чин свесних активности, које прати мисаона ангажованост (Threlfall, 1998: 75). Потребно је истаћи разлику између менталних интуитивних стратегија и менталних научених стратегија. Прве стратегије ученици развијају самостално на бази постојећих знања, као што је структура броја, тип проблема, примена аритметичких својстава интуитивно, употреба различитих репрезентација и слично. Самостално осмишљавање менталних стратегија је показатељ концептуалног разумевања броја и значења аритметичких операција. С друге стране, менталне научене стратегије су резултат подучавања у настави. Заступљеност одређених стратегија у настави усмерава децу и на њихово коришћење касније. Разумевање стратегија које наставник користи у настави, а пре свега активно учествовање деце у осмишљавању стратегија у процесу учења и развоја стратегије подстиче развој ефикасних стратегија које се веома успешно користе и за аритметичке операције са вишецифреним бројевима пре формалног увођења у наставу (Anghileri, 1989; Carpenter, Ansell, Franke, Fennema and Weisbeck, 1993; Kouba, 1989; Mulligan and Mitchelmore, 1997). Нека деца интутивно развијају стратегије менталног рачунања, док их друга развијају и уче у наставном процесу, при чему је избор стратегије у оба случаја условљен вредностима бројева у задатку, типом и конткестом задатка (Sherin and Fuson), као и већ постојећим инутитивним стратегијама ученика (Mulligan and Watson, 1998:62). Ученике треба охрабрити да развијају сопствене стратегије, експериментишу и пореде различите стратегије у циљу избора и примене најадекватнијих (Heirdsfield, 1999: 1). Како би се то постигло битно је да ученици разумеју значај посматрања бројева на различите начине и та знања искористе за избор стратегија (Threlfall, 1998). Из наведених разлога потребно је усмеравати децу на широк спекатар стратегија и развијање остељивости за број што ће им омогућити флескибилно рачунање. Као што је наведено, избор стратегија претежно зависи од бројева, што показује да концептуално разумевање бројева и аритметичких својстава у великој мери утиче на флексибилан избор стратегија рачунања (Heirdsfield et al, 1999).

У литератури се могу издвојити три приступа (Kamii, 1994; Mulligan and Mitchelmore, 1997; Heirdsfield et al., 1999; Sherin and Fuson 2005; Downton and Sullivan, 2017)која су заступљена у наставној пракси при обради аритметичких операција:

увођење стандардних алгоритама, подстицање развоја менталних интуитивних стратегија и подучавање менталним стратегијама. У почетним фазама обраде аритметичких операција значајно је проверити менталне интуитивне стратегије ученика, како би оне представљале темељ за развој и упознавање ученика са осталим менталним стратегијама. Менталне стратегије, било да су резултат подучавања или да их деца самостално развијају, треба да буду засноване на својствима аритметичких операција, карактеристикма проблема и врстом бројева који се јављају у задацима.

Већина класификација дечјих поступака за рачунање може се класификовати у три групе које су уско повезане са начином разумевања бројева(Carpenteretal., 1993; Baek, 1998; Fuson et al., 1997; Ambroseetal., 2003;Verschaffeletal. 2007; Peltenburg etal.; 2012; Selter etal., 2012; Schulz&Leuders,2018):

1. Стратегије у којима се виде бројеви првенствено као предмети који се броје и стратегије се ослањају на бројање;
2. Секвенционалне стратегије у којима се виде бројеви са децималном структуром и у којима се операције врше у односу на децималну структуру;
3. Различите стратегије засноване на аритметичким својствима.

У овом раду се разматра питање да ли је развој стратегија интуитиван или се подстиче у настави и да ли треба да буде предмет подучавања у школи. Овакви приступи нису део Наставног плана и програма, те један група аутора (Sherin and Fuson 2005) сматра да су менталне стратегије множења једноцифрених бројева резултат систематског поучавања. Даље, истиче се да је разумевање аритметичких правилавеома битно за развој менталних стратегија множења, односно изградњу таблице множења једноцифрених бројева (Fuson, 2003; Van de Walle et al., 2013). Друго виђење аутора (Kouba, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Heirdsfield et al, 1999.) јесте да увођење аритметичких правила пре развоја стратегија множења није нужно, већ да и млађа деца могу равијати стратегије (интуитивно) на задацима различите семантичке структуре.

2. Множење једноцифрених бројева

2.1. Мултипликативно мишљење

Мултипликативно мишљење представља важан аспект у развоју математичких појмова и аглебарског мишљења (BrownandQuinn, 2006).Дефинише се као способност флексибилног рада са различитим појмовима, стратегијама и репрезентацијама које се односе на множење и дељење (Siemon, BreedandVirgona, 2005: 2). Односи се на могућности различитих менталних приступа математичким проблемима множења и дељења уз коришћење различитих метода и процедура (Singh, 2012) и од кључног је значаја за разумевање месне вредности цифре, пропорционалног резоновања, односа мерљивих величина, мерења, разломака, функције, статистике и уопште за развој алгебарског мишљења (MulliganandWatson, 1998; Siemon, Izard, BreedandVirgona, 2006). Тешкоће са разумевањем математичких појмова у вишим разредима су последицаограниченог разумевања и развијености мултипликативног мишљења (Virgona, 2006; Sing, 2012).

У овом контексту битно је прво објаснити адитивно мишљење, које претходи мултипликативном мишљењу, а формира се постепено током школовања уз адекватне инструкције. Адитивно мишљење подразумева разумевање бројева у контексту „део−део−целина, као и месне вредности цифре. Везује се за разумевање и извођење операција сабирања и одузимања без примене алгоритма (FennemaandCarpenter, 1992). На овом нивоу мишљења одређивање укупног броја елемената се врши пребројавањем, односно кретањем од појединачног пребројавања укупног броја елемената, као почетних фаза адитивног мишљења, до развоја адитивних стратегија које укључују пребројавање препознавањем бројности одређеног скупа и бројања са прескакањем (MilolaandStephens, 2020). Адитивно мишљење је мање апстрактно у односу на мултипликативно мишљење, али му претходи.

Према Симону, Бреду и Виргону (Siemon, BreedandVirgona, 2005) мултипликативно мишљење обухвата:

1. Способност флексибилног и ефикасносг рачунања;
2. Способност препознавања и решавања задатака који укључују множење и дељење;

3. Представљање мултипликативних ситуација на различите начине (текстулани задаци, различите репрезентације и симболички записи) уз адектватну употребу математичког језика;
4. Концептуално разумевање мултипликативних ситуација, везе множења и дељења, колекције једнакобројних група, чиниоца и производа и других својстава операције множења.

Разумевање мултипликативног мишљења на овај начин наводи на посматрање мултипликативног мишљења као способности препознавањамултипликативних схема у различитим контекстима и успешно решавање задатака применом одговарајуће стратегије, при чему се избор стратегије образлаже.

Мултипликативно мишљење обухвата препознавање различитих величина и разумевање односа између њих, што је кључна разлика у односу на адитивно мишљење (Bakkeretal., 2014). Разумевање мултипликативног мишљења подразумева разумевање значењатрансформације величина (квантитета) у самој операцији (Vergnaud, 1983). На пример, множењем дужина оне се трансформишу у површину, а множењем броја колача са појединачном ценом колача добија се укупна цена свих колача (Vergnaud, 1983).

Мултипликативно мишљење захтева посматрање две врсте релација, односно разумевање израза $m \cdot n$на два начина: на m места по n елемената и на n места по m елемената, односно разумевање разлике између n групе састављене од по m јединица и m група коју чини nјединице (ClarkandKamii, 1996: 43). Ови аутори (Clark and Kamii, 1996) су својим истраживањем утврдили да се развој мултипликативног мишљења код деце дешава постепено и да постаје све потпуније са повећањем узраста. Истраживање је показало да се деца до осме године налазе на нивоу адитивног мишљења када постепено прелазе на мултипликативно мишљење, које је заступљено на узрасту од 9 до 11 година. У малом проценту мултипликативно мишљење се јавља већ у седмој години, али тек у 10 години постаје доминантније (49% ученика). Недостатак мултипликативног мишљења се дешава и као последица пренаглашености адитивног мишљења у настави, од кога се деца тешко удаљавају. Како би се подстакао развој мултипликативног мишљења треба охрабрити самостално решавање задатака уз коришћење ситуација које подстичу мисаоне процесе, односно захтевају размишљање о одговору и упоређивање различитих могућности решавања истог задатка (Clark and Kamii, 1996).

Постоји неколико фаза према Јакобу и Вилису (Jacob and Willis, 2003)које прате развој од адитивног до мултипликативног мишљења, а то су:

1. Појединачно пребројавање сваког елемента скупа, уз чињеницу да последњи број који се изговори представља укупан број елемената;
2. Адитивно разумевање броја уз акценат на број чланова сваке групе, док се број група занемарује или се број група обележава тако што се употребљавају прсти;
3. Постепено разумевање значења множења и дељења кроз пребројавање укупног броја елемената на различите начине;
4. Мултипликативне релације које карактерише разумевање значења чинилаца и производа бројева код множења, односно дељеника, делиоца и количника код дељења;
5. Мултипликативно мишљење које карактерише примена адекватних стратегија множења и дељења.

На основу истраживања са ученицима од 7 до 9 година у Аустралији у циљу уочавања разлике између адитивног и мултипликативног мишљења уочено је да ученици који поседују адитивно мишљење се претежно фокусирају на број елемената у свакој групи, а затим додавањем одређују укупан број елемената. Ученици који су достигли ниво мултипликативног мишљења уочавају структуру, односно број група и елемената у свакој групи, разликују први и други чинилац, разумеју везу између множења и дељења и примењују наведена знања у решавању задатака. Потпуна развијеност мултипликативног мишљења је достигнута тек када су ученици способни да решавају задатке множења и дељења, без присуства различитих репрезентација и конкретних текстуалних задатака (Jacob and Willis, 2001).

Према Коску (Kosko, 2020) развој мултипликативног мишљења код деце пролази кроз неколико фаза:

1. Појавно мултипликативно резоновање засновано на појединачном пребројавању;
2. Први нивомултипликативног мишљењакоји карактерише комбиновање адитивног и мултипликативног мишљења, као и разумевање разлике и сличности између*m* места по *n* елемената и на *n* места по *m* елементатауз одређивање производа два броја бројањем са прескакањем (3·6=3+3+3+3+3+3);

3. Други ниво мултипликативног мишљења карактериште способност растављања чиниоца на различите начине, као и примена познатих производа и поновљеног сабирања за одређивање производа($3\cdot 16 = 3 \cdot 6 + 3 + 3+ 3 + 3+ 3 + 3+ 3 + 3+ 3 + 3$);
4. Трећи ниво мултипликативног мишљења карактерише ефикасност и флексибилност у рачунању уз примену аритметичких правила ($3\cdot 16 = 3 \cdot 6 + 3\cdot 10$).

Развој мултипликативног мишљења се најчешће везује за увођење множења и дељења у другом разреду. На овом узрасту деца већ имају формирана интуитивна знања о наведеним аритметичким операцијама које се постепено проширује (Lu and Richardson, 2018: 240) и могу бити добра полазна основа за развој мултипликативног мишљења. На основу истраживања уџбеника у Србији, Зељић и Дабић (Зељић и Дабић Боричић, 2020) истичу је да је доминантни циљ у уџбеницима усмерен на меморисање правила, односно меморисање таблице множења напамет и употребу неефикасних стратегија које не подстичу развој мултипликативног мишљења. Заступљеност само једне структуре текстуалних проблема при обради множења и стратегија које се заснивају на сабирању и пребројавању спречава разумевање свих значења операције множења, онемогућава развој различитих флексибилних и ефикасних стратегија множења(Зељић и Дабић Боричић, 2020). Употреба неефиксних стратегија, као што је поновљено сабирање и примена познатих производа без проверавања тачности резултата, односно некоришћење олакшица у рачунању су показатељи адитивног мишљења (Zeljić et al., 2019). Уколико се инсистира само на употреби поновљеног сабирања, односно на адитивном карактеру множења долази до развоја неефикасних стратегија множења које не воде разумевању ефикасних стратегија, а тако ни развоју мултипликативног мишљења (Siegler, 1998; Steel and Funnell, 2001).Кретање од адитивног до мултипликативног мишљења траје и неколико година (Clark and Kamii, 1996; Simom and Blume, 1994; Thompson and Saldanha, 2003; Sherin and Fuson, 2005) и треба да буде праћено одговарајућим инструкцијама (Sowder et al., 1998). Развојмултипликативногмишљењаутичеинаразвојдругихматематичкихпојмова и уопште важно језаразумевањеалгебре, функцијаиграфика (Downton and Sullivan 2017; Pohler and Prediger 2015; Prediger 2011, 2019; Siemon, 2019), односноразумевањематематичкихсадржајау вишим разредима основне школе, као и у средњој школи (Lesh et al., 1988). Из тог разлога, мултипликативне структуре треба да заузму централну улогу у наставном плану и програму, јер оне укључује процесе

понављања, груписања, дељења, уочавања бројности неког скупа и темеље се на просторном резоновању, визуелизацији и организовању структура (Mulligan and Mitchelmore 2009: 38).

Већ при формирању основних значења множења ученике треба подстицати да мисле мултипликативно, уочавају једнакобројне групе елемената, односе између група елемената и сл. Како би се то постигло потребно је у уџбеницима користити задатке који описују мултипликативну ситуацију, кориситит одговарајуће репрезентације које описиују ту структуру и развијати адекватне стратегије множења (Зељић и Дабић Боричић, 2020).

На основну наведених истраживања може се закључити да се мултипликативно мишљење развија постепено, да му претходи адитивно мишљење и да се проширивањем знања о бројевима и рачунским операцијама повећава и број могућих метода и начина решавања, те све наведено утиче на развој мултипликативног мишљења. Како би ученици развили адекватно адитивно мишљење које служи као основа за развој мултипликативног мишљења, при формирању појма броја потребно је инсистирати на различитим начинима представљања бројева и стратегијама пребројавања укупног броја елемената неког скупа у циљу концептуалног разумевање бројева. Обрада сабирања и одузимања треба да буде усмерена на примену и развој различитих менталних стратегија рачунања које акценат стављају на структуру броја, јер само свеобухватним приступом настави аритметике у почетним разредима школе се може утицати на развој мултипликативног мишљења, који почиње обрадом множења и дељења у другом разреду и наставља се кроз целу основну и средњу школу.Као што је истакнуто, мултипликативно мишљење је саставни део множења и дељења и потребно је да при обради наведених садржаја обухватити сва значења операција употребом различитих репрезентација и контекстуалних задатака. Употребом различитих значења ствара се основу за посматрање множења и дељења на различите начине и развој адекватних стратегија рачунања. Све наведено заједно утиче на развој мултипликативног мишљења, чија је основна карактеристика флексибилна примена разноврсних метода за решавања различитих задтака и разумевања многобројних математичких садржаја у чијој основи је множење и дељење.

2.2. Значење операције множења

Множење и дељење представљају изузетно важне теме елементарне аритметике и основа су за разумевање других математичких појмова, као што су разломци, однос, пропорција и функције (Bakker, van den Heuvel-Panhuizen, Robitzsch, 2014; Thompson, Saldanha, 2003; Vergnaud, 1983, 1994). Множење представља бинарну операцију између два дисјунктна скупа, где један скуп представља величину групе, а други број група (Anghileri, 2000).

