УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

УЧИТЕЉСКИ ФАКУЛТЕТ

Рада М. Шћепановић

ПОСТАВЉАЊЕ ПРОБЛЕМА У ЦИЉУ ВРЕДНОВАЊА МАТЕМАТИЧКИХ ЗНАЊА

докторска дисертација

Београд, 2022.

UNIVERSITY OF BELGRADE
TEACHER EDUCATION FACULTY

Rada M. Šćepanović

PROBLEM POSING TO EVALUATE MATHEMATICAL KNOWLEDGE

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2022.

Ментор:

проф. др Јасмина Милинковић, ванредни професор,

Универзитет у Београду, Учитељски факултет

Чланови комисије:

проф. др Маријана Зељић, редовни професор,

Универзитет у Београду, Учитељски факултет, предсједник

проф. др Вељко Банђур, редовни професор,

Универзитет у Београду, Учитељски факултет, члан

проф. др Александар Липковски, редовни професор,

Универзитет у Београду, Математички факултет, члан

проф. др Мирјана Ђорић, редовни професор,

Универзитет у Београду, Математички факултет, члан

проф. др Оливера Ђокић, ванредни професор,

Универзитет у Београду, Учитељски факултет, члан

Датум одбране:

ПОСТАВЉАЊЕ ПРОБЛЕМА У ЦИЉУ ВРЕДНОВАЊА МАТЕМАТИЧКИХ ЗНАЊА

Сажетак

Основни циљ истраживања дисертације је експериментално испитивање ефеката постављања проблема варирањем репрезентација и контекста у вредновању математичких знања ученика. Утврђени су и анализирани ефекти технике варирања репрезентација и контекста, аритметичких (множење и дијељење) и алгебарских (једначине и неједначине) садржаја, за дубљу анализу и праћење развоја математичких знања код ученика петог разреда црногорског образовног система.

Дескриптивном методом извршена је анализа, обрада и интерпретација резултата истраживања, који су потврдили постављену хипотезу, тј. да варирање репрезентација и контекста проблема утиче на математичка постигнућа рјешавања проблема ученика, ефикасност примјене и развоја математичких знања из аритметичких и алгебарских садржаја. Ученици експерименталног програма, у односу на ученике који нијесу били под утицајем креираних модела експерименталног програма, показали су знатно боља постигнућа у рјешавању сликовних, схематских, табеларних и симболичких репрезентација проблема, као и у самосталном састављању проблема.

Анкетним упитником за ученике утврђено је да се мишљење ученика о постављању проблема у настави математике петог разреда не разликује и да не утиче на математичка постигнућа рјешавања проблема.

Варирање репрезентација и контекста проблема, аритметичких и алгебарских садржаја имају позитиван ефекат на математичка постигнућа рјешавања проблема ученика и упућују начин на који се дубље вредновање усвојених математичких знања може имплементирати у почетној настави математике за даље планирање наставе и развој алгебарског мишљења.

Кључне ријечи: математичко знање, алгебарско мишљење, стратегије постављања и рјешавања проблема, вредновање у настави математике.

Научна област: Дидактичко-методичке науке

Ужа научна област: Методика наставе математике

УДК:

PROBLEM POSING TO EVALUATE MATHEMATICAL KNOWLEDGE

Summary

The main goal of the dissertation research is an experimental examination of the effects of problem posing by varying representations and contexts in the evaluation of students' mathematical knowledge. The effects of the technique of varying representations and contexts, arithmetic (multiplication and division) and algebraic (equations and inequalities) content were determined and analysed, for a deeper analysis and monitoring of the development of mathematical knowledge of the fifth grade students of the Montenegrin education system.

The descriptive method was used to analyse, process and interpretate the research results, which confirmed the hypothesis, ie. that varying representations and contexts of the problem posing affect the mathematical achievements of students' problem solving, as well as of the implementation and development efficiency of the mathematical knowledge of the arithmetic and algebraic content. Students of the experimental program, in regard to students who were not influenced by the created model of the experimental program, showed significantly better achievements in solving pictorial, schematic, tabular, symbolically set problems, as well as in independently compiling problems.

The students' survey questionnaire confirmed that students' opinion on the problem solving in teaching mathematics in the fifth grade does not differ nor does it affect the mathematical achievements of the problem solving.

Varying representations and problem contexts, arithmetic and algebraic contents have a positive effect on mathematical achievement and indicate the way in which a deeper assessment of the acquired mathematical knowledge can be implemented in the initial mathematics teaching for further teaching planning and development of algebraic thinking.

Key words: mathematical knowledge, algebraic thinking, problem setting and problem solving strategies, evaluation in mathematics teaching.

Scientific field: Didactic–methodical sciences

Narrow scientific field: Methodology of teaching mathematics

UDC:

САДРЖАЈ

I УВОД 1

II ТЕОРИЈСКИ ПРИСТУП ПРОБЛЕМУ

1. Математичко знање 5

1.1. Врсте знања 13

1.2. Развој математичког знања 17

1.3. Репрезентације у настави математике 21

2. Постављање проблема у почетној настави математике 27

2.1. Шта су проблемски задаци? 31

2.2. Постављање проблема 33

2.2.1. Стратегије постављања проблема 37

2.3. Рјешавање проблема 42

2.4. Улога наставника у постављању и рјешавању проблема 49

3. Вредновање у настави математике 53

3.1. Врсте вредновања 58

3.2. Критеријуми вредновања 62

3.3. Аутентичне технике вредновања 66

3.4. Врсте задатака у вредновању 77

4. Развој алгебарског мишљења у почетној настави математике 83

4.1. Аритметика као основа за рану алгебру 88

4.2. Појам једнакости 94

4.3. Својства броја и рачунских операција 98

4.4. Увођење промјенљиве у почетну наставу математике 103

5. Досадашња емпиријска истраживања о вредновању постигнућа ученика у почетној настави математике 109

III МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА

1. Проблем и предмет истраживања..... 118

2. Циљ и задаци истраживања..... 119

3. Хипотезе истраживања..... 120

4. Варијабле у истраживању..... 121

5. Методе, технике и инструменти истраживања..... 121

6. Узорак истраживања..... 122

7. Организација и ток истраживања..... 123

7.1. Израда експерименталних модела систематизовања знања о аритметичким и алгебарским садржајима..... 124

7.2. Иницијално тестирање……..... 125

7.2.1. Уједначавање група……..... 126

7.3. Реализација наставних часова……..... 127

7.4. Експериментални програм ……..... 127

7.5. Финално тестирање..... 128

7.6. Анкетирање ученика експерименталне и контролне групе……. 129

8. Статистичка обрада података..... 129

IV АНАЛИЗА И ИНТЕРПРЕТАЦИЈА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА……..... 131

1. Кратак приказ корелационо–регресионих резултата на тестовима истраживања..... 132

2. Постигнућа ученика у задацима на иницијалном тесту..... 136

3. Анализа резултата финалног тестирања……. 141

3.1. Постигнућа ученика у рјешавању проблема на финалним тестовима……... 144

3.2. Анализа резултата у самосталном састављању проблема ученика……. 159

3.3. Анализа и интерпретација резултата Анкетног упитника…… 166

V ИМПЛИКАЦИЈЕ И ЗАКЉУЧЦИ

1. Методичке импликације…….. 182

2. Закључци……... 187

VI ЛИТЕРАТУРА

1. Литература…… 196

VII ПРИЛОЗИ

1. Прилог 1. Иницијални тест – група А..... 207

2. Прилог 2. Иницијални тест – група Б..... 209

3. Прилог 3. Финални тест 1 – група А..... 211

4. Прилог 4. Финални тест 1– група Б..... 213

5. Прилог 5. Финални тест 2 – група А..... 215

6. Прилог 6. Финални тест 2 – група Б..... 218

7. Прилог 7. Финални тест 3 – група А..... 221

8. Прилог 8. Финални тест 3 – група Б..... 223

9. Прилог 9. Наставни листићи за учење..... 225

10. Прилог 10. Анкетни упитник за ученике..... 273

11. Прилог 11. Дескриптивна статистика..... 278

I УВОД

Математика и њој својствен начин размишљања разматра се као суштински елемент опште културе савременог човјека. Знања из математике прожимају свакодневни живот. Вјештине стечене учењем математике помажу нам да, доносимо одлуке у стварном животу, организујемо и дамо приоритете информацијама, постављамо и рјешавамо проблеме, тумачимо квантитативне или мјерљиве податке, флексибилно размишљамо, анализирамо ситуације, разумијемо и користимо технологију у свакодневним животним активностима. Једноставно, математичко знање помаже нам да успјешно организујемо свој живот (Jones, 2012). Осим тога, напредак технологије у савременом друштву утиче на промјене у свим областима људског дјеловања и, истовремено, ствара потребе за сталним повећањем математичких компетенција. Отуда имамо да су послодавцима потребни људи са развијеним вјештинама логичког размишљања и способностима рјешавања проблема.

Поменуте промјене савременог друштва упућују на стварање нових перспектива у математичком образовању ученика. Најприје, све више основни циљ савременог математичког образовања постаје развијање способности за учење и јасно логичко размишљање (Iannone & Simpson, 2019). У том смислу, Ријандо и сарадници (Riyanto et al., 2017) наводе да се приступи математичког учења у основној школи преусмјеравају од „традиционалног преноса знања“ наставника ка „активној конструкцији знања“ ученика. С тим у вези јавља се међународни тренд увођења реалистичких проблема и потреба ка ширењу погледа на апликације, моделе, моделовање, те на успостављање веза између математике и других наставних предмета (Blum, 1993). Дакле, данашња визија наставе математике захтијева да ученици уче математику која им је доступна и релевантна за њихов живот. Поред тога, као одговор на наведени општепризнати друштвени интерес и подстакнути новим истраживањима когнитивне психологије, имамо да наставници и истраживачи почињу да препознају потребу дубље провјере нивоа усвојености математичких садржаја, која је усмјерена на даље планирање наставе и развој математичких знања ученика. Научити ученике да добију тачан одговор у најкраћем могућем року, уз што мање размишљања, више није основни циљ наставе математике (Ginsburg, Jacobs & Lopez 1993). Исто тако, ако желимо да математику учинимо „приступачном“ ученицима, потребне су провјере знања које омогућавају начине да сваки ученик „ради на проблемима“, чак иако у потпуности не може да их ријеши (Bodin, 1993; Teledahl, 2017).

Многи истраживачи тврде да традиционални начин вредновања не може да открије шта су ученици научили и шта заиста знају (Bell, Burkhardt & Swan, 1992b; Swan, 1993; Izard, 1993; National Research Council, 1993; Rosli, Goldsby & Capraro, 2013). Они сматрају да традиционално провјеравање знања не пружа довољно доказа о стварним математичким знањима ученика. Према Кулму (према Rosli, Goldsby & Capraro, 2013) дугогодишња испитивања, о проблемима вредновања математичког разумијевања, показују да су традиционални тестови усмјерени само на математичке вјештине и поступке које ученик користи. Тако се као недостатак традиционалног оцјењивања наводи критеријум вредновања, који се односи на истицање процедуралних насупрот концептуалних знања, ограничавајући аутора да се у креирању задатака усредсреди на аутентичну математику, за чију је примјену неопходна дужа и сложенија припрема (Davies, 2017). Поред наведеног, када је ријеч о нивоима математике, настави математике и оцјењивању Друштво математичара Лондона сматра да се „природа“ знања из математике разликује чак и од знања других наука и да би предавање и оцјењивање математичких знања требало разматрати одвојено (према Iannone and Simpson, 2019).

Због свега наведеног, последњих година, постављању проблема се поклања више пажње у заједници математичког образовања – и као средству наставе (постављањем проблема ученици се ангажују у учењу важних концепата и вјештина) и као циљу наставе (развијање

компетенције рјешавања проблема ученика). Остаје, међутим, у теорији и пракси, питање идентификовања карактеристика које дефинишу постављање проблема и испитивање како различите стратегије постављања проблема могу бити повезане једна са другом, као и са рјешавањем проблема (Stoyanova, 1997). Поред тога, заговорници постављања проблема, уопште, тврде да се постављањем проблема подстиче ангажовање ученика у аутентичним математичким активностима, затим, ученицима се пружа могућност „упознавања“ са више различитих проблема, те методама процеса рјешавања проблема и да се промовише креативност ученика – склоност ка тражењу нових проблема (Lamon & Lesh, 1992; Silver, 1994; English, 1997; Leung & Silver, 1997; Милинковић, 2013; Jones, 2012; Bonotto & Santo, 2015; Crespo, 2015). Осим тога, активности постављања проблема су обично когнитивно захтјевнији задаци и пружају интелектуални контекст за развој математичких знања ученика, односно задаци са различитим когнитивним захтјевима изазивају различите врсте учења (English, 1998; Singer, 2009; Singer et al., 2011).

Када се постављање проблема систематично примјењује у настави математике, чак и као што је на примјер да ученици састављају текстуалне проблеме, добијени резултати су, уопште, позитивни, укључујући позитиван ефекат на постигнућа рјешавања проблема и/или став ученика према математици (Singer et al., 2011). Тако, бројне истраживачке студије указују да ангажовање ученика у наставним активностима везаним за постављање проблема има позитиван утицај на разумијевање математичких садржаја (Silver, 1994; English, 1997; Knott, 2010; Prabhu & Czarnocha, 2015). Силвер (Silver, 1994), такође, сугерише да је већа вјероватноћа да ће проблеми које постављају ученици повезати математику са интересовањима ученика, што то често није случај са „традиционално“ постављеним проблемима наставника. Дакле, самостално састављање проблема ученика не само да подстиче разумијевање проблемских ситуација, већ и развој напреднијих стратегија рјешавања проблема.

Поред наведеног, један од разлога постављања проблема наставника у почетној настави математике проналази се у важности саме „природе“ постављањених питања. Овим питањима, наставници „трагају за правом сликом знања ученика“, тј. испитује се разумијевање наставних садржаја математике, а не, искључиво, само провјеравање тачности одговора. Према томе, да би се испитало знање ученика, мора постојати нека врста проблема који поставља темеље за ову истраживачку активност. Дакле, проблем нам поставља темеље за истраживање, како Попер каже: „То је проблем који нас изазива да учимо, унапређујемо наше знање, да експериментишемо и да посматрамо“ (Popper, 1962:222). Стога, наставници математике и истраживачи улажу много напора у проналажење стратегија постављања проблема, не само за провјеравање математичких знања ученика, већ, такође, за такво постављање проблема које ученицима помаже разумијевање математичких концепата, повезивање математичких знања и изграђивање позитивних ставова према математици.