Ова ауторка истиче следеће важне аспекте множења: множење као поновљено сабирање, множење као бинарна операција, комутативност операције множења и дистрибутивност множења у односу на операцију сабирања и одузимања. Рано разумевање множења и дељења у скупу целих бројева захтева разумевање значења три квантитета: број група, број елемената у свакој групи и укупан број елемената. Множење се односи на додавање једнакобројних група неколико пута, док деца дељење посматрају као разбијање скупа на једнакобројне скупове (Vula and Berdynaj, 2011: 9). Повезивање идеје једнакобројних група и поделе укупног броја елемената у једнакобројне групе помаже ученицима да успоставе везу између множења и дељења, што је важно за флексибилно извођење операција множења (Wills, Jacob, Devlin, Powell, Tomazos and Treacy, 2004: 52). Многи аутори посматрају множење само кроз једнакобројне групе и поновљено сабирање, док Фишбеин (Fsichbein, 1985) сматра да разумевање множења као поновљеног сабирања представља имплицитни, несвесни и примитивни модел множења (Fischbein, Deri, Nello and Marino, 1985, R71). Битно је нагласити да ученици множење и дељење могу посматрати кроз адитивно мишљење (као поновљено сабирање или одузимање), што сматрамо да није довољно. Овакво посматрање не обухвата сва значења множења и дељења и не ствара основу за разумевање других значења и алгебарских садржаја, што истичу и други аутори (Vergnuad, 1993; Steffe, 1998; Watson, 2015).

С обзиром да се стратегије множења често заснивају на растављању броја на различите начине и примени аритметичких правила (Anghileri 2000; Barmby et al., 2009, Downton and Sullivan, 2017, Larsson 2016), множење треба посматратити на два начина:

1. Различито значење чинилаца и координација између њих, што се посебно истиче у задацима одређене семантичке структуре (Downton and Sullivan 2017, Gotze 2019a, b);

2. Множење кроз стратегије растављања чинилаца употребом аритметичких правила (Baiker and Gotze 2019, Downton and Sullivan 2017; Gaidoschik 2015; van der Ven et al. 2012).

У складу са наведеним, можемо закључити да је разумевање множења вишеслојно. Оно укључује способност мултипликативног резоновања, рачунања, избора одговарајуће стратегије, успостављања везе са осталим аритметичким операцијама, примену аритметичких правила и процењивање ситуације у којој је потребно множити (Carpenter et al., 2003; Clark & Kamii, 1996; Greer, 1992; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Nunes et al., 2009; Park & Nunes, 2001; Siemon, Bleckly, & Neal, 2012; Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2010; Verschaffel et al., 2007; Young-Loveridge & Mills, 2009). Шерин и Фусон (Sherin and Fuson, 2005: 348) истичу четири важне теме у истраживању множења и сагледавању проблема множења које карактеришу множење једноцифрених бројева, а то су:

1. Семантичка структура задатка,
2. Менталне интуитивне стратегије,
3. Стандардни алгоритми и
4. Флексибилна и адаптивна примена стратегија које омогућавају ефикасно и тачно одређивање производа.

У складу са наведеним, сматрамо да су четири теме које истичу наведени аутори веома важне за разумевање значења множења и да при обради множења треба посветити пажњу свакој, како би се омогућило концептуално разумевање множења и створила основа за развој мултипликативног мишљења.

Различити аутори на различите начине посматрају појам множења. Једна група аутора се залаже за разумевање множења као поновљеног сабирања, односно истичу да је инутитивни модел на који се ослања множење поновљено сабирање (Fishbein, Deri, Nello and Marino, 1985, R23), што потврђује и Стефе (Steffe, 1994), истичући значај разумевања композитне јединице, односно пребројавања или поновљеног сабирања. Друга група аутора (Mulligan and Mitchelmore, 1997; Anghileri, 1989; Siemon, Breed and Virgona, 2008) сматра да први приступ не промовише разумевање значења појма множења, те да је потребно вишеслојно разумевање множења, које обухвата разумевање различитих значења операције множења, као што је правоугаона схема, мултипликативно поређење, Декартов производ и слично. Сматрамо да је други приступ свеобухватнији и да обрада множења у основној школи треба да се темељи на оваквом посматрању множења, које утиче на развој свих значења наведене

аритметичке операције. За разумевање значења множења и развој мултиплиактивног мишљења потребно је да се посматрају различита значења, кроз употребу задатака различите семантичке структуре, о којима ће бити речи у следећем поглављу.

2.3. Семантичка структура текстуалних задатака множења

Разумевање математичких садражаја, а у нашем случају множења треба заснивати на употреби задатака различитих семантичких структура, који истичу различита значења операције множења. Контекст задатка у великој мери утиче на начин решавања задатка, али и разумевање математичких садржаја који су њиме представљени. Функција задатка је да помогне ученицима да разумеју одређене математичке садржаје и да изврше математизацију контекста задатка. Приликом састављања текстуалних задатака који се користе при обради нових математичких појмова треба бирати контексте који су искуствено блиски ученицима, јер то код ученика ствара пријатан доживљај учења, спремност за учење, доводи до учења са разумевањем и повећава се активност ученика у настави (Đokić, 2019).

Као што је речено, развој мултипликативног мишљења почиње при развијању значења множења и дељења у другом разреду и из тог разлога потребно је да ученици разумеју сва значења операције множење што се постиже упознавањем различитих семантичких структура задатака, које истичу та значења, при чему се ствара основе за разумевање различитих математичких појмова, који у основи имају мултипликативни карактер. С друге стране, истраживања су показала да ученици решавају разноврсне текстуалне задатке који се односе на множење пре него што им се дају формалне инструкције о операцији (Mulligan and Mitchelmore, 1997; Kouba, 1989). Mulligan and Mitchelmore, 1997; Kouba, 1989). Донтонова истиче да је ученицима потребно богато искуство са различитим семантичким структурама и контекстима како би у потпуности разумели операције множења и дељења (Downton, 2017).

Мултипликативне структуре се односе на све ситуације које захтевају множење или дељење, што обухвата на млађем нивоу препознавање различитих значења множења и дељења и пропорционално резоновање, а на вишем нивоу: линеарне функције, векторе, разломке, однос мерљивих величина, рационалне бројеве и множење и дељење (Vergnuad, 1983). Разумевање појма множења и уопште мултипликативних ситуација се огледа у способности ученика да објасне значење

множења и примене знања на задацима различите семантичке структуре уз употребу различитих репрезентација.

Ангилери (Anghileri, 1989) је обухватио шест категорија семантичких структура задатака: једнакобројне групе, однос мерљивих величина, правоугаона схема, бројевна полуправа, мултипликативно поређење и Декартов производ. Куба (Kouba, 1989) је издвојио три категорије: Декартов производ, мултипликативно поређење и једнакобројне групе. Насупрот наведеним ауторима, Грир (Greer, 1992) обухвата следеће семантичке структуре: једнакобројне групе (једнака мерења и однос мерљивих величина), мултипликативно поређење, правоугаона схема, Декартов производ, мерење укупне количине/дужине и однос мерних јединица (претварање из једне у другу мерну јединицу), док је Вергнуад (Vergnuad, 1988) обухватио три семантичке структуре: правоугаона схема, Декартов производ и производ мерења. Он истиче (Vergnuad, 1983) три групе мултипликативних структура: изоморфизам мерења (директна пропорција између две величине, однос непромењљивих и променљивих величина (нпр. *маса јабука по гајбици (непромењљива) и број гајбица (променљива величина), као и укупан број јабука*), производ мерења (производом две величине настаје трећу величину – разумевање множења као површине правоугаоника и Декартов производ) и производ три или више чиниоца (*Четворочлана породица је провела 13 дана у одмаралишту. Један дан по особи кошта 35 долара. Колико их је коштао цео одмор*).

Анализирајући поделе различитих аутора, може се закључити да се у литератури најчшће наводе следеће семантичке структуре:

1. Једнакобројне групе

   Пример: *У четири корпе се налази по 3 јабуке. Колико јабука има укупно?*
2. Однос мерљивих величина

   Пример: *За прање једног тањира је потребно 2 минута. Колико минута је потребно да би се опрало 10 тањира?*
3. Мултипликативно поређење

   Пример: *Јана има 8 пута више бомбона него Уна. Колико бомбона има Јана, ако Уна има 4 бомбоне?*
4. Пропорција (упоређивање, однос између дела и целине)

   Пример: *У одељењу има 35 ђака. На свака 3 дечака у одељењу има 4 девојчице? Колико има дечака, а колико девојчица у том одељењу?*
5. Правоугаона схема

Пример: *Учитељица је распоредила у 6 редова по 5 деце. Колико деце има у одељењу?*

6. Декартов производ

   Пример: *Симона има 4 мајице и 2 сукње. Колико одевних комбинација може да направи Симона од своје одеће?*

У литератури однос мерљивих величина, пропорционално резоновање и мултипликативно поређење представљају централне проблеме мултипликативног мишљења (Ben-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto and Miller, 1998; Shield and Dole, 2013 :19) и из наведеног разлога потребно их је користити у настави множења. Према Гриру (Greer, 1992) семнатичке структуре множења можемо поделити у две групе. Прву групу чине оне семантичке структуре у којима чиноци немају исто значење, а значење замене места чинилаца је прикривено (Lo, Grant and Flowers, 2008; Schliemann et al., 1998), као што су једнакобројне групе, однос мерљивих величина и мултипликативно поређења. У другу групу спадају оне семантичке структуре у којима чиниоци имају исто значење, те представљају добру основу за разумевање замене места чинилаца, која је очигледнија него у првој групи. Ова група обухвата разумевање множења као Декартовог производа и преко правоугаоне схеме (Greer, 1992; Schliemann, Araujo, Cassunde, Macedo and Niceas, 1998, Larsson, 2016 :10).

Идеја једнакобројних група укључује три аспекта: број група, број елемената у свакој групи и укупан број елемената, при чему чиниоци имају различиту улогу коју деца треба да разумеју. Њен значај истичу и Мулиган, Мичмор и Витсон (Muliligan and Mitchelmore, 1997; Mulligan and Watson, 1998). Разумевања множења на овај начин треба да оспособи ученике за различито формирање и именовања једнакобројних група, поготово у почетним фазама обраде множења, јер се интутитивно ствара основа за различито посматрања производа два броја (Siemon, Breed and Virgona, 2008). Како би се то постигло потребно је да при усвајању множења и дељења пажња ученика буде усмерена на каркатеристике бројева у задатку при извођењу наведених аритметичких операција, како би се ученици оспособили за различито посматрање производа бројева, као везе множења и дељења (Hurst and Hurell, 2016).

Разумевање множења као једнакобројних група најчешће се ослања на посматрање множења као поновљеног сабирања, што ограничава операцију множења на скуп природних бројева. Разумевањем множења само на наведени начин не обухватају се сва значење множења, те се може рећи да је употреба само једнакобројних група оправдана у почетним фазама учења (Larsson, 2017: 11), али је

пожељно истовремено користити задатке различитих сематничких структура. Насупрот мишљењу овог аутора, сматрамо да је важно и друга значења уводити у почетним фазама обраде множења, јер истичу мултипликативни карактер множења.

У литератури поред једнакобројних група често се истиче и значај правоугаоне схеме за разумевање множења. Разумевање множења на овај начин помаже у разумевању површине правоугаоника, а погодно је за разумевање и усвајање аритметичких својстава множења, што представља основу за разумевање множења у скупу рационалних бројева (Barmby et al., 2009). Сматрамо да је разумевање структура једнакобројних група и правоугаоне схеме веома важно за разумевање мултипликативних ситуација који омогућавају деци да разумеју и аритметичка правила и везу множења и дељења, што истичу и други аутори (Jacob and Mulligan, 2014; Young-Loveridge, 2005; Hurst and Hurrell, 2016).

Правоугаона схема се користи приликом обраде множења у циљу разумевања стандардног алгоритма, односно начин на који се користи стандардни алгоритам и значења појединачних корака алгоритма (Davis, 2008; Young-Loveridge, 2005a, 2005b), а утиче на развој мултипликативног мишљења (Siemon, Beswick, Brady, Clark, Faragher & Warren, 2011; Booker, Bond, Sparrow & Swan, 2010; Vale & Davies, 2007; Young-Loveridge, 2005). Одређени текстуални задаци својом структуром подстичу на приказ решења преко правоугаоне схеме, што указује директно на разумевање множења на овај начин. Графичко приказивање множења преко правоугаоне схеме у скупу природних бројева до 100 ствара основу за развој флексибилних стратегија рачунања које се примењују за множење и дељење у скупу природних бројева, али и на осталим скуповима бројева (Lorraine and Mulligan, 2014: 39).

Употреба репрезентација које представљају правоугаону схему у почетним фазама учења треба да буде усмерене на именовање и уочавање три кључна квантитета (број група, број елемената у свакој групи и укупан број елемената), као и правилну употребу математичког језика. Када се „објекти” организују у правогуаноу схему, при чему су редови и колоне јасно структурисани пажња ученика треба да буде усмерена на:

- различито посматрање укупног броја елемената и
- три компоненте мултипликативне ситуације (број група, број елемената у свакој групи и укупан број елемената) (Lorraine and Mulligan, 2014: 37).

Деца која поседују концептуално разумевање броја на млађем узрасту успешно користе правоугаоне схеме за представљање производа два броја, при чему воде рачуна

о томе да су све јединце међусобно једнаке, што указује на успостављену везу између нумеричке и просторне структуре. Пребројавањем укупног броја елемената неког скупа се уочава број квадрата у једном реду, у једној колони, као и укупан број квадрата (Mulligan et al., 2006). Редови се могу посматрати као групе, а број елемената у сваком реду, као бројност сваке групе и обрнуто, колоне се могу посматрати као групе, што истиче својство наведеног аритметичког правила, а и повезује различита значења множења. Разумевање наведеног је битно за разумевање аритметичких правила и алгебарских закона, бројева, мерења и других математичких појмова (Mulligan and Mitcelmore, 2009: 44). Коришћење различитих материјала за представљање производа два броја преко правоугаоне схеме ученике подстиче на уочавање кључних карактеристика, повезивање репрезентација са математичким садржајима и развијање тачности рачунања уз концептуално разумевање значења множења као правоугаоне схеме (Day and Hurrel, 2015: 21). Посматрање множења преко правоугаоне схеме је битан сегмент у развоју концептуалног разумевања множења, способности растављања бројева на просте чиниоце (Siemon, Breed and Virgona, 2008), као и аритметичких правила (Carpenter et al, 2003, Fuson, 2003), што су потврдили и други аутори (Young-Loveridge and Mills 2008). Употреба квадратне мреже ствара основу за различито растављање бројева у циљу што ефикаснијег рачунања. Концептуално разумевање множења као правоугаоне схеме и множења уопште у скупу природних бројева омогућава и разумевње разломака, операција на разломцима и децималним бројевима и обезбеђују трансфер знања на друге математичке области.

Декартов производ се посматра као производ два скупа, која имају одређену вредност, односно подразуемева операција на елементима два скупа, при чему се врши упаривање елемената једног скупа са елементима другог скупа (Larsson, 2016: 9). Математички речено, то је колекција свих уређених правоа (*a, b*) где је први члан *a* из скупа *A*, а други члан *b* из скупа *B* ($A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$).