Заправо, дошло се до сазнања да различите стратегије постављања проблема у настави математике не само да подстичу развој способности рјешавања проблема ученика и разумијевање основних математичких концепата, већ и да унапређују процес вредновања математичких знања. Посебно са педагошког аспекта, Инглиш и Ловри (према Kwek, 2015:275) сматрају да постављање проблема представља ефикасно средство вредновања математичких знања. Тако, да би се информисали о нивоу знања и разумијевања ученика, вјештинама и способностима рјешавања проблема, наставници постављањем проблема „попуњавају празнине“ између онога што ученици знају и што им није познато (Ibid). Даље, овако креиран инструмент вредновања знања доводи до потребе увођења аутентичних техника вредновања разумијевања одређеног математичког концепта (Lesh & Lamon, 1992; Ginsburg et al., 1992; Bell, Burkhardt & Swan, 1992a; Bell, Burkhardt & Swan, 1992b Ginsburg, Jacobs & Lopez, 1993; Swan, 1993; Balan, 2012; Rosli, Goldsby & Capraro, 2013; Милинковић, 2013; Глишић, Илић & Јадријевић Младар, 2013; Bisson et al., 2016; Barmby, 2019). Тако, постављањем

проблема, изван оквира традиционалног вредновања знања ученика, наставници имају прилику да, прилагођеним аутентичним техникама, вреднују математичке концепте, процесе рјешавања проблема и склоности ученика према математици. Дакле, постављање проблема представља путоказ развоја техника вредновања математичких знања, како би се добили индикатори за боље разумијевање степена усвојености знања сваког ученика.

Приликом постављања проблема, докази међународних студија показују да је, на млађем школском узрасту, поред аритметичких, потребно укључити и алгебарске садржаје (Cai, 1998; Kieran, 2004; Lins & Kaput, 2004; Mason, 2008; Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008; Franke, Carpenter & Battey, 2008; Зељић, 2014). Широко присутно схватање да ученици на млађем узрасту могу учинити више у математици него што се раније вјеровало доводи до усвајања амбициознијих циљева почетне наставе математике, односно не само до увођења одређених дјелова алгебре, већ и до „развијања алгебарског мишљења" (Knuth et al., 2011; Lins & Kaput, 2004; Mason, 2008; Li, Peng & Song, 2011; Зељић, 2014). Развија се оптимистично гледиште да ученици долазе у школу са природним способностима генерализације и способностима да изразе општост, и да је развој алгебарског мишљења великим дијелом питање искоришћавања тих природних способности у дидактичке сврхе. Кључна ствар је да ће ученици заиста више постићи ако се понуди смислен приступ садржајима алгебре. Тако, ученици се баве раним алгебарским мишљењем, али који своје генерализације не изражавају формалним симболичким записима, већ примјеном дијаграма и контекстима прича, којима су обухваћене радње операција (Mason, 2008). Према томе, ако је циљ реформе математичког образовања да се сви ученици боље припреме за успјех у алгебри, онда „природа пре–алгебарских" математичких знања ученика мора поставити темеље за формално изучавање алгебре. Велики дио оваквог приступа може се поставити у периоду који повезује аритметичко и рано алгебарско мишљење ученика и њихов развој ка све сложенијим, апстрактнијим алгебарским знањима (Knuth et al., 2011). Дакле, постоје добри разлози за вјеровање да би рана алгебра имала значајан утицај на успјешност усвајања наставних садржаја математике у каснијим разредима.

Претходно наведене идеје представљају основно полазиште дисертације. Стога, ова дисертација има два дијела, теоријски, у којем смо, најприје, тему проучавали са теоријске основе, и емпиријски, у којем смо тестирали хипотезе засноване на теоријском дијелу истраживања. У теоријском дијелу истраживања представили смо појмове који описују „природу" математичког знања, односно врсте математичког знања и разумијевања, развој математичког знања, као и концепт репрезентације. Затим, приказали смо постављање проблема у почетној настави математике, односно стратегије постављања и рјешавања проблема, као и улогу наставника у постављању и рјешавању проблема.

Новија литература препознала је вредновање математичких знања за дијагностификовање потешкоћа разумијевања материје којом ученик треба да овлада. Такво вредновање знања је усмјерено на отклањање препрека развоја математичких знања ученика. Стога смо описали до сада у наставном процесу, испитане начине сумативног и формативног вредновања, усклађених са пажљиво одабраним задацима. Такође, за различите начине вредновања математичких знања ученика, указали смо на могућност примјене појединих аутентичних техника вредновања.

У раду смо истакли да је у почетној настави математике рани развој алгебарског мишљења могућ и да је тај вид образовања од изузетног значаја за математичко образовање. Акценат стављамо на питање алгебаризације аритметике, односно на проблем разумијевања математичке једнакости, основних својстава броја и рачунских операција и концепта промјенљиве. На крају теоријског дијела дисертације дали смо преглед релевантних емпиријских истраживања о вредновању постигнућа ученика у почетној настави математике.

Други дио дисертације представља емпиријски дио рада и састоји се из двије цјелине. Прва се односи на описивање истраживања и његовог тока, док се у другој тумаче резултати истраживања. Дизајн истраживања је експеримент са паралелним групама, а приступљено је и квалитативним и квантитативним анализама. У циљу потпуније интерпретације резултата истраживања, Анкетним упитником смо испитали мишљење ученика о постављању проблема у настави математике за пети разред. Рад завршавамо импликацијама и закључцима. Импликацијама су, са методичког аспекта, дати релевантни предлози, проучаване проблематике који се темеље на добијеним резултатима спроведеног истраживања и са становишта релевантне литературе представљене у Теоријском дијелу рада. Закључци приказују коначна разматрања спроведеног истраживања, износе квалитативно описане чињенице и предлажу перспективе за будућа сродна истраживања.

Надамо се да ће тема нашег рада мотивисати и подстаћи будућа истраживања о постављању проблема за валидно и поуздано вредновање математичких знања ученика.

II ТЕОРИЈСКИ ПРИСТУП ПРОБЛЕМУ

1. Математичко знање

У поређењу са другим пољима човјековог стваралаштва, математика се обично сматра науком велике прецизности у којој се појмови тачно дефинишу и на тај начин стварају чврсту основу за математичку теорију. Психолошка стварност је нешто другачија. Многе математичке појмове, прије него што су формално дефинисани, свакодневно сусрећемо у неком другом облику. У том смислу, Тол и Винер (Tall & Vinner, 1981) наводе да, у уму сваког појединца, приликом присјећања одређеног појма, постоји сложена когнитивна структура која даје низ личних менталних слика. Стога, у овом дијелу рада приказујемо бројне опште идеје за: анализу појма „природе“ математичког знања, разумијевања, процесе усвајања и развоја математичког знања ученика.

Прво, да бисмо разумјели како се процеси усвајања и развоја математичких појмова одвијају, морамо најприје указати на разлику између математичких појмова који су формално дефинисани и когнитивних процеса којима се они стварају. Математика је систематизована и представљена као уређена теорија, а математички појмови су дефинисани као ментални објекти који имају одређена основна својства, док се сва остала својства из њих изводе. Дефиниције су често сложени језички искази који укључују неколико квантификатора, тако да се формално значење тешко усваја (Tall, 1996a). Слично овоме, према Пољу (Polya, 1973), дефиниција појма је исказ о његовом значењу у другим појмовима, за које се претпоставља да су „добро познати“. Он указује да постоје двије врсте техничких појмова у математици. Једни су прихваћени као основни појмовни изрази и нијесу дефинисани. Други се сматрају изведеним појмовима и дефинишу се у одговарајућем облику, односно њихово значење се наводи у основним појмовима и раније дефинисаним изведеним појмовима. Дакле, немамо формалну дефиницију за основне појмове као што су тачка, права линија и раван. Са друге стране, ипак, имамо формалне дефиниције за такве појмове, као што су на примјер „симетрала угла“ или „кружница“ или „парабола“ (Ibid). Поред тога, Поља (Ibid) у свом раду, *„How to Solve It“* (*„Како ријешити“*), о рјешавању проблема и начинима његовог провјеравања, наводи значај знања које настаје менталном вјежбом, тако да се формално докаже оно што се „интуитивно види“ и да се „интуитивно види“ оно што се формално доказује. Овдје се поставља филозофско питање, може ли се наше знање из математике заснивати само на формалним доказима? Сигурно је да се ваше знање, или моје знање, или знање ваших ученика из математике не заснива само на формалним доказима. Ако уопште постоји неко солидно знање, оно има широку експерименталну основу и ту основу проширује сваки проблем чији се резултат успјешно провјерава (Ibid:52).

Када су у питању процеси усвајања математичких појмова, у основи принципа учења математике је учење са разумијевањем, односно „Ученици морају научити математику са разумијевањем, активно градећи нова знања на основу искуства и предзнања“ (NCTM, 2000:20)[1]. Учење није пасивно искуство. Ученици конструишу математичко знање активно се бавећи математиком кроз процес који повезује оно што већ знају са новим знањем. Нажалост, многи од нас математику су научили памтећи правила и поступке, без разумијевања концепта на којима се заснивају. Када математику учимо са разумијевањем, наше знање је повезано и лакше се памти. Осим тога, учење са разумијевањем је неопходно како би ријешили нове врсте проблема са којима се неизбежно суочавамо. Последњих деценија истраживања у психологији и образовању разјаснила су и истакла значај различитог математичког разумијевања. Наиме,

[1] Упућујемо на рад: National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA:NCTM.

истраживања истичу дихотомију размишљања, односно подјелу између начина на који људи размишљају. Ако имамо на уму да ће размишљање појединачних ученика вјероватно бити компликованије, такве дихотомије могу помоћи у разумијевању учења математике (Iannone & Simpson, 2019). Тако, Сфард (Sfard, 1991) предлаже „оперативно“ и „структурално“ формирање математичких појмова. Уз то, она наглашава да се оперативне и структуралне концепције истог математичког појма међусобно не искључују. Иако наоко неспојиве, оне су комплементарне. Израз „комплементарност“ овдје се користи у готово истом смислу као у физици, гдје се ентитети на субатомском нивоу посматрају и као честице и као таласи, који омогућавају потпун опис и објашњење посматраних појава. Дакле, говори се о дуалности а не подвојености математичког размишљања. Квалитативну разлику између наведених начина размишљања проналази у основним, обично имплицитним, сазнањима „природе“ математичке мисли, и то као процеса и производа. Поред наведеног, претпоставке дуалности математичког размишљања, Сфард указује на предности оперативних концепција развоја појмова. Ако је структурални приступ апстрактнији од оперативног, ако су са филозофског становишта бројеви и функције у основи ништа друго него процеси, ако је извођење процеса једини начин да се некако „ступи у контакт“ са апстрактним конструктима, тада се не може очекивати структурална примјена без претходног оперативног разумијевања. Тада, ученик не може разумјети дводимензионалну шему коцке без упознавања са њеним тродимензионалним моделом из стварног свијета. Такође, она говори и о трећој врсти разумијевања, чисто интуитивном разумијевању, постигнуто у оним ријетким случајевима када настаје нејасна структурна концепција прије него што се оперативна основа у потпуности развије. На мање техничком, више филозофском нивоу, можемо рећи да у математици прелазак са процеса на апстрактне објекте појачава наш смисао за разумијевање математике (Ibid). Управо, предложени модел формирања концепта подразумијева да одређене математичке појмове сматрамо потпуно развијеним само ако се могу конципирати и оперативно и структурално. Структурална концепција је у основи релационог разумијевања, док чисто оперативни приступ обично одговара само инструменталном разумијевању, о чему је више описано у наредном поглављу.

Вондрова (Vondrova, 2004), математичка знања разматра на основу двије претпоставке когнитивне науке, и то, да је знање представљено као унутрашње и да су унутрашње репрезентације знања структуиране. Она говори о спољашњој и унутрашњој репрезентацији математичког знања. Прва има облик говорног језика, писаних симбола, слика или физичких предмета, док друга репрезентација знања представља начин размишљања о математичким концептима. Према Хиберту и Карпентеру (према Vondrova, 2004), унутрашње репрезентације знања нијесу директно уочљиве, односно, математички концепти „у нашим главама“ засновани су на високом степену закључивања. Они наводе да се повезивањем унутрашњих репрезентација знања стварају мреже знања. Један од начина таквог структурирања математичких знања је процес вертикалне хијерархије, у којој поједине репрезентације знања укључују друге репрезентације. Слично, идеју вертикалне математизације Треферс и Гофри (према Ђокић, 2017) описују као процес реорганизације претходних математичких појмова изграђиваних у математичкој свијести ученика и помоћу којих ученици даље изграђују нове математичке појмове. Други облик у приказивању математичких знања, који Хиберт и Карпентер (према Vondrova, 2004) предлажу, је мрежа знања у којој су информације чворови мреже, а везе или односи између њих су нити између чворова. Ниво математичких знања може се процијенити бројем и јачином веза између информација (Ibid).

Метафору мреже знања Вондорова (Vondrova, 2004:8) користи за објашњење појма разумијевања. Математички концепт се разумије ако постане дио интерне мреже репрезентација, а степен до којег се разумије зависи од броја и интензитета његове повезаности са другим унутрашњим репрезентацијама. Тако, на примјер, ученик који се упознао са појмом групе у различитим контекстима, како нумеричким, тако и геометријским,

може развити „чврсту мрежу веза“ у наведеним контекстима. С друге стране, ако је ученику овај концепт представљен на врло апстрактан начин, он/она можда неће препознати структуру групе у различитим контекстима.