Разумевање Декартовог производа је битно због разумевања комбинаторике у старијим разредима и средњој школи и сматрамо да ово значење множења не сме бити занемарано у млађим разредима основне школе.

Разумевање множења као односа мерљивих величина је много апстрактније него разумевање множења као једнакобројних група. Ранија истраживања су показала да је разумевање множења као једнакобројних група и правоугаоне схеме много једноставније него мултипликативно поређење и Декартов производ (Greer, 1992;

Mulligan, 1992). Овакви налази су у складу са наставном праксом, која показује да је најчешће заступљена идеја једнакобројних група која се користи прилком увођења операције множења што потврђују и многобројни аутори (Fischbein et al., 1985; Izsak, 2004, Watanbe, 2003).

Разумевањем наведених значења множења ученици развијају основу за разумевање множења у скупу целих и рационалних бројева. Уколико би се разумевање множења ограничило само на једнакобројне групе истакло би се да се множењем резултат увек повећава, што није случај у скупу рационалних бројева. Те посматрање множења на овај начин ствара тешкоће за разумевање множења у скупу рационалних бројева (Larsson et al. 2017: 2). Употреба правоугаоне схеме је значајна за разумевање множења вишецифрених бројева и развој екфисаних стратегија рачунања. При множењу на овај начин истиче се растављање производа два броја на неколико производа мањих бројева, као и растављање бројева на вишеструке декадне јединице (Young-Loveridge and Mills, 2008). Коришћење квадратне мреже за представљање производа два броја омогућава кретање од познатог ка непознатом растављањем бројева на неколико сабирака, односно од познатих производа у оквиру множења једноцифреним бројем до самосталног откривања траженог производа (Loveridge, 2005: 38). На тај начин долази до развоја мултипликативног мишљења, односно развоја стратегија множења које се базирају на растављању бројева (Loveridge, 2005).

Истраживање Марojoke и Бекера (Marojoke and Beker, 2014) показало је ученици могу успешно да решавају задатке множења различите семантичке структуре пре обраде множења уколико су им дате одговарајуће репрезентације и контексти задатка блиски њиховом искуству. На успешност у решавању задатака различите семантичке структуре утиче употреба репрезентација које дају могућност појединачног пребројавања елемената или примене неке друге менталне интуитивне стратегије (Mulligan and Mitchelmore 1997; Marojoke and Beker, 2014). Истраживање је показало да деца не морају да поседују експлицитно разумевање структуре једнакобројних група како би успешно решили остале мултипликативне проблеме, што показује да се и друге семантичке структуре задатака могу увести у почетним фазама обраде множења. Слажемо се са мишљењима различитих аутора који указују на важност примене различитих мултипликативних ситуација, које истичу значења множења уз акценат на прилагођеност контекста узрасту ученика, као и употребу одговарајућих репрезентација за приказ мултипликативних ситуација.

2.4. Менталне стратегије множења

Деца поседују интуитивна знања о множењу која се могу успешно искористити као основа за формалну обраду множења једноцифреним бројем (Lorraine and Mulligan, 2014: 36). У неформална и инутивна знања спадају сва математичка знања стечена ван школе, као и математичка знања стечена кроз обраду других математичких садржаја (Marjoke and Beker, 2014: 118). Када су у питању аритметичке операције менталне стратегије се изводе директно из појмова бројева и разумевања декадне основе, темељних принципа операција и односа између операција (Зељић, 2021: 53). Истраживања показују да је поучавање деце стратегијама менталног рачунања ефикасније од прекомерног понављања алгоритма (Baroody, 1985; Smith and Smith, 2006; Woodward, 2006), као и да ученици веома ефикасно рачунају користећи менталне интуитивне стратегије за множење вишецифрених бројева пре увођења формалних инструкција (Carpenter et al., 1993; Baek, 1998; Ambose et al., 2003).

Према неким ауторима менталне стратегије множења се могу поделити у две групе: стратегије рачунања и стратегије моделовања. Стратегије рачунања обухватају појединачно пребројавања, ритмичко бројање, бројање са прескакањем, адитивне и мултипликативне стратегије (Kouba 1989; Mulligan, 1992). С друге стране, стратегије моделовања укључују употребу физичких објеката (Kouba 1989), као што су прсти, цртежи или обележивачи.

Употреба различитих стратегија у извођењу аритметичких операција се темељи на карактеристикама задатака и бројева у задатку и интуитивној примени аритемтичких правила. Уколико ученици примењују стратегије самостално пре формалног увођење, реч је о интуитивним менталним стратегијама. С друге стране, уколико је у настави заступљена примена аритметичких правила или репрезентација на основу којих се бирају стратегије, реч је о менталним стратегијама које су резултат подучавања (Bruner, 1960; Carpenter et al., 2003). Развој стратегија множења се одвија постепено, крећући се од директног моделовања, које подразумева употребу прстију и цртеже у циљу пребројавања укупног броја елемената или њиховог разврставања у групе и постепено се иде ка развоју комплетних стратегија множења, стратегија дељења и компензације (Ambrose, Baek, Carpenter, 2003).

Мулиган и Мичмор (Mulligan and Mitchelmore, 1997) менталне интуитивне стратегије дефинишу као интерне менталне структуруе које одговарају класи стратегија рачунања, те постоји директна веза између стратегија рачунања и семантичке структуре задатка (Mulligan and Mitchelmore, 1997: 312). Стратегија множења и дељења се постепено развијају од неформалних ка формалних стратегијама, при чему постепено долази до употребе познатих производа множења једноцифреним бројем и примене стандардног алгоритма множења и дељења. Они (Mulligan, 1992; Mulligan and Mitchelmore, 1997) разликују неколико стратегија множења:

1. Стратегије директног моделовања – појединачно бројање елемената, пребројавање дуплирањем и прескакањем уз употребу конкретних модела и цртежа;
2. Стретегије допуњавања које су засноване на ефикасним техникама пребројавања и сабирања и обухватају ритмично пребројавање, пребројавање са прескакањем, поновљено сабирање и дуплирање;
3. Стратегије које се темеље на употреби познатих производа множења једноцифрених бројева.

Посматрајући наведене стратегије може се закључити да се постепено прелази на ментално рачунање без употребе цртежа и конкретног материјала. Мулиган (Mulligan, 1992) истиче да је висок ниво заступљености адитивних стратегија код множења оправдана, јер деца стратегије овог типа користе и када формирају таблицу множења једноцифреним бројем. Кретање од пребројавања, преко менталних стратегија до познавања таблице множења једноцифреним бројем према мишљењу аутора мора да буде праћено радом на различитим семантичким структурама задатака. Како би се постигао развој менталних стратегија множења наставни процес треба да подржи и уважи развој менталних интуитивних стратегија. Почетне фазе обраде множења треба да прати рад са конкретним моделима, цртежима и дијаграма, уз употребу адекватног математичког језика. Употреба менталних инутитивних стратегија, као што су поновљено сабирање и пребројавње група елемената, може позитивно утицати на развој других стратегија, као и усвајање других математичких појмова.

Наведени аутори (Mulligan and Mitchelmore, 1997) су истраживали употребу менталних инутивних стратегија множења на задацима различите семантичке структуре (једнакобројне групе, правоугаона схема, Декартов производ и мултипликативно поређење). Обухватајући наведене семантичке структуре и

стратегије множења и дељења наведени аутори су спровели истраживање са децом првог разреда у скупу природних бројева до 40 пратећи везу између семантичке структуре задатака и менталних интуитивних стратегија које користе. Резултати су показали да деца поседују интуитивна знања и да самостално формирају стратегије множења и дељења. Са узрастом знање о бројевима, семантичким структурама се проширује те деца у складу са њима бирају стратегије рачунања. Поновљено сабирање се као стратегија успешно примењује у задацима различитих семантичких структура, сем код задатака мултипликативног поређења. Успешно коришћење менталних интуитивних стратегија множења у скупу бројева до 20 не значи и њихово успешно коришћење у скупу бројева до 40. Резултати су показали да чак 75% ученика успешно решава задатке множења и дељења у скупу бројева до 20 без инструкција, што је показатељ присуства неформалних знања о множењу и дељењу. Када је у питању скуп бројева од 20 до 40 ученици претежно користе стратегије директног моделовања и стратегије пребројавања, а тек у вишим разредима долази до коришћења познатих чињеница за решавање задатака. Примећено је да се проширивањем скуп бројева ученици враћају на почетне стратегије. Са повећањем узраста расте употреба софистициранијих стратегија множења, док се употреба осталих стратегија, нарочито оних које се заснивају на пребројавању смањује (Mulligan and Mitchelmore, 1997). Интутивна знања и неформалне стратегије деца стичу током свакодневног искуства и успешно их користе за решвања задатака. Усвајањем формалних знања, односно стандардних алгоритама они престају да анализирају задатке (Carpente and Moser, 1982), што често доводи до грешака. Употреба нестандардних алгоритама, односно менталних стратегија рачунања може помоћи ученицима да разумеју значења стандардних алгоритама (Day and Hurrell, 2015: 21) и аритметичких операција. Истраживања Мулигана и Мишелмора (Mulligan and Mitchelmore, 1997) су показала да семантичка структура задатка утиче на избор стратегије, те се задаци који се односе на Декартов производ и мултипликативно поређење најчешће решавају стратегијама пребројавања уз примену конкретних модела, док је бројање са прескакањем заступљено у задацима свих семантичких структура, с тим да су деца показало слабо разумевање Декартовог производа (Mulligan, 1992). С друге стране, задатке који се односе на разумевање множења као односа деца најчешће решавају стратегијама које се заснивају на поновљеном сабирању.

Куба (Kouba, 1989) је анализирајући семантичку структуру једнакобројних група издвојио следеће стратегије множења:

1. Стратегије пребројавања укупног броја елемената уз коришћење конкретних модела или цртежа (појединачно пребројавање, пребројавње дуплирањем и бројање по секвенцама, односно групно пребројавање када је број елеманта групе познат, а акценат се ставља на број група);
2. Поновљено сабирање уз коришћење цртежа лишених шума и без цртежа;
3. Примена научених производа.

Шерин и Фусон (Sherin and Fuson, 2005) су се бавили испитивањем менталних стратегија множења после обраде множења једноцифреним бројем. Они истичу да су почетне стратегије множења и дељења адитивне, односно множење се посматра као поновљено сабирања. У првим фазама ученици се везују за конкретне објекте, цртеже и употребу прстију. Временом долази до развоја концептуалних структура, као и одговарајућих математичких образаца који су неопходни за развој и примену одговарајућих стратегија множења и дељења. Ови аутори (Sherin and Fuson, 2005) сврставају стратегије множења у неколико група:

1. Стратегије које се темеље на бројању појединачних елемената и директном моделовању чија је карактеристика употреба иконичких репрезентација, односно цртежа и употреба прстију за рачунање. У ове стратегије спадају следеће стратегије:
   - Цртање цртежа са доста шума који одговара контексту и пребројавање свих елемената појединачно, при чему је математички контекст занемарен;
   - Цртање примитивних математичких цртежа који воде математизацији појма и примена таблице множења;
   - Пребројавање уз помоћ прстију уз бројање група једном руком, а елемената сваке групе другом руком;
   - Ритмичко бројање са прстима;
2. Стратегије засноване на разумевању множења као поновљеног сабирања
   - Поновљено сабирање;
   - Формирање група дуплирањем и поновљено сабирање које се примењује на резултате добијене дуплирањем.
3. Стратегије засноване на групном пребројавању при чему је бројност скупа позната, а акценат се ставља на пребројавање група.
   - Пребројавање уз помоћ цртежа који приказују мултипликативну структуру проблема;
   - Пребројавање уз помоћ идеограма;

- Пребројавање уз помоћ прстију, при чему прсти означавају број групе;

4. Стратегије засноване на примени правила множења бројевима 0, 1, 10 и 9.
5. Научена таблица множења једноцифреним бројем;
6. Хибридне стратегије
   - Стратегије засноване на појединачном и групном пребројавњу укупног броја елемената;
   - Примена познатих производа и стратегија пребројавање;
   - Примена познатих производа и поновљеног сабирње;
   - Примена аритметичких правила и стратегија прилагођених бројевима.

Бројеви у задатаку у великој мери утиче на избор стратегија. Познати производи у оквиру множења једноцифреним бројем се користи када су у питању производи мањих бројева и за множење два иста броја (квадрати бројева). Шерин и Фусон (Sherin and Fuson, 2005) истичу да ученици у највећој мери користе поновљено сабирање за проналажење тачног одговора прилико множења мањих једноцифрених бројева. Резултати њиховог истраживања су показали да за множење са 0 или 1 ученици обично користе научена правила, док за множење бројем 2 користе поновљено сабирање. Пребројавање група се најчешће користи за множење бројевима 3, 4 или 5, док за множење са већим бројевима ученици користе стратегије које комбинују са познатим производима (Sherin and Fuson, 2005: 380). Наведени аутори истичу и значај утицаја инструкција наставника на избор стратегија. Уколико се у настави користе репрезентације или прсти и деца ће користити стратегије које се заснивају на томе, што важи и за примену правила и научених алгоритама без разумевања истих (Sherin and Fuson, 2005: 382). Све наведено указује на специфичности стратегија у зависности од конкретног проблема и бројева у оквиру проблема, те се у складу са тим стратегије не могу генерализовати.

На основу истраживања менталних стратегија које деца узраста од 8 до 11 година користе за множења и дељења, Амброс и други аутори (Ambrose, et al., 2003; Jacob and Willis, 2001) истакли су следеће категорије менталних стратегије множења:

1. Стратегије директног моделовања које су засноване на коришћењу конкретних модела и цртежа;
2. Стратегије допуњавања које су засноване на поновљеном сабирању и дуплирању и примени аритметичких правила.

   Пример: $47 \cdot 34$

$$48 = 16 + 32$$
$$= (32+16-1) \cdot 34$$
$$= ((2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2) + (2\cdot2\cdot2\cdot2) - 1) \cdot 34$$
$$= (2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2) \cdot 34 + (2\cdot2\cdot2\cdot2) \cdot 34 - 1 \cdot 34$$
$$= 2(2(2(2(2\cdot34)))) + (2(2(2(2\cdot34))) - 34$$

3. Менталне инутитивне стратегије које су засноване на растављању чиниоца на збир неколико сабирака и примени аритметичких правила.
4. Стратегије компезације које су засноване на прилагођавању стратегије структури броја уз примену аритметичких правила као олакшица у рачунању.

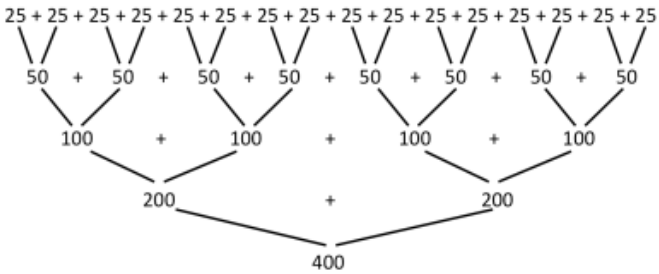
Пример: $43 \cdot 24 = 24 \cdot 10 \cdot 4 + 24 \cdot 3$

Хаирдшфајлд и др. (Heirdsfield et al, 1999) истичу три категорије менталних стратегија множења:

1. Стратегије које се темеље на пребројавању (пребројавање са прескакањем, поновљено сабирање и одузимање, дуплирање и дељење у групе);
2. Множење једноцифреним бројем и примена познатих производа при рачунању;
3. Холастичке стратегије (прилагођавање стратегија бројевима у задатку и растављање бројева на различите начине).