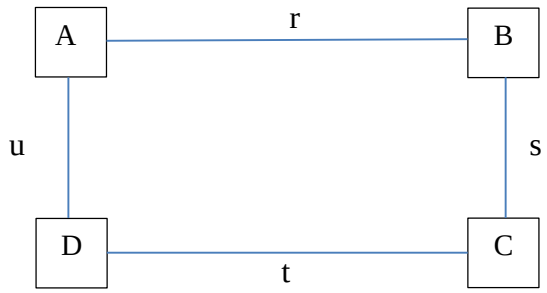
Дрејфус (Dreyfus, 2002) наводи да је разумијевање више од знања или стицања вјештине. Стога је разумијевање, увијек, сматрано важним циљем за наставу математике. Разумијевање је процес који се одвија у свијести ученика, чешће заснован на дугом низу активности, током којих се одвијају различити ментални процеси и интеракције. Због тога је врло тешко анализирати шта значи разумијевање математичког појма или концепта. Истраживачи у психологији се питају шта значи разумијевање, конкретно које компоненте менталних процеса се користе и заједно комбинују за формирање мета−процеса разумијевања. Тако, Дрејфус (Dreyfus, 1994) указује на улогу визуелног резоновања у учењу многих математичких концепата и процеса. Визуелно резоновање представља визуелно засноване процесе аналитичког мишљења, тј. заснива се на експертизи те је због тога тешко или чак немогуће за неупућене ученике. Фишбејн (према Dreyfus, 1994:108) ове потешкоће визуелног резоновања назива „интервенциона концептуална структура“: Дијаграми и слике садрже релевантне математичке информације у облику који је одређен одређеним правилима и конвенцијама, које су често специфичне за одређену врсту дијаграма. Они стога нису доступни ученицима који нијесу имали прилику да се упознају са овим правилима и конвенцијама. Неспремност ученика да користе визуелно резоновање доводи до избјегавања визуелног тумачења постављених дијаграма, односно ученици се опиру употреби геометријских и просторних стратегија у рјешавању проблема (Dreyfus, 1994).

Ипак, резултати когнитивне науке у математичким истраживачким активностима показују да стручњаци током креативних процеса у значајној мјери користе визуелно резоновање. У том погледу, Дрејфус (Ibid) говори о настајању покрета којим се придаје легитимитет визуелним аргументима представљања математичких резултата. Међутим, упркос томе што су наставници математике препознали потенцијалну снагу визуелног резоновања, његова имплементација заостаје. Стога је ученицима неопходно пружити више могућности не само за визуелно рјешавање проблема, већ и да дискутују о ваљаним и небитним визуелним аргументима и на крају им указати на тачна визуелна рјешења. То значи да истраживачи морају знатно проширити разумијевање когнитивних и математичких процеса који су укључени у визуелно резоновање. Дакле, потребна су детаљна, садржајна, специфична знања о математичким и образовним ваљаностима визуелних репрезентација и разумијевање образаца различитих процеса и математичких појмова који их формално описују (Ibid). Осим наведеног, Хадамард (према Dreyfus, 2002) експлицитно наглашава значај неформалног резоновања, тј. размишљање у недостатку ријечи, визуелних слика, менталних слика (које не могу бити изражене ријечима, бар не када се први пут појаве), и комбиновање са различитим концептима, слично непрестаним покушајима уклапања различитих елемената слагалице.

У својој књизи о разумијевању математике, Сиерпинска (Sierpinska, 1994), разумијевање у образовању описује као когнитивну активност која се одвија у дужим временским периодима, а затим и да се понекад користи термин „процес разумијевања“ у којем „индикатори разумијевања“ представљају значајне фазе, док стечено разумијевање ствара средства за даљи развој овог процеса. Поред наведеног, Сиерпинска (Ibid) тумачи „разумијевање правила“, на примјер, класе проблема, као разумијевање самог правила, или разумијевање класе проблема, уочавањем неког уобичајеног правила у овим проблемима, тако да се на правилу заснива разумијевање класе проблема. Другим ријечима, разумијевање правила је размишљање о самом правилу, које је претходно идентификовано као заједничко за одређене проблеме. Дакле, правило се разумије када је, на пример, конструисан модел правила са идентификованим основним елементима. Осим тога, могу да се формулишу проблеми који одговарају овом правилу, а не само да се препознају неки од задатих проблема који задовољавају правило (Ibid).

На примјер, следећи проблем: Лука има 1,45 долара више од Мишела. Лука удвостручује износ новца, а Мишел га увећава за 3,50 долара. Сада Лука има 0,40 долара мање од Мишела. Колики је Лукин и Мишелов износ новца био на почетку? (Ibid:20).

Разумијевање наведеног проблема, као одређеног обрасца, може се састојати у уочавању сличности између овог и других проблема који се раде на часу. То може омогућити употребу аналогног поступка за рјешавање проблема. Међутим, разумијевање самог правила подразумијева уопштавање проблема, увођење промјенљивих умјесто познатих и непознатих података: повезивањем четири непознате A, B, C, D са датим релацијама r, s, t, u, редом, између: A и B; B и C; C и D; и D и A. Поред наведеног, разумијевање обрасца рјешавања проблема може се представити дијаграмском сликом (Слика 1).



Слика 1. Образац проблема Луке и Мишела (Ibid:20).

Образац за рјешење датог проблема, Бедназ и сарадници (према Sierpinska, 1994) проналазе на основу датих односа:

A = r (B) = B + 1,45;

D = u (A) = 2 · A;

C = s (B) = B + 3,50;

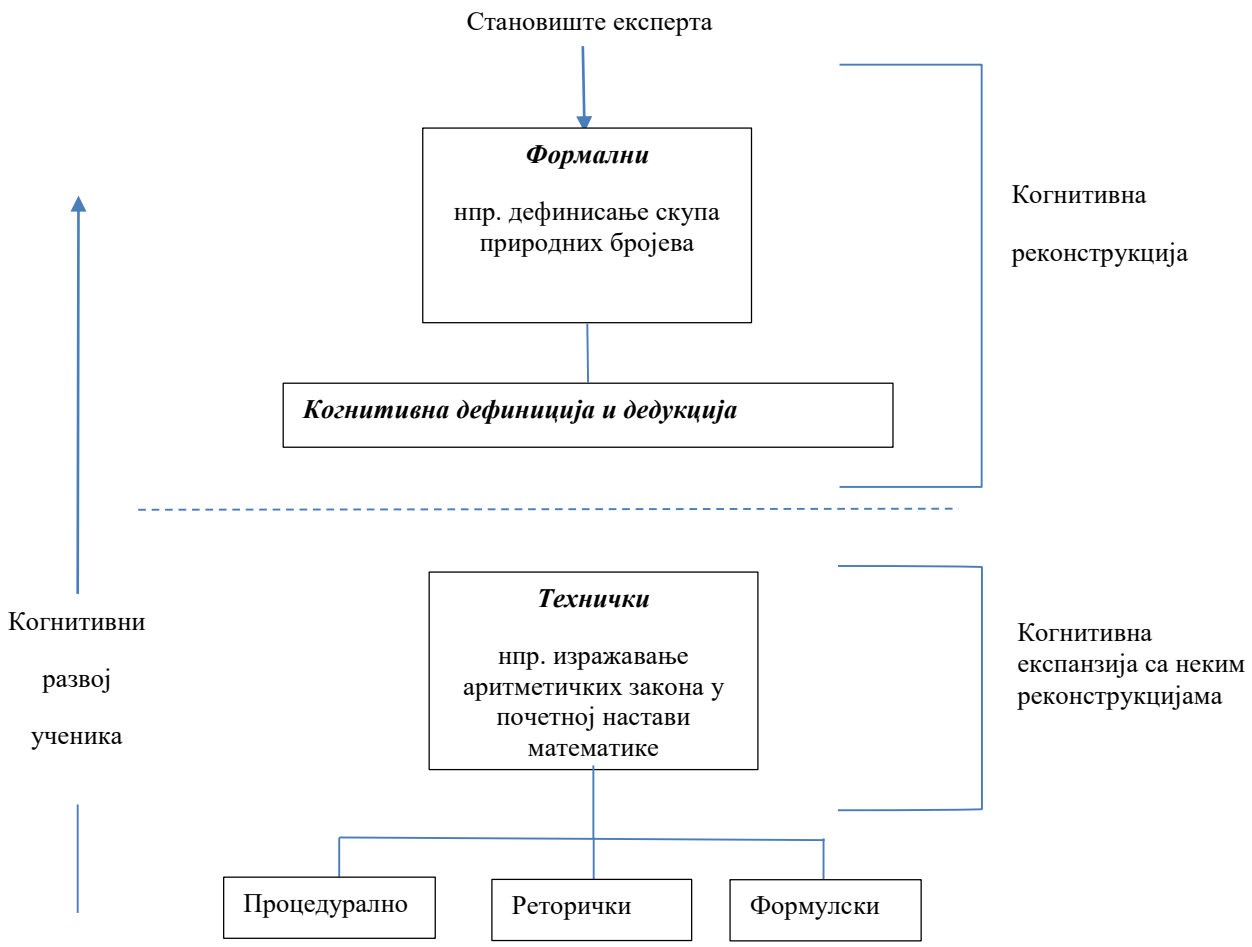
D = t (C) = C − 0,40, одакле је D = u (A) = t (C), а самим тим и: u (r (B)) = t (s (B))

је једначина са једном непознатом: 2 · (B + 1.45) = (B + 3,50) – 0,40 (Ibid).

Дафин и Симпсон (Duffin & Simpson, 2000) указују да се разумијевање ученика не може директно видјети. Они предлажу да се, из запажања физичких радњи које ученик изводи и из теоријске перспективе нивоа претходног разумијевања ученика, може донијети суд о разумијевању ученика. По овоме, за њих, разумијевање чине три аспекта, истовремено, разумијевање је непрекидни процес развоја веза (изграђивање), стање доступних веза у одређеном тренутку (посједовање) и активност коришћења веза као одговор на проблем (извођење). У вези с понуђеном дефиницијом разумијевања, Дафин и Симпсон (Ibid) напомињу да издвојене компоненте разумијевања нијесу дискретни елементи у процесу учења. Учење није тако једноставно, као период изграђивања веза, мирно стање „понашања у одређеном тренутку“ и коначно период активности када се усваја разумијевање. Заправо, у рјешавању важног проблема, ученик се подсјети појединих чињеница, дође до неког свог разумијевања, „заглави“ у рјешавању, пронађе и ријеши несугласице стварајући нове везе, односно стиче разумијевање својствено тим новим везама, доноси више опозваних идеја, и тако даље (Ibid:422). Поред тога, Дафин и Симпсон (Ibid) сматрају да је главна улога наставника у развијању модела разумијевања ученика, тако што ће постављањем задатака и пружањем контекста, омогућити већу дубину и ширину постојећег разумијевања, те

изграђивање новог разумијевања за бољу употребу постојећих знања. Наставник поставља задатак на основу тренутног модела разумијевања ученика и на основу свог математичког знања. С друге стране, ученик доноси одлуке за рјешавање задатка користећи своја очекивања од наставника, која су изграђена на исти начин као што је наставник изградио модел разумијевања ученика (Ibid). Према томе, моделовање разумијевања је дуготрајан процес у којем наставник више пута ревидира модел, сваки пут када неку радњу протумачи као такву да је проистекла из усвајеног разумијевања. Исто, наставници морају да направе модел на основу тумачења великог броја радњи, које произилазе из питања или проблема, за стварање ширег и дубљег разумијевања. Исто, за избјегавање, што је више могуће, проблема репродуктивног учења, наставници могу користити питања која олакшавају уочавање репродукције, као што су захтјеви за образложењем, постављањем питања у новом контексту итд. Слично, да би се избјегле ситуације у којима разумијевање не може да се усвоји, због недостатка свијести о доступним везама, могу се постављати питања на више различитих начина и у различитим временским периодима (Ibid).

Дакле, наставници математике имају већ развијене формалне методе за усвајање математичких знања и сасвим другачије гледају на математику од ученика који, са своје тренутне развојне позиције, стварају пут ка суптилном облику математичког мишљења (Tall, 1996b). Тако, Тол (Ibid) указује на двије врсте напредног математичког мишљења на примјеру линеарне алгебре. Овдје, у домену наших интересовања, приказујемо когнитивни развој математичког мишљења ученика у дефинисању скупа природних бројева (Слика 2). Из угла експерта, природни бројеви се дефинишу као кардинални бројеви коначних скупова и као пресјек свих индуктивних скупова поља IR, који садрже 1, на основу којих се изводе основна својства скупа природних бројева (Гаврилов, Михајлов & Павићевић, 1990). Међутим, постоје и други начини дефинисања скупа природних бројева. Један од њих је помоћу *Пеанових аксиома* (Церовић, 2001). Ученик упознаје различите приступе увођења аритметичких закона (закони који се изводе на скупу природних бројева заједно са операцијама и релацијом мање), тј. процедурални, реторички и формулски (Марјановић, 1996б). То су начини на које је могуће аксиоматизовати аритметику, односно усвојити основне аритметичке појмове и основна својства у почетној настави математике.



Слика 2. Два различита начина напредног математичког мишљења у аритметици.

Док математичар дефинисање скупа природних бројева види увођењем кардиналног броја и коначних скупова, и дедуктивно, полазећи од произвољно уређеног поља IR и индуктивних скупова поља IR, когнитивна стварност ученика је другачија. Ученик већ има, разне интуиције о бројевима, претходно искуство које се дидактичким поступцима може искористити за усвајање појма броја. У почетној настави математике нема дедуктивног извођења, операције не дефинишемо једне помоћу других, већ их уводимо једну са другом, те су разни закони аритметике међусобно равноправни. Међутим, може нам изгледати важније оно правило које чешће примјењујемо. Дидактички прилагођеним формама и називима представљају се законитости у почетној настави математике (Марјановић, 1996б). Поједина правила, у јасно разрађеној настави математике, морају бити изражена у процедуралној форми, нека у реторичкој форми, а често се асоцијативни и комутативни закони изражавају и у формулском облику (Ibid). Техника доказивања ученика се заснива на примјени логичког закључивања, а не никако на интуицији. С друге стране, Тол (Tall, 1996b) указује да је познато, како у настави математике, тако и у литератури математичког образовања, да ученици наилазе на проблеме у формалном усвајању математичких садржаја.

Према Пољу (Polya, 1973), хеуристичко расуђивање помаже рјешавање математичког проблема. Хеуристичко расуђивање је расуђивање које се не сматра коначним и строгим, већ само привременим и вјероватним, чија је сврха откривање рјешења садашњег проблема. Често смо обавезни да користимо хеуристичко расуђивање. Потпуну сигурност постижемо када добијамо цјелокупно рјешење, али прије него што добијемо тачно рјешење проблема често морамо бити задовољни са мање или више вјероватном претпоставком. Хеуристичко расуђивање је потребно, на примјер, када „конструишемо“ строги доказ, као што су нам потребне скеле када подижемо зграду. Проучавање хеуристике има „практичне“ циљеве. Тако боље разумијевање менталних операција, које су корисне у рјешавању проблема, може

значајно да утиче на наставу, посебно на наставу математике. Стога, проблем разумијемо када га у цјелини схватимо. Када смо схватили проблем, моћи ћемо да процијенимо која су питања најважнија. Испитавши једну или двије суштинске тачке, бићемо у бољој позицији да одредимо даље детаље са постепеним разлагањем и „ближим“ испитивањем проблема (Ibid). Као што је познато, не можемо натјерати ученике да разумију математику објашњавањем или поновним објашњавањем. Разумијевање је процес који се одвија у умовима ученика. Јавља се, како Ламбдин (према Jones, 2012) истиче, као нуспродукт рјешавања проблема и размишљања о рјешењима проблема.