Истраживање (Heirdsfield et al, 1999) је испитивало употребу менталних интуитивних стратегија пре увођења множења једноцифреним бројем и менталних интутивних стратегија за множење двоцифреним бројем после увођења множења једноцифреним бројем. Утврђено је да деца интуитивно пре увођења множења једноцифреним бројем користе прву групу стратегија, а затим како се уводи множење једноцифреним бројем постепено прелазе на примену познатих производа и теже употреби холастичких стратегија. Уопште гледано, са повећањем узраста расте и ефикасност стратегија које се примењују. Када је у питању множење једноцифреног и двоцифреног броја ученици постепено крећу ка примени холастичких стратегија, док за множење два двоцифрена броја деца најбоље резултате постижу коришћењем стратегија које се темеље на пребројавању с обзиром да ти садржаји нису обрађени у настави. Холастичке стратегије су много погодније за ментално рачунање, подстичу процену, која се постепено усавршава кроз грешке и покушаје и оспособљавају ученике за успешно множење и дељење у скупу пирдоних бројева применом аритемтичких правила и својстава операција и бројева (Heirdsfield et al, 1999).

У зависности од начина на који ученици врше рачунање, Ларсон (Larsson, 2015) истиче три групе стратегија: поновљено сабирање, стандардни алгоритам и менталне интуитивне стратегије. Разумевање множења као поновљеног сабирања базира се на кореспонденцији укупног броја скупова и елемената у сваком скупу, односно пребројавању укупног броја елемената (Thompson and Saldanha, 2003), што је уско повезано са структуром једнакобројних група. Пример приказан на Слици 1. показује комбинацију поновљеног сабирања и дуплирања (Larsson, 2016: 21).



Слика 1. Примена стратегија поновљеног сабирања и дуплирања (Larsson, 2016)

Поновљено сабирање не приказује структуру множења, али се може користити као стратегија у почетним фазама обраде множења и као прелазна основа за примену стратегија дуплирања.

У Аустралији је спроведено истраживање са ученицима трећег разреда у циљу испитивања мултипликативног мишљења, кроз праћење коришћених стратегија у задацима различитих семантичких структура (Downton and Sullivan, 2017). Наведени аутори истичу да је већина приступа множењу конципирана тако да се почиње са једноставним примерима, а да се затим прогресивно уводе сложене стратегије, али је могућ и обрнут пут. Они истичу следеће менталне стратегије множења: стратегије које се заснивају на употреби конкретних модела и цртежа, односно визуелизацији; стратегије засноване на пребројавању (појединачно пребројавање, дуплирање или бројање група елемената); стратегије мултипликативног рачунања, односно ослањања на знање познатих производа и стратегије које се заснивају на процени и примени аритметичких правила, карактеристика бројева и својстава операције множења, те аутори ове стратегије именују као стратегије засноване на холастичком мишљењу. Утврђено је да већина ученика користи стратегије које се заснивају на знању познатих производа, дуплирање и стратегије засноване на холастичком мишљењу при чему је последња група стратегија била најзаступљенија. Њихови разултати показују да употреба различитих репрезентација при обради множења подстиче дубље разумевање

множења и примену стратегије засноване на холастичком мишљењу, које одликује флексибилност у размишљању и примена софистицираних стратегија множења. С друге стране, задаци су били подељени по семантичким структурама (једнакобројне групе, однос мерљивих величина, правоугаона схема, мултипликативно поређење и Декартов производ) и по сложености у зависности од бројева у задатку. Резултати су показали да семантичка структура утиче на избор стратегије. Ученици за решавање задатака који истичу идеју једнакобројних група без обзира на бројеве у задатку теже коришћењу стратегија пребројавања и стратегија које се заснивају на познатим производима. Када је у питању разумевање множења као праовугаоне области ученици претежно користе стратегија које се заснивају на познатим производима, јер се кроз ово значење множења јасно истиче структура реда и колоне, те је погодно за дељење производа на неколико производа, односно груписање познатих производа и осмишљавање ефикасних стратегија множења. Разумевање множење као односа мерљивих величина, мултипликативног поређења и Декартовог производа представља сложеније ситуације множења те ученици теже коришћењу холастичких стратегија и стратегија заснованих на познатим производима које им омогућавају флексибилније проналажење решења. Без обзира на семантичку структуру задатака, ученици су тежили решавању сложенијих задатака. Резултати су показали да баш решавање таквих задатака подстиче размишљање о значењу множењу и развој нових, ефикаснијих и флексибилнијих стратегија множења (Downton and Sullivan, 2017).

Развој флексибилних стратегија множења условљен је и стратегијама које се примењују у почетним фазама обраде множења. Истраживања Зељић и других аутора (Zeljić et al., 2019) показују да разумевање множења као поновљеног сабирања, обрада множења једноцифреним бројем на овај начин, као и меморисање таблице множења негативно утиче на развој флексибилних стратегија множења. Резултати њиховог истраживања показују да ученици највише користе познате производе и поновљено сабирање. С друге стране, стратегије дуплирања и мултипликативног рачунања су коришћене у малом проценту. Заступљеност наведених стратегија показује да ученици поседују адитивно мишљење, што се посебно истиче при множењу бројем 9, при чему не користе множење бројем 10, као олакшицу. Даље, ученици који множење усвоје на наведен начин најчешће примењују само једну стратегију и научене производе, без проверавања тачности и не теже развоју менталних интуитивних стратегија које су много ефикасније од наведених. Може се рећи да усмереност на једну стратегију множења онемогућава развој других, ефикаснијих стратегија множења у каснијим

фазама усвајања множења, што уопште утиче и на разумевање операције множења, што истичу остали аутори усмерени на развој ефикасних менталних стратегија множења (Ambrose, et al., 2003; Jacob and Willis, 2001; Downton and Sullivan, 2017).

На успешност решавања задатака у великој мери утиче контекст задатка, вредности бројева и скуп бројева којем припадају бројеви (Fischbein, Deri, Nello and Marino, 1985: 5). Уколико је контекст задатка близак искуству ученика, без обзира која семантичка структура је у питању, ученици интуитивно користе неформална математичка знања (Koedinger and Nathan, 2004) и примењују одговарајуће менталне интуитивне стратегија (Van de Heuvel-Panhuizen, 2005).

Уопште гледано, сва ранија истраживања (Anghileri, 1989; Sherin and Fuson, 2005; Kouba, 1989; Mulligan, 1992; Mulligan and Mitchelmore, 1997; Downton and Sullivan, 2017; Steffe, 1988) на сличан начин врше категоризацију менталних сратегија множења и показују постепен напредак од мање ефикасних до ефикаснијих стратегија. Употреба различитих стратегије позитивно утиче на учење и постигнућа ученика и представља неопходан услов за трајност и проширивање претходних знања ученика (Liu et al., 2015). Може се закључити да се развој менталних стратегија одвија постепено, почевши од директног моделовања које подразумева употребу конкретних модела, стратегија појединачног пребројавање, преко бројања са прескакањем, дуплирања, поновљеног сабирања и одузимања до примене стратегија заснованих на аритметичким правилима, наученим производима и својставима операција множења. Већина стратегија се у почетним фазама обраде множења везује за употребу конкретних модела и цртежа, који се постепено напуштају и прелази се на ментално рачунање. Примећено је да разумевање аритметичких правила ствара добру основу за увођење стандардних алгоритама и уопште развој менталних стратегија множења. Упознавањем различитих значења множења кроз многобројне мултипликативне ситуације се утиче на развој менталних интуитивних стратегија, као и менталних стратегија које су резултат подучавања. Кроз употребу ових, а и других стратегија ученици се оспособљавају за флексибилно рачунање уз активирање свих претходно стечених знања о бројевима и односима између бројева, као и аритметичким операцијама што је суштина флексибилног менталног рачунања (Verchaffel, Greer and De Corte, 2007).

2.5. Значај, улога и врста репрезентација у обради множења једноцифреним бројем

Математичке репрезентације представљају конкретизације апстрактног појма или структуре (ЛОТ, 2014: 676). Представљају начин приказа математичких идеја вербално, писмено, симболима, сликама, моделима, дијаграмима или физичким материјалима (Goldin, 2002). Циљ коришћења репрезентација јесте упознавање својства математичког појма или поступка, али се може користити и при решавању задатака. Оне треба да помогну ученицима да самостално открију и истраже математичке структуре.

Репрезентације коришћене у решавању математичких проблема доприносе разумевању математичких ситуација и развоју математичког мишљења, који је кључан за проналажење адекватног приступа задатку (Fennal and Rowan, 2001), а с друге стране показују чврсту везу између математичких структура (Goldin and Shteingold's, 2001). Математички односи, принципи и идеје се могу изразити у више структурално еквивалентних репрезентација укључујући објекте из реалног окружења, визуелне представе (тј. слике и дијаграме), вербалне представе (писане и говорни језик) и симболичке репрезентације (бројеви, слова) (Зељић, 2021: 76). Успостављање везе између два система или више репрезентација омогућава ученицима да развију значења појма поредећи их међусобно (Steinbring, 1997: 79) што утиче на повећање разумевања математичког појма и помаже ученицима у формирању апстрактних појмова.

У наставној пракси треба тежити ка употреби различитих репрезентација за представљање једног математичког проблема, јер се на тај начин подстиче флексибилно математичко мишљење, које осопобљава децу за имагинацију и визуелизацију мултипликативних процеса (Loveridge, 2005: 37) и развој математичког језика (Gotze 2019a; Prediger and Wessel 2013). У процесу учење креће се од једног типа репрезентација, при чему се постепено уводе и други начини представљање појмова да би у завршним фазама учења дете могло флексибилно да бира репрезентације које одговарају конкретној математичкој ситуацији. Репрезентације омогућавају разумевање везе између саме репрезентације и проблема који она представља (Loveridge, 2005: 35). Представљање математичких идеја се може вршити преко манипуалтивних модела, сликовних репрезентација, текстуалних проблема који исказују животну ситуацију, говорног и писаног језика. Употреба слика, дијаграма и текстуалног контекста за представљање математичких појмова је веома важна

стратегија у млађим разредима (Russell et al., 2011). Прве репрезентације које се користе при усвајању математичких појмова на млађем узрасту су конкретне и са много детаља, али битне су за формирање апстрактних математичких појмова (Brown et al., 2009). Временом ученици прелазе на коришћење апстрактних репрезентација, које истичу структуру проблема и односа и корисније су приликом решавања сложенијих проблема (Cai, 2004; Koedinger et al., 2008). Овај прелазак са конкретних на апстрактне репрезентације омогућава математизацију и формирање математичких појмова. Сликовне репрезентације обухватају слике објеката које може да прати вербални опис, док су иконичке репрезентације апстрактније и обухватају кругове, квадрате и сл. У нашем раду за сликовне репрезентације које приказују феномене из реалног света користићемо иконички знак који зовемо пиктограм, а за иконичке знаке којима представљамо појмове и њихово значење уз помоћ различитих геометријских фигура лишених шума користићемо идеограме (Марјановић, 2016).

Обрада појма множења и упознавање свих значења ове аритметичке операције захтева коришћење различитих репрезентација које подстичу разумевање значења семантичких структура, као и развој стратегија множења. Учење аритметике, у нашем случају множења, треба да буде засновано на проблемским ситуацијама које воде ка симболизовању. У процесу обраде аритметичких поступака и генерализација важно је развијање њиховог значења, што се постиже коришћењем различитих репрезентација, а оне се развијају од представљања ситуација у реалном свету до апстрактних симбола (Зељић и Дабић, 2014).

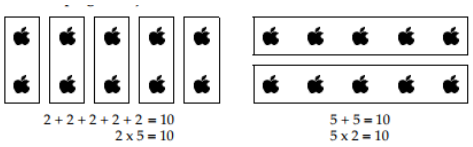
Харис и Бармби (Harries and Barmby, 2007) наводе следеће карактеристике репрезентација које се користе при обради множења:

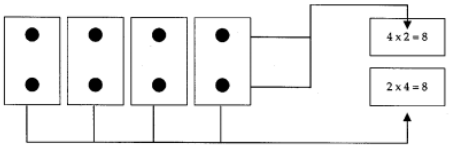
1. Јасно и прецизно приказивање једнакобројних скупова при чему је понављања једнакобројног скупа очигледно, што је кључни аспекта множења;
2. Два елемента репрезентације, односно један елемент који приказује број група и други елемент који приказује број елемената у свакој групи (нпр. редови и колоне, тањири и јагоде);
3. Коришћење различитих репрезентација;
4. Коришћење правоугаоне схеме у циљу разумевање аритметичких својстава операције множења;
5. Употреба репрезентација као помоћног средства у коришћењу различитих стратегија рачунања.

Различити аутори су се бавили испитивањем употребе различитих репрезентација. Препознавање сличности и разлика у математичким репрезентацијама које се односе на исти математички појам представља кључну улогу за развој комплексних математичких идеја и уопште концептуално разумевање и повезивање целокупних садражаја наставе математике. Ван де Вале (Van de Walle, 2006) истиче да се сваки математички задатак може представити на више начине. Када је у питању множења, на избор репрезентација у великој мери утиче и сам контекст задатка. Даље, овај аутор наглашава да избор стратегија множења условљен одабиром репрезентација и да употреба различитих репрезнтација помаже ученицима у разумевању значења множења и развоју менталних стратегија рачунања.

Највећи број аутора истиче једнакобројне групе и предствљање множења преко правоугаоне схеме, чиме ћемо се бавити и у овом раду. Употреба правоугаоних схема је веома корисна репрезентација за развој стратегија множења. Уколико се користи као почетна репрезентација за увођење множења, она треба да истакне кључне компоненте ове рачунске операције, структуру операције множења и повеже се са другим репрезентацијама, јер само на тај начин у потпуности ће допринети разумевању множења (Barmby et al., 2009). Таква употреба репрезентација подстиче и разумевање композитних јединица, значења чиниоца и производа и кључна је за развој мултипликативног мишљења, јер оспособљава за флексибилну поделу бројева и разумевање множења збира бројем (Siemon et al., 2011; Young-Loveridge, 2005; Jacob and Mulligan, 2014).

На Слици 2. је дат приказ увођења множења у италијанским школама, који показује кретање ка симболичком запису и употреби све апстрактнијих репрезентација. Обрада множења на овај начин ствара основу за разумевање различитих значења множења, аритметичких правила, као и везе множења и дељења. За разумевање Декартовог производа погодно је корисити табеле које јасно приказују новодобијене комбинације. Идеја једнакобројних група се на очигледан начин може представити преко правоугаоне схеме и на тај начин се ученици постепено иде ка разумевању оба значења операције множења (Слика 2). Употреба оваквих репрезентација је погодна за разумевање замене места чинилаца.





Слика 2. Репрезентације множења (Warren and Cooper, 2006)

Усвајање множења на основу значења правоугаоне схеме, је једна од кључних репрезентација за множење. Одређивање производа бројева 3 и 5 коришћењем правоугаоне схеме подстичу децу на пребројавање укупног броја елемената уз прескакање (3, 6, 9, 12, 15). Пребројавањем на наведени начин ученици интуитивно проналазе све бројеви чији је садржалац број 3 (Warren and Cooper, 2006).