У идентификовању способности учења математике ученика седмог разреда основне школе, Банђур (Банђур, 1978) издваја само један фактор – општу способност учења математике и ближе је објашњава помоћу њене психолошке структуре, коју, прије свега, чине: ингениозна примјена градива математике, индуктивно и дедуктивно уопштавање на градиву математике, испољавање флексибилности у току рјешавања математичких задатака, запамћивање и разумијевање градива математике, математичка имагинација, испољавање критичности и елемената оригиналности у току рјешавања математичких задатака, брзо схватање конкретног задатка и његово математичко изражавање у виду формалне структуре и спацијална оријентација и визуализација. Тако, у овом истраживању, нијесу откривене групне и специфичне способности учења математике. Такође, идентификована општа способност учења математике није дефинисана као меморисање и као схватање и разумијевање датих математичких информација, већ да се школско учење математике одвија на четири нивоа: разумијевање (когниција), запамћивање (меморија), критичко учење и елементарно стваралачко учење.

Ана и Џон Селден (Selden & Selden, 2005) разматрају о начинима математичког размишљања које називају „математичким навикама ума“ или „математичким навикама“. Ови начини размишљања и бављења математиком могу се сматрати продуктивним, али обично се посебно не подучавају. Заправо, у постојећим школским програмима, наставници их не сматрају дијелом своје одговорности или не виде да се такве навике ума могу подучавати (Ibid). С друге стране, сагледавањем и увођењем напредног математичког размишљања подстиче се даљи напредак у креирању наставних планова и програма. То потврђују најновији принципи и стандарди NCTM-а (2000) (National Council of Teachers of Mathematics) који препоручују рјешавање проблема, образложење и доказивање, комуникацију, повезивање и репрезентативне стандарде за све наставне програме од вртића до 12. разреда. Поред тога, ови стандарди укључују препоруку да сви наставни програми ученицима омогућавају: (1) примјену и прилагођавање различитих стратегија рјешавања проблема; (2) одабир и примјену различитих врста образложења и метода доказивања; (3) анализу и оцјењивање математичког размишљања и стратегија других; (4) разумијевање како се математичке идеје међусобно повезују; и (5) одабир, примјену и превођење математичких репрезентација у рјешавању проблема (Ibid).

Едвардс и Вард (Edwards & Ward, 2004) развијају идеју да се размишљање може сматрати напредним ако зависи од дедуктивног резоновања, а не директно од чулне перцепције. Иако признају да се „узорно математичко размишљање може појавити у било којем узрасту ученика и нивоу математике“, термин „напредно математичко размишљање“ желе да резервишу за размишљање које укључује „ригорозно и дедуктивно закључивање о математичким објектима који нијесу доступни нашим чулима“. Иако се овакав напредак може појавити на више нивоа, и поред тога да ученици нижег узраста показују изванредан степен дедуктивног резоновања, до којег могу да се укључе, мало је вјероватно да ће такви ученици често размишљати о математичким објектима недоступним чулима (Ibid).

Исто, Хиеберт (Hiebert, 1997) и колеге истичу да је дефиниција разумијевања настала током више година рада многих психолога и едукатора, који су је користили и усавршавали у

многим контекстима, укључујући и математику. Ова дефиниција указује да нешто разумијемо ако видимо у каквим је то односима или како је повезано са другим стварима које знамо. На примјер, наставник разумије анксиозност својих ученика на тестирању ако анксиозност може да повеже са другим стварима које зна о ученику, тренутном стању и ситуацијама са којима се ученик раније сусрео. Ако се зна да је ученик лоше урадио на главном тесту или да ученик ради веома споро и има проблема са завршавањем тестова на вријеме, онда обично боље разумијемо анксиозност ученика. Што више успоставимо односа, онда боље разумијемо. Као други примјер, наводе да ученик разумије сабирање 35 и 47 ако овај проблем може повезати са усвојеним знањима о сабирању и својствима бројева 35 и 47. Сазнање да 35 има 3 десетице и 5 јединица, а да 47 садржи 4 десетице и 7 јединица, наставнику помаже да разумије неколико начина комбиновања бројева. У оба случаја, докази разумијевања се често пружају у облику објашњења, зашто су ствари такве какве јесу, зашто је ученик анксиозан и зашто је 35 и 47 једнако 82 (Ibid:4). Објашњења су обично повезана, имплицитно и експлицитно, између циљне ситуације и података које знамо. Другим ријечима, нешто у математици се разумије ако је дио мреже знања, тј. мреже повезаних појмова, чињеница и поступака. Разумијевање „расте“ како се временом граде нове везе међу математичким концептима. Концепти могу бити чврсто повезани једни с другим, донекле повезани или, уопште, да нијесу повезани. На супротним крајевима овог опсега веза налази се релационо и инструментално разумијевање.

Под притиском образовних, психолошких, социолошких, антрополошких и филозофских истраживања, посебно у другој половини 20. вијека, све више се напушта идеја да су менталне способности линеарно и хијерархијски уређене (Kilpatrick, 1993). У мјери у којој се, још увијек, може сматрати да ученици посједују различите менталне способности, јасно је да такве способности произилазе из вишеструких извора и интеракције у сложеним и различитим начинима. Подаци из когнитивног развоја, из психонеурологије, из људског учења и студије памћења, како Вајт (према Kilpatrick, 1993:42) наводи, говоре нам да: „људи имају више система знања, више система представљања, више гностичких центара, више краткорочних и дугорочних сјећања, и више закона учења.“ У том погледу Вилер (Wheeler, 1993) сматра да специфичне циљеве у настави математике треба ставити у шири контекст, односно да би сваком ученику требало дати прилику да: функционише „као математичар“, развија репертоар општих математичких знања и да усваја одређена математичка знања. Он се не ограничава само на ученике који могу постати професионални математичари или технолози. Значај је у томе да иза предлога за укључивање рјешавања математичких задатака, или математичких истраживања, у школски програм, прије свега стоји да на „скроман“ начин и на елементарном нивоу свако буде способан да размишља „као математичар“. Поред тога, такође, ученицима је потребно понудити више „знања–како“, која се веома ријетко експлицитно подучавају у настави, на примјер, како да поједноставе рачунање, провјере рјешење задатка, изаберу општи примјер, представе доказ, као и како да конструишу контрапример. Дакле, без обзира на приступ који се узима, неопходно је да образовни циљеви испуњавају следећа два услова: (1) ученицима омогуће барем ограничено искуство у стварању или модификовању неког математичког знања и (2) понудити више од једног приступа усвајања математичких знања, како би ученици могли да провјере и потврде своја увјерења. Без овог искуства, ученици ће остати зависни од ауторитета и неће моћи да остваре аутономију у свом математичком раду (Ibid).

1.1. Врсте знања

У оквиру математичког разумијевања, Принцип учења (NCTM, 2000)[2] идентификује три врсте математичког знања:

• Чињенично знање – знање о непромјенљивим чињеницама, на примјер као што је број сати у дану или број минута у сату.

• Концептуално знање – знање чврсто повезано са другим концептима и представља дио мреже знања.