На Новом Зеланду школски курикулум захтева обавезно коришћење конкретних материјала, као врсте репрезентације у циљу развијања концепуталног разумевања математичких појмова. Они нагласак стављају на коришћење штапића и „аритметичких блокова за представаље декадних јединица (Hurst and Linsell, 2020: 6). Коришћење штапића утиче на концептуално разумевање разломака, односа и пропорција и за разумевање месне вредности цифре. С друге стране, употреба „аритметичких блокова јасно истиче јединице, десетице и стотине што је веома важно при усвајању ових математичких појмова и с те стране погодни су за усвајање рачунских операција у скупу природних бројева до 1000 (Hurst and Linsell, 2020). Истраживање са децом од 4. до 5. разреда уз употребу конкретних материјала (штапића) за множење и дељење показало је да деца успешније решавају задатке множења (78% у односу на 34%). Резултати су показали да само половина ученика при множењу успешно раставља бројеве и то на десетице и јединице, док је само 38% ученика успешно приказивало множење уз помоћ конкретног материјала. Овакви одговори сугеришу да су ученици развили процедурално разумевање стандардног алгоритма (Hurst and Linsell, 2020: 6) и да не разумеју улогу и значај репрезентације, јер при обради множења нису користили репрезентације за представљање множења. У наведеном случају употреба штапића сугерише једнакобројне групе, док се употребом „аритметичких блокова” акценат се ставља на разумевање множења као правоугаоне схеме, при чему се јасно истиче подела бројева на вишеструке декадне јединице и примена и значење аритметичких правила за ефикасно рачунање.

Можемо закључити да при обради множења се могу користити аритметички блокови, односно коцкице за разумевање множења као правоугаоне схеме. Поред наведног, употреба ових манипулативних материјала води ка иконичком

представљању, које је апстрактније и лишено је шума. Они омогућавају структурисање по редовима и колонама, груписање у једнакобројне групе или структурисање по десетицама, што се постиже различитим слагањем коцкица. На овај начин деца истим материјалом на различите начине приказују исти производ, што их подстиче да цртају различите репрезентације, а оне их подстичу на коришћење различитих стратегије. Постепено долази до развоја широког спектра репрезентација и стратегија које оспособљавају ученике за флексибилан и адаптиван избор најприкладније. Када је у питању структурисање производа два броја преко правоугаоне схеме она је корисна у свим семантичким структурама, јер на веома јасан начин истиче структуру реда или колоне, као и једнакобројне групе, односа мерљивих величина и мултипликативног поређења. Сматрамо да је веома важно користити правоугаону схему као репрезентацију за обраду множења, јер временом она постаје све сложенија и ученици је користе са све мање шума.

На почетку обраде множења, у реалној настави почиње се са издвајањем визуелних представа за које везујемо записе у виду производа два броја (Марјановић, 2014) кроз одређене текстуалне проблеме (на 2 руке по 5 прстију, 1 аутомобил са 4 точка и сл.). У почетку, корисно је користити и домине, које су искуствено блиске ученицима, а инутитивно их могу подстицати на различите начине одређивања укупног броја тачкица. Употреба репрезентација захтева и неку врсту пребројавања по скуповима. Истиче се да структура репрезентације треба да буде таква да се јасно уочава који број представља, односно бројност скупа (Marjanović, Mandić, 2009). Марјановић за представљање бројева, као и за аритметичке операције користи структурисане схеме које имају декадну основу. Репрезентације са декадном основом акценат стављају на десетице, што је битно за разумевање стандардног алгоритма за множење двоцифрених бројева, а блиско је искуству ученика, јер се скуп бројева до 10 у нашем Наставном плану и програму упознаје баш кроз репрезентације са декадном основом. Како Марјановић (Марјановић, 1997) истиче циљ је да ученици коришћењем манипулативног материјала јасно уочавају значење операције множења ($m \cdot n$), као и резултат који сагледавају на основу репрезентације, при чему су јасно истакнуте десетице и јединице. С друге стране, на овај начин структурисане репрезентације и репрезентације као правоугаоне схеме су структурално сличне, те код деце истичу значај правилног структурисања елемената скупа у циљу ефикасног рачунања. Такође, употребом наведених репрезентација деца се оспособљавају да бирају прикладнију у зависности од ситуације и структуришу елементе на начин који ће им омогућити

флексибилно одређивање производа бројева. Временом деца прелазе на коришћење апстрактних репрезентација и ментално рачунање користећи све научене стратегије ефикасног и флексибилног рачунања.

Уопште гледано, добро одабране репрезентације које истичу различита значења множења подстичу развој концептуалног разумевања множења што је основа за дуготрајно учење и развој мултипликативног мишљења (Gotze and Baiker, 2020).

2.6. Значај и улога аритметичких правила за разумевање стратегија множења једноцифреним бројем

Разумевање својстава аритметичких операција и њихова употреба у артиметичким релацијама је неопходна за рано учење алгебре, која се односи на продубљивање већ стечених знања, схватање структура и општости у математици, односно на грађење, изражавање и тумачење математичких генерализација (Дабић, 2019: 12). Већина аритметичких стратегије се заснива на примени аритметичких правила, односно на замени места чинилаца, здруживању чинилаца и множењу збира и разлике бројем када је у питању операција множења. Учење свих артиметичких правила треба да обухвати и разумевање значења операције на коју се односе.

Аритметичка правила се могу интуитивно развити кроз употребу мултипликативних стратегија. Разумевање множења збира бројем оспособља ученике за растављање бројева на вишеструке декадне јединице и на растављање бројева према својствима бројева, што је битна одлика менталних интуитивних стратегија које се развијају (Larsson, 2015). Према неким ауторима здруживање чинилаца и множење збира бројем се имлицитно развијају без формалних инструкција, кроз развијање стратегија множења, док се замена места чинилаца теже усваја на наведени начин (Ambrose et al., 2003).

У нашем Наставном плану и програму замена места чинилаца се односи на множење са два броја, а здруживање чинилаца на множење три или више бројева.

Замена места чинилаца се односи на разумевање значење операције множења истакнуте бројвним изразима, а не предметним (скуповним) ситуацијама, где се мора знати шта означава сваки број у запису производа (Дејић и Егерић, 2010: 117). Разумевање замене места чинилаца подразумева могућност менталне реогранизације чиниоца и разумевање непроменљивости коначног резултата (Butterworth, Marchesini

and Girelli). Налази истраживања (Ambrose, Beak, Carpenter, 2003) су показали да мање од трећине испитане деце може да објасни замену места чинилаца, што може бити и последица неадекаватног процеса учења. Истраживања показују да неразумевање замене места чинилаца показује да ученици нису успоставили везу између разумевања значења контекста и математичког записа (Ambrose, Beak, Carpenter, 2003), односно не уочавају сличности и разлике између *n* група од *m* елемената и *m* група од *n* елемената, што се манифестују и приликом дељења. Овакви налази потврђују да се замена места чинилаца не може обрадити кроз задатке који се односе на једнакобројне групе, јер чиниоци имају другачија значење. За разумевање значења замене места чинилаца погодније је користити разумевање множења као правоугаоне схеме и Декартовог производа (Ambrose, Beak, Carpenter, 2003), где чиниоци имају иста значења.

Употреба правоугаоне схеме за разумевање замене места чинилаца на веома очигледан начин приказује наведено аритемтичко правило. Битно је да се разумевње темељи на јасној употреби математичког језика чиме се ствара контекст за разумевање наведеног аритметичког правила. Шифлтер (Schiflter, 2009) исказују важност објашњења примера који се односе на разумевање замене места чинилаца, нарочито када се ово аритметичко правило представља преко правоугаоне схеме, односно потребно је инсистирати на разумевању значења редова и колона и начина њиховог посматрања у стварној ситуацији. Циљ је да ученици уоче да се правоугаоник може окренути и да га можемо посматрати и хоризонтално и вертикално, као и да зависи да ли ћемо прво узимати у обзир редове или колоне. Исти поступак је и при коришћењу иконичких репрезентација.

Коцептуално разумевање подразумева познавање одређеног аритметичко правила на начин који омогућава његово представљање на различите начине уз могућност давања одговарајућег објашњења, као и његову примену у различитим ситуацијама. Уочавање израза у којима је примењена замена места чинилаца или здруживање чинилаца у циљу ефикасног рачунање су показатељи коцепуталног разумевања, што је и један од циљева усвајања ових аритметичких правила у млађим разредима основне школе. Истраживања показују да старији ученици поседују већи степен концептуалног и процедуралног разумевања, али је корелација између примене аритметичких правила за ефикасно рачунања и концептуалног разумевања слаба, што потврђују и други атуори (Anthony and Walshaw, 2002). Овакви резултати показују да усвајањем правила ученици нагласак стављају на процедуру и њихову примену, а не и на концептуално разумевање и примену истих. Истраживања су показала да повезаност

између концептаулног и процедуралног разумевања здруживања чинилаца се повећава повећањем узраста и да млађи ученици интуитивно делимично разумеју ово аритметичко правило (Ritle-Johson et al., 2001). Ранија истраживања су показала да нешколовани бразилски продавци примењују и интуитивно разумеју замену места чинилаца, док енглески ученици која усвајају замену места чинилаца независно од појма множења показују тешкоће у његовом разумевању (Schliemann et al., 1998), што је потврђено и истраживањем код нас. Истраживање у Србији је показала да без обзира што се у другом разреду врши формално увођење здруживања чинилаца и множења збира бројем, множење једноцифрених бројева се своди на стратегије поновљеног сабирања док су остале стратегије занемарене (Zeljić et al., 2019).

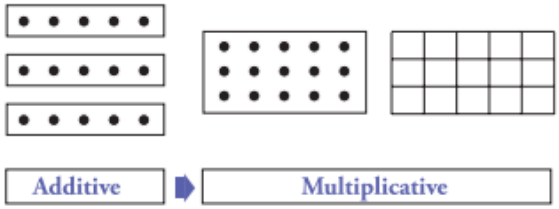
Множење збира и разлике бројем представља једно од веома важних аритметичких правила, зато што омогућава флексибилност приликом рачунања, стварајући основу за разумевање алгебарских једнакости и за извођење генерализација и доказе (Bruner, 1960; Carpenter et al., 2003). Његова примена јавља се приликом учења бинома и линеарних функција. Ранија истраживања су показала да ученици цртањем једнакобројних група, односно применом стратегије поновљеног сабирања интутивно примењују множење збира бројем при множењу вишецифрених бројева (Ambrose et al., 2003; Baek, 2008; Schifter et al., 2008; Schliemann et al., 1998).

У анализи кинеских уџбеника који се користе у 3, 4. и 6. разреду пронађени су различити начин увођења множења збира бројем у млађе разреде основне школе. У већини уџбеника полази се од примера из стварног контекста, где је проблем представљен речима или речима и сликом, а постепено се уводе схематски дијаграми (Ding and Li, 2010). Уочено је да у уџбеницима није заступљен приступ увођења множења збира бројем преко модела правоугаоне схеме који је предложило Национално веће наставника математике 2000. године. Други уочен приступ подразумева коришћење текстуалних задатака, уз одсуство конкретних репрезентација. Веома значајно у овом приступу је постепено увођење закона кроз рад на реалној сиуацији, преко рада на трансформацији израза до симболичког записа овог аритметичког правила. Трансформација израза је значајна због поређења два начина записа израза који представљају множење збира или разлике бројем и воде генерализацији. Репрезентације коришћене за обраду множења збира бројем у овом уџбенику су лишене шума и постепено води ка симболичком запису формуле. Акценат је стављен на ментално рачунање, које подстиче ученике да размишљају о задатом проблему и успоставе везу између перцепције и јасне унутрашње визуелизације.

Како су деца старија тако се повећава и употреба апстрактнијих репрезентација и текстуалних задатака без слике као перцептивне подршке (Ding and Le, 2010). Може се уочити да су у кинеским уџбеницима заступљени конкретни проблеми као полазне основе, које помажу ученицима да схвате асптрактне идеје блиске реалном окружењу у коме се математика на овом узрасту и развија (Gerofsky, 2009). Недостатак овог приступа јесте усмереност на адитивно значење операције множења, односно репрезентације једнакобројних скупова. С друге стране, предност оваквог учења јесте кретање кроз различите репрезентације и поређења израза и репрезентација који олакшавају овај процес. Рад са различитим манипулативним материјалима је неопходан како би ученици разумели множење збира и разлике бројем одвојено од контекста и генерализовали га као аритметичко правила. Овај став су заступали и други аутори који су истакли важност учења аритметичких правила за разумевање аритметике и алгебре (Malara and Navarra, 2005).

Концептуално разумевање појма множења подразумева и разумевање аритметичких правила, што се огледа у способности ученика да један или оба чиниоца раставе на друге чиниоце у циљу ефикасног рачунања, при чему долази до имплицтине примене множења збира бројем што може бити феома функционално у процесу усвајања стандардног алгоритма множења (Larsson et al. 2017: 2).

Разумевање множења збира бројем преко правоугаоне схеме је веома значајно за разумевање алгебре, а најчешће је анализирано кроз истраживања које се баве множењем и мултипликативним мишљењем, али не и одвојено. Хурст (Hurst, 2015) анализирајући развој мултипликативног мишљења даје предлоге репрезентација (Слика 3) које су веома значајне за разумевање замене места чинилаца, као и разумевање множења збира бројем, јер омогућавају ученицима да разумеју својства вишецифрених бројева и различите могућности поделе бројева, што је основа за разумевање алгоритма за множење и дељење (Kinzer and Stanford, 2014).



Слика 3. Правоугаона схема (Hrust, 2015)

Представљање мултипликативних ситуација на овај начин (Слика 3) се може користити и за разумевање значења различитих семантичких структура, као што су и једнакобројне групе, Декартов производ, однос мерљивих величина и слично (Hrust, 2015: 15), што показује да се разумевање множења збира и разлике бројем може везивати за задатке различите семантичке структуре.

Разумевање и примена примене аритметичких правила је од великог значаја за развој ефикасних стратегија множења. Разумевање замене места чинилаца и здруживање чинилаца се најбоље истиче кроз разумевање множења преко правоугаоне схеме. Навдена аритметичка правила деца користе за ефикасно множење у ситуацијама када је погодно један од чинилац раставити на неколико чинилаца, а затим извршити њихову замену у циљу лакшег одређивања производа. С друге стране, сматрамо да се једнакобројне групе и правоугаоне схеме, уз употребу одговарајућих репрезентација које истичу значење множења збира и разлике бројем, могу успешно користити за разумевање овог аритмтичких правила.

II МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА

1. Предмет истраживања

У овом истраживању испитиваћемо карактеристике и ефикасност два модела обраде множења једноцифрених бројева у циљу развоја мултипликативног мишљења у другом разреду основне школе. Разумевање операције множења је основа за развој мултипликативног мишљења које је важан аспект развоја математичког мишљења, као и разумевања дељења, односа, пропорционалног резоновања, мерења, статистике и сл. С друге стране, оно утиче и на развој алгебарског мишљења и оспособља ученике за разумевање свих значења операције множења и проналажење различитих приступа проблему. Множење једноцифрених бројева традиционално се уводи као унија једнакобројних скупова при чему се инсистира на меморисању таблице множења, а разумевање множења ограничено је на поступак поновљеног сабирања, што није довољно за потпуно разумевање значења множења, а које је основа за усвајање других математичких појмова (Baroody, 2003). Увођење значења операције множења на наведен начин представља „пасивно складиштење, односно ученици памете 100 одвојених чињеница и примењују их у решавању проблема (Зељић и Дабић Боричић, 2020). Даље, Баруди (Baroody, 2003) напомиње да овај приступ учења аритметичких операција негативно утиче на развој свих компоненти математичких способности. Битно је да ученици разумеју значење операције и на основу тога развију способност различитог представљања операција множења преко различитих репрезентација које ће створити основу за развој менталних стратегија множења. С друге стране, ученици треба да се оспособе да повезују математичке садржаје и примењују их у различитим ситуацијама, како би се знања током школовања постепено надограђивала. Усвајање аритметичких правила је често изоловано од осталих математичких садржаја и усваја се као посебна целина. Разумевање аритметичких правила је од суштинске важности за разумевање многих математичких појмова и приодно се намеће њихова употреба као основних стратегија рачунања у извођењу аритметичких операција, те са те стране је неоправдано изоловано усвајање аритметичких правила. Њиховом разумевању претходи разумевање значења и структуре броја, која је од суштинске важности за адекватну примену аритметичких правила у циљу флексибилног рачунања, у нашем случају множења. На млађем узрасту циљ је да се ученици оспособе за иконичко

представљање аритметичких правила у циљу њиховог разумевања, као и за процедурално и реторичко представљање како би их успешно користили при усвајању множења једноцфиреним бројем.

Предмет овог истраживања је утврђивање и анализирање утицаја различитих приступа усвајању множења једноцифреним бројем на разумевање значења множења, односно развој мултипликативног мишљења и развој менталних стратегија (научене и интуитивне стратегије).

Аритметичка правила су веома значајна и њихово разумевање омогућава развој флексибилних стратегија рачунања, стварајући основу за разумевање алгебарских једнакости (Bruner, 1960; Carpenter et al., 2003). Полазећи од става наведених аутора осмислили смо први модел који обухвата обраду множења једноцифреним бројем заснованог на примени аритметичких правила, која се уводе одмах на почетку обраде наведене теме. У школском програму математике у Србији предвиђена је обрада аритметичких правила, тако да менталне стратегије могу бити подржане и засноване на формалним правилима. Одређени аутори истичу да је за разумевање значења множења и развој и флексибилно коришћење различитих стратегија множења значајно користити задатке различите семантичке структуре, као и различите репрезентације које утичу на разумевање наведених садржаја (Mulligan and Mitchelmore, 1997; Sherin and Fuson, 2005; Marojoka and Beker, 2014). У складу са ставом ових аутора осмислили смо други модел који обухвата усвајање множења једноцифреним бројем заснованог на значењу операције и примени репрезентација које посматрамо као основу значења поступака и стратегија рачунања.

У оквиру *првог модела* аритметичка правила (замена места чинилаца, здруживање чинилаца и множење збира или разлике бројем/множење броја збиром или разликом) ће се обрадити после увођења знака пута и множења бројем 2, 5 и 10 кроз различите облике представљања (текстуални проблеми, иконичко представљање и процедурално представљање), што ће представљати темељ на коме ће се уводити множење осталим једноцифреним бројевима. Замена места чинилаца ће се обрадити одмах након обраде множења бројем 2. Множење збира и разлике једноцифреним бројем и здруживање чинилаца ћемо обрадити после множења бројевима 5 и 10. За разумевање значења замене места чинилаца користиће се текстуални задаци код којих се јасно истиче структура реда и колоне, односно могу се представити преко правуогане области. За здруживање чинилаца и множење збира и разлике бројем користићемо текстуалне задатке различите семантичке структуре. Аритметичка

правила ћемо представљати пиктограмом и идеограмом, које ће пратити одговарајући симболички записи, односно бројевни изрази.

У овом моделу множење једноцифреним бројевима ће се обрадити кроз задатке различитих семантичких структура и увешће се кроз седам етапа:

- Множење бројем 2 и множење броја 2 које се заснива на стратегији дуплирања;
- Замена места чинилаца;
- Множење бројевима 5 и 10 множење бројева 5 и 10 које се заснива на употреби репрезентација са декадном основом коју су ученици користили у првом разреду и замени места чинилаца, као и примерима који су искуствено блиски деци (број прстију на једној руци);
- Здруживање чинилаца и множење збира и разлике бројем;
- Множење бројевима 3, 4 и 6 и множење бројева 3, 4 и 6;
- Множење бројевима 1 и 0 множење бројева 1 и 0;
- Множење бројевима 7, 8 и 9 множење бројева 7, 8 и 9.

Множење бројевима 3, 4, 6, 7, 8 и 9 ће се обрадити кроз примену аритметичких правила које се односе на операцију множења и примену познатих производа који су резултат множења бројевима 2, 5 и 10. У овом моделу, поред наведеног акценат ће бити стављен и на карактеристике бројева које су уско повезане са употребом аритметичких правила у циљу постизања ефикасности при рачунању и развоја флексибилних стратегија множења. У оба модела, множење бројем 0 и 1 ћемо увести кроз задатке који се односе на једнакобројне групе и правоугаону схему кроз серију примера у којима се смањује број места, односно на истом броју места се смањује број елемената.

У другом моделу користићемо мултипликативне ситуације које обухватају различите семантичке структуре множења: једнакобројне групе, однос мерљивих величина, Декартов производ, мултипликативног поређење и правоугаону схему и две врсте репрезентација: правоугаона схема типа *n пута m* и репрезентације са декадном основом како бисмо развој флексибилних менталних стратегија заснивали на значењу операције и репрезентацијама које се користе. С обзиром, да је у Нашем наставном плану и програму предвиђено истовремено увођење множења броја и множење бројем и у овом моделу ћемо после множења броја и бројем 2 увести замену места чинилаца, како бисмо користили наведено својство за истовремену обраду и разумевање

множења броја и множења бројем. У овом моделу, редослед обраде множења једноцифреним бројем ће се вршити у седам етапа:

- Множење бројем 2 и множење броја 2;
- Замена места чинилаца;
- Множење бројевима 5 и 10 множење бројева 5 и 10;
- Множење бројевима 3 и 4 множење бројева 3 и 4;
- Множење бројевима 1 и 0 множење бројева 1 и 0;
- Множење бројевима 6 и 7 множење бројева 6 и 7;
- Множење бројевима 8 и 9 множење бројева 8 и 9;
- Здруживање чинилаца и множење збира и разлике једноцифреним бројем.

У првим фазама обраде множења једноцифреним бројевима (множење бројевима 2, 5 и 10) ученике ћемо упознати са оба типа репрезентација. Циљ је да у наредним етапама обраде множења ученици самостално теже и бирају прикладнију репрезентацију. За множење бројем 5 и 10 користићемо репрезентација са декадном основом, као и за множење бројем 8 и 9, јер се множење бројем 8 и 9 своди на множење бројем 10 и умањивање резултата за вредност једног чиниоца. Множење бројем 8 се уводи растављањем броја 8 на 5 и 3 или као разлика броја 10 и броја 2. За обраду множења бројевима 3 и 4 користићемо обе врсте репрезентација у зависности од семантичке структуре задатка, јер различите репрезентације усмеравају ученике на различите менталне стратегије рачунања. Задаци који се односе на правоугаону схему и Декартов производ својом струкутуром усмеравају на коришћење правоугаоне схеме, што ћемо и користити. С друге стране, једнакобројне групе, мултипликативно поређење и однос мерљивих величина се могу представити на оба начина у зависности од контекста задатка који усмерава ученике на одређену врсту репрезентације. Код репрезентација са декадном основом, које подстичу употребу различитих стратегија рачунања, очекујемо да ће ученици успешно вршити и растављање другог чиниоца на збир два сабирка или представљање чиноца као разлике два броја при чему ће се инутитивно користити множење збира и разлике бројем и познате производе. Употреба правоугаоне схеме истиче комутативност операције множења и њеном употребом ћемо акценат ставити на развој различитих менталних стратегија множења (стратегије допуњивања засноване на ефикасним техникама сабирања и дуплирања, растављање чиноца на два чиноца и интуитивна примена здруживања чинилаца).

Здруживање чинилаца и множење збира и разлике бројем ће ученици интуитивно усвојити кроз рад са наведена два типа репрезентација, али ће се формално са њима упознати у последњој етапи обраде множења једноцифреним бројем. Правила ће се обрадити на исти начин као и Моделу 1.

Циљ различитог увођења множења једноцифреним бројевима јесте истраживање утицаја различитих приступа множењу на развој мултипликативног мишљења и менталних стратегија множења и испитивање у којој мери и да ли се оне успешно користе и преносе на множење двоцифрених бројева и дељење, односно да ли доприносе развоју и других менталних стратегија.

2. Циљ и задаци истраживања

Циљ истраживања је утврђивање и анализирање ефеката различитих Модела обраде множења једноцифрених бројева на развој менталних стратегија и развој мултипликативног мишљења. Једно од основних питања на које ћемо одговорити јесте улога правила аритметике у развијању стратегија множења. Један поглед истраживача је да ученици треба да буду упознати са аритметичким правилима чија примена омогућава изградњу таблице множења и примену правила као стратегије множења једноцифрених бројева (Fuson, 2003; Van de Walle et al., 2013). Друго виђење истраживача (Kouba, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997 и др.) јесте да увођење аритметичких правила пре развоја стратегија множења није нужно, већ да и млађа деца могу равијати стратегије (интуитивно) на задацима различите семантичке структуре.

Друго питање се односи на систематско поучавање стратегијама. Истраживања (нпр. Sherin and Fuson 2005) показују да у периоду учења множења једноцифрених бројева промене у коришћењу стратегија првенствено треба да буду резултат систематског поучавања. Стил и Фунел (Steel and Funnell 2001) истичу да ученицима треба помоћ како би напредовали од коришћења мање ефикасних стратегија и процедура које су осетљиве на грешке до ефикаснијих стратегија. С обзиром да се множење обрађује у другом разреду, многи аутори сматрају да примена одговарајућих текстуалних задатака и репрезентација подстиче употребу менталних инутитивних стратегија, које се са повећањем узраста развијају (Kouba, 1989, Mulligan, 1992, Carpenter et al., 1993). Хаирдшфајлд и др. (Heirdsfield et al, 1999) сматрају да деца у првим фазама обраде множења користе инутитивно стратегије пребројавања за

множење, а са друге стране Мулиган и Ватсон (Mulligan and Watson, 1998) истичу да је избор менталних инутитивних стратегија условљен семантичком структуром задатка.

Треће питање се односи на коришћење репрезентација и текстуалних задатака различите семантичке структуре. Како би разумели сва значења операције множења и развили менталне стратегије рачунања ученицима је потребно искуства са различитим семантичким стурктурама и репрезентацијама (Anghileri, 1989, Carpenter et al., 1993, Kouba, 1989; Downton and Sullivan, 2017). Контекст задатка близак искуству ученика подстиче развој и примену менталних интутивних стратегија (Koedinger and Nathan, 2004; Van de Heuvel-Panhuizen, 2005). Употреба добрих репрезентација које истичу структуру множења позитивно утиче на развој менталних стратегија множења (Mulligan and Mitchelmore, 1997; Marojoke and Beker, 2014; Lorriane and Mulligan, 2014), те аутори истичу значај употребе правоугаоне схеме као репрезентације (Warren and Cooper, 2006; Fuson and Bekmann; Hurrest 2015; Schiflter, 2009) и репрезентација са декадном основом (Марјановић, 2014) за разумевање множења и развој менталних стратегија, као и значења операције множења, односно развој мултипликативног мишљења.

Разумевање значења операције множења и поседовање менталних интуитивних стратегија пре увођења Модела ћемо проверавати кроз способност ученика да:

1. Састављају бројевне изразе који одговарају задатој репрезентацији и израчунавају њихову вредност;
2. Примене менталне интутивне –стратегије за одређивање вредности израза;
3. Избор стратегије врше у зависности од репрезентације која је дата и коришћених бројева.

Ефикасност Модела ћемо проверавати кроз:

1. Препознавање различитих мултипликативних ситуација кроз задатке различите семантичке структуре (једнакобројне групе, однос мерљивих величина, мултипликативно поређење, Декартов производ и правоугаона схема);
2. Разумевање и креирање репрезентација за изражавање различитих мултипликативних ситуација;
3. Разумевање и креирање репрезентација које подстичу употребу одговарајућих стратегија рачунања и ефикасно рачунање;
4. Коришћење различитих стратегија рачунања у циљу постизања ефикасности у рачунању;

5. Флексибилност у избору стратегија рачунања и прилагођавање стратегија структури проблема;
6. Примена знања на проблемима множења двоцифрених бројева, дељења двоцифреног броја једноцифреним бројем и испитвање менталних интуитивних стратегија кроз различите мултипликативне ситуације;
7. Примену аритметичких правила у циљу примене одговарајуће стратегије и ефикасног множења једноцифреним бројевима;
8. Уочавање и исправљање грешака у рачуну.

Задаци истраживања:

1. Испитати у ком степену ученици другог разреда интуитивно разумеју значење појма множења пре увођења Модела кроз иконичко представљање и примењују га за решавање задатака.
2. Испитати које менталне интуитивне стратегије ученици другог разреда користе пре увођења Модела.
3. Испитати утицај инструкција заснованих на значењу појма множења и употреби репрезентација на развој менталних стратегија множења једноцифреним бројем.
4. Испитати утицај поучавања аритметичких правила на развој менталних стратегија множења једноцифреним бројем.
5. Испитати различите нивое разумевање значења множења у зависности од семантичких структура задатка и њихов утицај на избор менталних интуитивних стратегија.
6. Испитати како примена наведених Модела утиче на развој менталних стратегија множења двоцифрених и једноцифрених бројева, множење двоцифрених бројева у скупу природних бројева до 1000.
7. Испитати како примена наведених Модела утиче на разумевање значења дељења и развој менталних интуитивних стратегија дељења двоцифрених бројева једноцифреним бројевима у скупу природних бројева до 100.
8. Испитати разумевање стратегија множења кроз исправљање грешака у рачуну.

3. Варијабле у истраживању

Зависна варијабла: Постигнућа ученика

Независна варијабла: Модел усвајања множења једноцифреним бројем заснован на примени аритметичких правила и Модел усвајања множења једноцфиреним бројем заснован на значењу и репрезентацијама

4. Методе, технике и инструменти истраживања

Истраживање је из области методике наставе математике и с обзиром на методологију која ће бити примењена оно је емпиријског карактера. Користиће се метод експеримента са две експерименталне групе и једном контролном групом. У експерименталним групама подучавање по Моделу 1 и Моделу 2 спровешће аутор, намерним изазивањем и праћењем појава које се испитују, док у контролној групи неће бити утицаја експерименталног фактора.

Од истраживачких техника користиће се *тестирање* за утврђивање разумевање значења операције множења кроз задатке различитих семантичких структура и употребу различитих репрезентација и *интервју* за утврђивање коришћених менталних интутивних стратегија. За потребе истраживања биће конструисани следећи инструменти: иницијални тест и интервју, завршни тест знања за анализу појава које се испитују и интервју и завршни тест за испитивање трансфера знања и интервју.

5. Структура и садржај тестова знања

Иницијални тест знања чини 14 задатака, који су подељени на две целине: разумевање значења множења кроз различите репрезентације и разумевање множења кроз задатке различитих семантичких структура.

- Први, други, трећи и четврти задатак проверавају колико ученици разумеју значење операције множење. Другим и трећим задатком се проверава које менталне инутивне стратегије ученици поседују пре обраде множења једноцифреним бројем.

- Остали задаци се односе на разумевање различитих значења множења који су исказани кроз различите семантичке структуре (Пети и шести задатак се односе на разумевање множења као једнакобројних група, седми и осми задатак се односе на разумевање множења као односа мерљивих величина, девети и десети задатак се односе на мултипликативно поређење, а једанаести и дванаести на множење као правоугаону схему, док тринаести и четрнаести задатак обухватају Декартов производ).

Поред теста знања, иницијално тестирање обухвата и интервју којима ће испитати које менталне интуитивне стратегије ученици користе за множење једноцифреним бројевима у контексту и без контекста пре његовог увођења.

Завршни тест знања чини 15 задатака, који су подељени на две целине: разумевање значења множења кроз репрезентације и разумевање множења кроз задатке различитих семантичких структура.

- Први, други, трећи и четврти задатак проверавају разумевање значење операције множење. Другим и четвртим задатаком под а) се проверава које све менталне инутивне стратегије ученици користе након усвајања множења једноцифреним бројем и како репрезентације утичу на избор стратегије. Трећи задатак и четврти задатак под б) проверавају разумевање значења множења, али и примену множења збира бројем у циљу ефикасног рачунања.
- Остали задаци се односе на разумевање различитих значења множења који су исказани кроз различите семантичке структуре (пети и шести задатак се односе на разумевање множења као једнакобројних група, седми и осми задатак се односе на разумевање множење као односа мерљивих величина, девети и десети на мултипликативно поређење, једанаести и дванаести се односе на посматрање множења као правоугаону схему, а тринаести и четрнаести на Декартов производ). Ови задаци показују како значење утиче на разумевање множења, али испитују и њихов утицај на избор менталних стратегија множења. Пажљивим одабиром бројева циљ је да се испита и утицај бројева на избор менталне стратегије множења. Шести задатак обухвата множење разлике бројем, а формулисан је тако да стурктура задатка ученике упућује на коришћење наведеног правила у циљу ефикасног рачунања. Десети и дванаести задатак захтевају примену здруживања чинилаца како би се рачунање задржало на нивоу множења

једноцифреним бројевима и његов циљ је и испитивање примене наведеног аритметичког правила у циљу ефикасног рачунања. Једанаести задатак обухвата множење збира бројем и циљ је испитивање у којој мери оваква структура задатка утиче на избор одговарајуће стратегије и ефикасно рачунање. Испитивањем разумевања множења кроз текстуалне задатке проверава се да ли ученици користе самостално репрезентације да би израчунали вредност израза или рачунање врше ментално.

- Последњи задатак се односи на исправљање грешака насталих при множењу једноцифреним бројем применом одређених стратегија рачунања.

Завршни тест знања обухвата и интервју којима ће испитати које менталне стратегије ученици користе за множење једноцифреним бројевима после обраде множења једноцифреним бројем у задацима без контекста. Битно је да ученици израз посматрају као самостални објекат и да на основу својстава израза и бројева примене адекватну менталну стратегију.

Други завршни тест је конструисан да би се прикупили подаци о постајању трансфера знања о менталним стратегијама множења једноцифреним бројем на менталне стратегије множења двоцифрених бројева у скупу природних бројева до 1000 и на менталне стратегије дељење двовифрених бројева једноцифреним бројем. Задаци који се односе на множење и дељење обухватају исте семантичке структуре, као и задаци у завршном тесту 1. Циљ нам је био да испитамо у којој мери подучаване менталне стратегије множења једноцифреним бројем дају трансфер на развој и примену менталних стратегија множења двоцифрених бројева и дељења двоцифрених бројева једноцифреним бројем. Пети задатак се односи на пропорционално резоновање, које је важан сегмент мултипликативног мишљења. Таквим задатком смо желели да испитамо колико претходно стечено знање о значењу операције множења даје трансфер знања на друге мултипликативне ситуације. Десети и једанаести задатак захтевају препознавање и примену дељења и множења у задатку, с обзиром да се јављају обе операције. Кроз ове задатке желели смо да испитамо у којој мери развијеност мултипликативног мишљења у операцији множења даје трансфер на развијеност целокупног мултипликативног мишљења, које према многим ауторима обухвата сва значења аритметичких операција множење и дељење.

Уопште гледано, кроз све наведене садржаје обухватиће се и испитивање развоја математичке креативности која се односи на откривање непознатог и

приступање математичким проблемима на другачији начин, у циљу што флексибилнијег и ефикаснијег решавања математичких проблема.

6. Узорак истраживања

Узорак истраживања обухвата три одељења другог разреда Основне школе „Бранко Радичевић из Новог Београда. Једно одељење чини контролну групу, а два одељења чине експерименталне групе. У настави се користи уџбеник Математика 2 издавача „Едука, а настава се реализује према Плану реализације наставе у случају непосредне ратне опасности, ратног стања, ванредног стања или других ванредних ситуација и околоности за основну школу који издаје Завод за унапређење образовања и васпитања.

7. Организација и ток истраживања

Истраживања ће бити реализовано у периоду од децембра 2021. године до фебруара 2022. године. Обухватаће следеће етапе:

1. Креирање два модела усвајања множења једноцифреним бројевима;
2. Иницијално тестирање;
3. Реализација наставних часова по два моделу усвајања множења једноцифреним бројевима (укупно ће бити реализовано 32 часа);
4. Завршно тестирање 1;
5. Завршно тестирање 2 којим се испитује трансфер знања на множење двоцифреним бројевима у скупу природних бројева до 100 и у скупу природних бројева до 1000, као и трансфер стратегија множења на стратегије дељења.

Узимајући у обзир теоријске оквире истраживања, развијена су два модела усвајања множења једноцифреним бројевима, тако да обухватају:

1. Усвајање множења једноцифреним бројевима засновано на разумевању и примени аритметичких правила;
2. Усвајање множења једноцифреним бројевима кроз значење и примену репрезентација;

Литература:

1. Anghileri, J., Beishuizen, M. & Van Putten, K. (2002). From informaln strategies to structured procedures: mind the gap!. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 149–170.
2. Ambrose, R., Baek, J.M. & Carpenter, T. P. (2003). *Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms.* In: A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.). *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (305–336). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
3. Butterworth, B., Marchesini, N. & Girelli, L. (2003). Basic Multiplication Combinations: Passive Storage or Dynamic Reorganization? In: Baroody, A. & Dowker, A. (Eds.). *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise* (189–202). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
4. Barmby, P. and Harries, T. and Higgins, S. and Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational studies in mathematic*, 70 (3), 217–241.
5. Barmby, P. & Harries, T. (2006). Representating Multiplication. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 26 (3), 25–30.
6. Baroody, J. (2006). Why Children Have Difficulties Mastering the Basic Number Combinations and How to Help Them. *Teaching Children Mathematics*, 22–31.
7. Blote, A., Klein, A., Beishuizen, M. (2000). Mentaln computation and conceptual understanding. *Lerning and Instruction*, 10, 221–247.
8. Breed, M. (2011). *Constucting Path to Multiplicative Thinking: Breaking Down the Barriers.* RMIT University.
9. Clark, F. & Kamii, C. (1996). Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1–5. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (1), 41–51.
10. Day, L. & Hurrel, D. (2015). An explanation for the use of arrays to promote the understanding of mental strategies for multiplication. *Applied Mathematics and Computation*, 20 (1), 20–23.
11. Downton, A. (2008). Links Between Children's Understanding of Multiplication and Solution Strategies For Division. In: M. Goos, R. Brown & K. Makar (Eds.). *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 171–178.
12. Downton, A. & Sullivan, P. (2017). Posing complex problems requiring multiplicative thinking prompts students to use sophisticated strategies and build mathematical connections. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 303–328.
13. Đokić, O. (2017). *Realno okruženje u početnoj nastavi geometrije*. Beograd: Učiteljski fakultet
14. Greer, B. (1992). Multiplication and Division as Models of Situations. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 276–295.
15. Götze, D. (2019). Language-Sensitive Support of Multiplication Concepts Amnog at-Risk Children: A Qualitative Didactical Design Research Case Study. *A Contemporary Journal*, 17 (2), 165–182.
16. Götze, D. & Baiker, A (2020). Language-responsive support for multiplicative thinking as unitizing: results of an intervention study in the second grade. *ZDM: the international journal on mathematics education, 53 (4).*

17. Götze, D. (2020). The importance of a meaning-related language for understanding multiplication. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University*.
18. Fisher, J., Villete, B., Joffredo-Lebrun, S., Moellato, M., Normand, C., Scheilbling-Seve, C. & Richard, J. (2019). Should we continue to teach standard written algorithms for the arithmetical operations? The example of subtraction. *Educational Studies in Mathematics,* 101, 105–121.
19. Fishbein, E., Deri, M., Sainati Nello, M. & Sciolis Marino, M. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Divison. *Journal for Research in Mathematics Education,* 16 (1), 3–17.
20. Fuson, K. & Beckmann, S. (2012–2013). Standard Algorithms in the Common Core State Standards. *NCSM Journal*, 14–30.
21. Илић, С. и Зељић, М. (2017). Правила сталности збира и разлике као основа стратегије рачунања. *Иновације у настави,* XXX (1), 55–66.
22. Harries, A. & Barmby, P. (2007). Representing and understanding multiplication. *Research in Mathematics Education,* 9 (1), 33–46.
23. Heirdsfield, A., Cooper, T., Mulligan, J. & Irons, C. (1999). Children's mental multiplication and division strategies. In Zaslavsky, Orit, Eds. *Proceedings of the 23rd Psychology of Mathematics Education Conference*, 89–96.
24. Heirdsfield, A., Cooper, T. & Irons, C. (1999). Traditional Pen-and-paper VS Mental Approaches to Computation: The Lessoon of Adrien. *Presented at the AARE Annual Conference in Melbourne, 460*–467.
25. Hurst, C. (2015). The multiplicative situation. *Applied Mathematics and Computation,* 20 (3), 10–16.
26. Hurst, C. & Hurrel, D. (2016). Investigating Children`s Multiplicative Thinking: Implications for Teaching. *European Journal of STEM Education,* 1:3, 56, 1–11.
27. Hurst, C. & Hurrel, D. (2018). Algorithms are useful: Understanding them is even better! *Applied Mathematics and Computation,* 23 (3), 17–21.
28. Hurst, C. & Linsell, C. (2020). Manipulatives and Multiplicative Thinking. *European Journal of STEM Education,* 5(1), 04.
29. Jacob, L. & Willis, S. (2003). The Development of Multiplicative Thinking in Young Children. *Proceedings of the 26th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia.*
30. Jacob, L. & Willis, S. (2003). Recognising the Difference Between Additive and Multiplicative Thinking in Young Children. *Proceedings of the 24th Annual MERGA Conference,* 306–312.
31. Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y. & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior,* 36, 20–32.
32. Kosko, K. (2020). The multiplicative meaning conveyed by visual representations. *Journal of Mathematical Behavior,* 60, 1–18.
33. Larsson, K. (2016). *Students` understanding of multiplication*. Stockholm University: Department of Mathematics and Science Education.
34. Larsson, K. (2015). Connections for Learning Multiplication. *Conference: International Symposium for Elementary Mathematics Teaching,* 202–211.
35. LeFevre, J. A., Smith-Chant, B., Hiscock, K., Daley, k. & Morris, J. (2003). Young Adults' Strategic Choices in Simple Arithmetic: Implications for the Development of Mathematical Representations In: Baroody, A. & Dowker, A. (Eds.). *The Development of Arithmetic*

Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise (203–228). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
36. Lu, L., & Richardson, K. (2018). Understanding children's reasoning in multiplication problem solving. *Investigations in Mathematics Learning, 10*(4), 240–250.
37. Malola, M. & Stephens, M. (2019). From additive to multiplicative thinking: Key ideas for teaching. *The Mathematical Association of Victoria,* 82–87.
38. Malola, M., Symons, D. & Stephens, M. (2020). Supporting students` transition from additive to multiplicative thinking: A complex pedagogical challenge. *Applied Mathematics and Computation,* 25 (2), 31–36.
39. Марјановић. М. (1997). Схематско учење таблице сабирања и множења – штапићи као дидактички материјал. *Настава математике,* XLII (3–4), 1–20.
40. Марјановић. М. (2014). Један приступ извођењу наставе аритметике, IV. *Настава математике,* LIX (4), 1–16.
41. Марјановић, М. (2016). *Структурисање садржаја школске аритметике*. Београд: Српска академија наука и уметности.
42. Mulligan, J. & Watson, J. (1998). A Developmental Multimodal Model for Multiplication and Division. *Mathematics Education Research Journal,* 10 (2), 61–86.
43. Mulligan, J. (1992). Children's Solutions to Multiplication and Division Word Problems: A Longitudinal Study. *Mathematics Education Research Journal,* 4 (1), 24–41.
44. Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children‘s intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 309–331.
45. Mulligan, J., Kemp, C. & Highfield, K. (2008). Encouraging Mathematical Thinking through Pattern & Structure: An Intervation in the First Years of Schooling. *Australian Primary Mathematics Classroom,* 13 (3), 10–15.
46. Mulligan, J. & Jacob, L. (2014). Using Arrays To Build Towars Multiplicative Thinking in the Early Years. *Australian Primary Mathematics Classroom,* 19 (1), 35–40.
47. Nadjafikhah, M., Yaftian, N. & Bakhshalizadeh, S. (2012. Mathematical creativity: some definitions and characteristics. *Procedia – Social and Behavioral Sciences,* 31, 285–291.
48. Newton, K., Lange, K. & Booth, J. (2019). Mathematical Flexibility: Aspects of a Continuum and the Role of Prior Knowledge. *The Journal of Experimental Education,* 88 (2), 1–13.
49. Park, J.H. & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development,* 16, 763–773.
50. Pravilnik o programu nastave i učenja za drugi razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja (2018). *Službeni glasnik,* 16.
51. Rittle-Johnson, B. & Lynch, K. (2009). The role of prior knowledge in the development of strategy flexibility: The case of computational estimation. *The International Journal on Mathematics Education,* 41 (5), 569–579.
52. Siemon, D., Breed, M. & Virgona, J. (2005). From additive to multiplicative thinking – The big challenge of the middle years. In J. Mousley, L Bragg, & C. Campbell, (Eds.) *Mathematics – Celebrating Achievement, Proceedings of the 42nd Conference of the Mathematical Association of Victoria,* Melbourne: MAV.
53. Siemon, D., Izard, J., Breed, M. & Virgona, J. (2006). The Derivation of a Learning Assesment Framework for Multiplicative Thinking. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Eds.). *Proceedings of the 30th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education – Mathematics in the centre*, 113-120.
54. Sherin, B. & Fuson, K. (2005). Multiplication Strategies and the Appropriaton of Computational Resources. *Journal for Research in Mathematics Education,* 36 (4), 347–395.

55. Torbeyns, J., Verschaffel. L. & Ghesquiere, P. (2006). The development of children's adaptive expertise in the number domain 20 to 100. *Cognition and Instruction*, 24 (4), 439–465.
56. Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquiere, P. & Verschaffel, L. (2009). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 1–17.
57. Threlfall, J. (2002). Flexible Mental Calculation. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 29–47.
58. Threlfall, J. (1998). Are Mental Calculation Strategies Really Strategies? Bills, L. (EDs.). *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18 (3), 71–76.
59. Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, XXIV (3), 335–359.
60. Young-Loveridge, J. & Mills, J. (2008). Supporting Multiplicative Thinking: Multi-digit Multiplication Using Array-based Materials. *Findings from the New Zealand Numeracy Development Projects, 48*–64.
61. Young-Loveridge, J. (2005). Fostering Multiplicative Thinking: Using Array-based Materials. *Australian Mathematics Teacher*, 61 (3), 34–40.
62. Young-Loveridge, J. (2005). A Developmental Perspective on Mathematics Teaching and Learning : The Case of Multiplicative Thinking. *Teachers and Curriculum, 8*, 49–58.
63. Young-Loveridge, J. (1999). The Acquisition of Numeracy. *Research Information for Teachers*, 1 (12), 1–7.
64. Young-Loveridge, J. & Bicknell, B. (2015). Using Multiplication and Division Contexts to Build Place-value Understanding . Sun, X., Kaur, B., Novtona, J. (Eds). *Proceeding of ICMI STUDY 23: primary mathematics study on whole number*, 379–386.
65. Зељић,М. и Дабић, М. (2014). Однос процедуралног и концептуалног знања ученика у процесу овладавања поступцима рачунања у почетној настави математике, *Настава и васпитање*, год. LXIII, бр 4, стр. 653 – 668.
66. Зељић, М., Илић, С. и Јелић, М. (2017). Ментална аритметика – стратегије одузимања. *Иновације у настави,* XXX (4), 49–61.
67. Зељић, М. и Дабић Боричић, М. (2020). Уџбеник у функцији развоја мултипликативног мишљења. У: З. Опачић и Г. Зељић (ур.). *Програмске (ре)форме у образовању и васпитању – изазови и перспективе*, Београд: Учитељски факултет, 393–405.
68. Зељић, М. (2021). *Учење и поучавање математике – једнакост са више (не)познатих.* Београд: Учитељски факултет.
69. Warner, L., Alcock, L., Coppolo, J. & Davis, G. (2003). How does flexible mathematical thinking contribute to the growth of understanding? In N.A. Pateman, B.J. Dougherty & J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Seventh Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the Twenty-fifth Conference of the National Group for the Psychology of Mathematics Education, Honolulu, Hawaii*, 4, 371–378.

Прилог 1

Списак објављених научних и стручних радова

1. Начини разумевања разломака у почетној настави математике. *Методичка теорија и пракса,* XVIII, број 1/2018, 31–44;
2. Математичке активности у функцији развоја почетних геометријских појмова. *Методичка теорија и пракса,* XIX, број 1/2019, 21–30.
3. Разумевање разломака ученика четвртог разреда основне школе. *Норма,* XXV, 2/2020, 217–239.
4. Утицај различитих наставних стратегија и контекста учења на развој математичке даровитости деце нижег школског узраста (2019). У Гојков, Г. и Стојановић, А. (ур.), Тематски зборник 24, *Достигнућа и перспективе у образовању даровитих* (352–369). Вршац: Висока школа струковних студија за васпитаче „Михаило Палов”.

Прилог 2

Учешће у научним и стручним скуповима

1. Међународни научном скупу „Савремени приступи у професионалном развоју и раду васпитача и учитеља (2018) (презентован рад на тему *Начини разумевања разломака у почетној настави математике*
2. 24. Међународни округли сто о даровитости „Достигнућа и перспективе у образовању даровитих (2018) (рад на тему *Утицај различитих наставних стратегија и контекста учења на развој математичке даровитости деце нижег школског узраста*)

Прилог 6

Списак литературе релевантне за израду докторске дисертације

1. Anghileri, J., Beishuizen, M. & Van Putten, K. (2002). From informaln strategies to structured procedures: mind the gap!. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 149–170.
2. Ambrose, R., Baek, J.M. & Carpenter, T. P. (2003). *Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms.* In: A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.). *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (305–336). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
3. Butterworth, B., Marchesini, N. & Girelli, L. (2003). Basic Multiplication Combinations: Passive Storage or Dynamic Reorganization? In: Baroody, A. & Dowker, A. (Eds.). *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise* (189–202). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
4. Barmby, P. and Harries, T. and Higgins, S. and Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational studies in mathematic*, 70 (3), 217–241.
5. Barmby, P. & Harries, T. (2006). Representating Multiplication. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 26 (3), 25–30.
6. Baroody, J. (2006). Why Children Have Difficulties Mastering the Basic Number Combinations and How to Help Them. *Teaching Children Mathematics*, 22–31.
7. Blote, A., Klein, A., Beishuizen, M. (2000). Mentaln computation and conceptual understanding. *Lerning and Instruction*, 10, 221–247.
8. Breed, M. (2011). *Constucting Path to Multiplicative Thinking: Breaking Down the Barriers.* RMIT University.
9. Clark, F. & Kamii, C. (1996). Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1–5. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (1), 41–51.
10. Day, L. & Hurrel, D. (2015). An explanation for the use of arrays to promote the understanding of mental strategies for multiplication. *Applied Mathematics and Computation*, 20 (1), 20–23.
11. Downton, A. (2008). Links Between Children's Understanding of Multiplication and Solution Strategies For Division. In: M. Goos, R. Brown & K. Makar (Eds.). *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 171–178.
12. Downton, A. & Sullivan, P. (2017). Posing complex problems requiring multiplicative thinking prompts students to use sophisticated strategies and build mathematical connections. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 303–328.
13. Đokić, O. (2017). *Realno okruženje u početnoj nastavi geometrije*. Beograd: Učiteljski fakultet
14. Greer, B. (1992). Multiplication and Division as Models of Situations. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 276–295.
15. Götze, D. (2019). Language-Sensitive Support of Multiplication Concepts Amnog at-Risk Children: A Qualitative Didactical Design Research Case Study. *A Contemporary Journal*, 17 (2), 165–182.

16. Götze, D. & Baiker, A (2020). Language-responsive support for multiplicative thinking as unitizing: results of an intervention study in the second grade. *ZDM: the international journal on mathematics education, 53 (4).*
17. Götze, D. (2020). The importance of a meaning-related language for understanding multiplication. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University*.
18. Fisher, J., Villete, B., Joffredo-Lebrun, S., Moellato, M., Normand, C., Scheilbling-Seve, C. & Richard, J. (2019). Should we continue to teach standard written algorithms for the arithmetical operations? The example of subtraction. *Educational Studies in Mathematics,* 101, 105–121.
19. Fishbein, E., Deri, M., Sainati Nello, M. & Sciolis Marino, M. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Divison. *Journal for Research in Mathematics Education,* 16 (1), 3–17.
20. Fuson, K. & Beckmann, S. (2012–2013). Standard Algorithms in the Common Core State Standards. *NCSM Journal*, 14–30.
21. Илић, С. и Зељић, М. (2017). Правила сталности збира и разлике као основа стратегије рачунања. *Иновације у настави,* XXX (1), 55–66.
22. Harries, A. & Barmby, P. (2007). Representing and understanding multiplication. *Research in Mathematics Education,* 9 (1), 33–46.
23. Heirdsfield, A., Cooper, T., Mulligan, J. & Irons, C. (1999). Children's mental multiplication and division strategies. In Zaslavsky, Orit, Eds. *Proceedings of the 23rd Psychology of Mathematics Education Conference,* 89–96.
24. Heirdsfield, A., Cooper, T. & Irons, C. (1999). Traditional Pen-and-paper VS Mental Approaches to Computation: The Lessoon of Adrien. *Presented at the AARE Annual Conference in Melbourne, 460*–467.
25. Hurst, C. (2015). The multiplicative situation. *Applied Mathematics and Computation,* 20 (3), 10–16.
26. Hurst, C. & Hurrel, D. (2016). Investigating Children`s Multiplicative Thinking: Implications for Teaching. *European Journal of STEM Education,* 1:3, 56, 1–11.
27. Hurst, C. & Hurrel, D. (2018). Algorithms are useful: Understanding them is even better! *Applied Mathematics and Computation,* 23 (3), 17–21.
28. Hurst, C. & Linsell, C. (2020). Manipulatives and Multiplicative Thinking. *European Journal of STEM Education,* 5(1), 04.
29. Jacob, L. & Willis, S. (2003). The Development of Multiplicative Thinking in Young Children. *Proceedings of the 26th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia.*
30. Jacob, L. & Willis, S. (2003). Recognising the Difference Between Additive and Multiplicative Thinking in Young Children. *Proceedings of the 24th Annual MERGA Conference,* 306–312.
31. Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y. & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior,* 36, 20–32.
32. Kosko, K. (2020). The multiplicative meaning conveyed by visual representations. *Journal of Mathematical Behavior,* 60, 1–18.
33. Larsson, K. (2016). *Students` understanding of multiplication*. Stockholm University: Department of Mathematics and Science Education.
34. Larsson, K. (2015). Connections for Learning Multiplication. *Conference: International Symposium for Elementary Mathematics Teaching,* 202–211.

35. LeFevre, J. A., Smith-Chant, B., Hiscock, K., Daley, k. & Morris, J. (2003). Young Adults' Strategic Choices in Simple Arithmetic: Implications for the Development of Mathematical Representations In: Baroody, A. & Dowker, A. (Eds.). *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise* (203–228). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
36. Lu, L., & Richardson, K. (2018). Understanding children's reasoning in multiplication problem solving. *Investigations in Mathematics Learning, 10*(4), 240–250.
37. Malola, M. & Stephens, M. (2019). From additive to multiplicative thinking: Key ideas for teaching. *The Mathematical Association of Victoria,* 82–87.
38. Malola, M., Symons, D. & Stephens, M. (2020). Supporting students` transition from additive to multiplicative thinking: A complex pedagogical challenge. *Applied Mathematics and Computation,* 25 (2), 31–36.
39. Марјановић. М. (1997). Схематско учење таблице сабирања и множења – штапићи као дидактички материјал. *Настава математике,* XLII (3–4), 1–20.
40. Марјановић. М. (2014). Један приступ извођењу наставе аритметике, IV. *Настава математике,* LIX (4), 1–16.
41. Марјановић, М. (2016). *Структурисање садржаја школске аритметике*. Београд: Српска академија наука и уметности.
42. Mulligan, J. & Watson, J. (1998). A Developmental Multimodal Model for Multiplication and Division. *Mathematics Education Research Journal,* 10 (2), 61–86.
43. Mulligan, J. (1992). Children's Solutions to Multiplication and Division Word Problems: A Longitudinal Study. *Mathematics Education Research Journal,* 4 (1), 24–41.
44. Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children‘s intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28, 309–331.
45. Mulligan, J., Kemp, C. & Highfield, K. (2008). Encouraging Mathematical Thinking through Pattern & Structure: An Intervation in the First Years of Schooling. *Australian Primary Mathematics Classroom,* 13 (3), 10–15.
46. Mulligan, J. & Jacob, L. (2014). Using Arrays To Build Towars Multiplicative Thinking in the Early Years. *Australian Primary Mathematics Classroom,* 19 (1), 35–40.
47. Nadjafikhah, M., Yaftian, N. & Bakhshalizadeh, S. (2012. Mathematical creativity: some definitions and characteristics. *Procedia – Social and Behavioral Sciences,* 31, 285–291.
48. Newton, K., Lange, K. & Booth, J. (2019). Mathematical Flexibility: Aspects of a Continuum and the Role of Prior Knowledge. *The Journal of Experimental Education,* 88 (2), 1–13.
49. Park, J.H. & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development,* 16, 763–773.
50. Pravilnik o programu nastave i učenja za drugi razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja (2018). *Službeni glasnik*, 16.
51. Rittle-Johnson, B. & Lynch, K. (2009). The role of prior knowledge in the development of strategy flexibility: The case of computational estimation. *The International Journal on Mathematics Education,* 41 (5), 569–579.
52. Siemon, D., Breed, M. & Virgona, J. (2005). From additive to multiplicative thinking – The big challenge of the middle years. In J. Mousley, L Bragg, & C. Campbell, (Eds.) *Mathematics – Celebrating Achievement, Proceedings of the 42nd Conference of the Mathematical Association of Victoria*, Melbourne: MAV.
53. Siemon, D., Izard, J., Breed, M. & Virgona, J. (2006). The Derivation of a Learning Assesment Framework for Multiplicative Thinking. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Eds.). *Proceedings of the 30th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education – Mathematics in the centre*, 113-120.

54. Sherin, B. & Fuson, K. (2005). Multiplication Strategies and the Appropriaton of Computational Resources. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (4), 347–395.
55. Torbeyns, J., Verschaffel. L. & Ghesquiere, P. (2006). The development of children's adaptive expertise in the number domain 20 to 100. *Cognition and Instruction*, 24 (4), 439–465.
56. Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquiere, P. & Verschaffel, L. (2009). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 1–17.
57. Threlfall, J. (2002). Flexible Mental Calculation. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 29–47.
58. Threlfall, J. (1998). Are Mental Calculation Strategies Really Strategies? Bills, L. (EDs.). *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18 (3), 71–76.
59. Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, XXIV (3), 335–359.
60. Young-Loveridge, J. & Mills, J. (2008). Supporting Multiplicative Thinking: Multi-digit Multiplication Using Array-based Materials. *Findings from the New Zealand Numeracy Development Projects, 48*–64.
61. Young-Loveridge, J. (2005). Fostering Multiplicative Thinking: Using Array-based Materials. *Australian Mathematics Teacher*, 61 (3), 34–40.
62. Young-Loveridge, J. (2005). A Developmental Perspective on Mathematics Teaching and Learning : The Case of Multiplicative Thinking. *Teachers and Curriculum, 8*, 49–58.
63. Young-Loveridge, J. (1999). The Acquisition of Numeracy. *Research Information for Teachers*, 1 (12), 1–7.
64. Young-Loveridge, J. & Bicknell, B. (2015). Using Multiplication and Division Contexts to Build Place-value Understanding . Sun, X., Kaur, B., Novtona, J. (Eds). *Proceeding of ICMI STUDY 23: primary mathematics study on whole number*, 379–386.
65. Зељић,М. и Дабић, М. (2014). Однос процедуралног и концептуалног знања ученика у процесу овладавања поступцима рачунања у почетној настави математике, *Настава и васпитање*, год. LXIII, бр 4, стр. 653 – 668.
66. Зељић, М., Илић, С. и Јелић, М. (2017). Ментална аритметика – стратегије одузимања. *Иновације у настави,* XXX (4), 49–61.
67. Зељић, М. и Дабић Боричић, М. (2020). Уџбеник у функцији развоја мултипликативног мишљења. У: З. Опачић и Г. Зељић (ур.). *Програмске (ре)форме у образовању и васпитању – изазови и перспективе*, Београд: Учитељски факултет, 393–405.
68. Зељић, М. (2021). *Учење и поучавање математике – једнакост са више (не)познатих.* Београд: Учитељски факултет.
69. Warner, L., Alcock, L., Coppolo, J. & Davis, G. (2003). How does flexible mathematical thinking contribute to the growth of understanding? In N.A. Pateman, B.J. Dougherty & J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Seventh Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the Twenty-fifth Conference of the National Group for the Psychology of Mathematics Education, Honolulu, Hawaii*, 4, 371–378.