• Процедурално знање – познавање правила и поступака, неопходних за извршавање математичких задатака.

У цјелини, сва наведена знања чине свеобухватно математичко знање. Важност чињеничног знања у математици се подразумијева. Концептуално знање је уско повезано са релационим разумијевањем, док је процедурално знање повезано са инструменталним разумијевањем. Стога, сада је важно указати на разлику релационог и инструменталног разумијевања.

Најважније у процјени разумијевања је да ли је знање ученика смислено или научено напамет. Подсјетимо се, Скемп (Skemp, 2002) је разликовао двије врсте разумијевања, тј. релационо и инструментално. Под релационим разумијевањем подразумијева знање шта треба урадити и зашто. Инструментално разумијевање, уопште није сматрао разумијевањем, истичући да је то „правило без разлога“. Он наводи предности примјене инструменталног разумијевања у настави математике. Инструментално разумијевање је, уопште, ученицима лакше за извођење поступака појединих наставних садржаје математике. Неке теме, попут множења два негативна броја или дијељење разломака, је релационо тешко разумјети. На примјер, лако се памте правила „Минус пута минус даје плус“ и „да бисте дијелили са разломком обрните га и помножите“. Заправо, инструменталним разумијевањем се брже и лакше постижу тачни одговори. Затим, награде, који ученици добијају, су непосредније и очигледније. И тиме не смијемо потцијенити важност осјећаја успјеха од награда. Ако неки ученици описују себе као „глупаци“ и ако њихови наставници користе тај израз, онда је овим ученицима за постизање самопоуздања потребан успјех. То могу, брже и лакше, постићи више употребом инструменталног него релационог разумијевања. Управо због тога што је укључено мање знања, често се може, брже и сигурније, доћи до тачног одговора инструменталним него релационим разумијевањем. Ово је толико изражено, да чак и математичари често користе инструментално разумијевање (Ibid).

Учење релационим разумијевањем се састоји од стварања концептуалне структуре (шеме) из које се ствара неограничен број планова, за прелазак са било које почетне тачке шеме на било коју завршну тачку. За ову врсту учења Скемп (Ibid) истиче да:

1. Средства постају независна од одређених циљева који се желе постићи.

2. Изградња шеме у датој области знања сама по себи постаје задовољавајући циљ.

3. Што је потпунија шема ученика, то је већи осјећај повјерења у властиту способност.

[2] Упућујемо на рад: National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA:NCTM.

4. Шема никада није потпуна. Како се шеме повећавају, тако се повећава свијест о могућностима. Тако, тај процес често постаје само−настављајући и само−награђујући.

Даље, не само да ученици релационим разумијевањем разумију релативни нови материјал, који им се поставља, већ активно траже нови материјал и истражују нова подручја, попут дрвета које шири своје корјене или, потраге животиња за храном, на новој територији (Ibid). Дакле, не само да се зна која метода дјелује, већ и зашто, односно метода се повезује са проблемом, а самим тим и прилагођава новим проблемима. Инструменталним разумијевањем треба памтити за које проблеме метода функционише, а за које не, као и учити различите методе за сваку нову класу проблема. Прва предност релационог разумијевања води ка лакшем памћењу и овдје постоји наизглед парадокс у томе што је таква знања теже научити. Ученицима је сигурно лакше да науче „површина троугла једнака је производу половине основице и висине“, него да науче зашто је то тако. Али, они тада морају да науче одвојена правила за троуглове, правоугаонике, паралелограме, трапезе, док се релационим разумијевањем све то види у односу на површину правоугаоника. Још увијек је пожељно знати посебна правила, човјек не жели да их сваки пут поново изводи. Али ако знамо и како су међусобно повезана, то омогућава да се лакше памте као дјелови повезане цјелине (Ibid:9).

За разликовање инструменталног и релационог разумијевања, Скемп (Ibid) наводи конкретан пример. Када је први пут отишао у непознати град, брзо је научио неколико одређених рута. Научио је да се креће између мјеста гдје је боравио и канцеларије колега са којима је радио. Укратко, научио је ограничен број фиксних планова помоћу којих је могао од одређених почетних локација доћи до одређених циљних локација. Чим је имао мало слободног времена, почео је да истражује град. У мислима је желио да изгради когнитивну мапу града (Ibid). Ове двије активности се прилично разликују. Најважније у некој активности је знати циљ који имамо. На примјер, у првом случају аутор је имао за циљ да дође до физичке локације. У другом, требало је да прошири или консолидује своју менталну мапу града, које је већ стање знања. Аналогија између претходног и учења математике је блиска. Учење које води инструменталном разумијевању састоји се од учења све већег броја фиксних планова, помоћу којих ученици могу пронаћи пут од одређених почетних података до одговора на питања. План им, у свакој тачки избора, говори шта да раде. Не постоји свијест о укупном односу између узастопних фаза и коначног циља. И као у конкретном примјеру, оно што треба даље предузети одређено је искључиво локалном ситуацијом. У оба случаја, ученик зависи од спољашњих смјерница за учење, односно од сваког новог начина за постизање коначног циља.

Слично, Хејни (према Vondrova, 2004) разликује механичко и смислено разумијевање математичког знања. Он тврди да је механичко разумијевање озбиљна „болест“ математичког знања ученика и појављује се када су у свијести ученика појединачни дјелови математичког знања слабо повезани или, чак, изоловани. Ученик, на пример, није у могућности да користи своје знање у другом контексту, већ тежи да ријеши проблем примјеном претходно наученог алгоритма. Математичко размишљање ученика је оријентисано ка питању „Како?“, а не ка питањима „Шта?“ и „Зашто?“. Механичко разумијевање је, такође, последица чињенице да математичка знања ученика нијесу повезана са стварним животом, тј. нијесу „обрађена“ кроз искуство ученика и често су резултат трансмисивног стила наставе. На примјер, механичко разумијевање је присутно када ученик зна да искаже дефиницију, алгоритам или теорему, али их не разумије, нити их може примијенити у нестандардном контексту. Механичко разумијевање, како Хејни (Ibid) наводи може „напасти поједине дјелове знања“, али, међутим, може доћи и до „ширења болести“, и, тиме, „продријети до нивоа способности“ и створити стратегију учења, у којој ученик, умјесто учења са разумијевањем, преферира учење напамет. На примјер, када добије задатак, не покушава да га разумије, већ случајно, за његово рјешавање, користи било који алгоритам.

Лерон и Дубински (Leron & Dubinsky, 1995) наводе да је механичко разумијевање попут празног формализма. Јавља се када ученици формално рјешавају проблеме без разумијевања процеса и објеката који их формално описују. Они тврде да формални опис математичких појмова, који већ постоје у свијести ученика, и прикладна симболика, за преношење тих појмова, може значајно утицати на даљи развој математичких знања. У том смислу, предлажу активности које пружају, почетно, интуитивно упознавање са математичким концептом (Ibid). Психолошко гледано, ријеч је о активностима које ученицима помажу да „конструишу“ менталне процесе, објекте и односе неопходне за смислено разумијевање концепта.

Џонс (Jones, 2012) указује на значај учења математике са разумијевањем. Такво учење подржава аутономију и самопоуздање ученика, док поражава математичку анксиозност или страх од математике и незаинтересованост за математику. Ријеч је о томе да ученици постају анксиозни када памте поступке не разумијевајући разлоге својих поступака. Учење са разумијевањем ствара прилику самосталног схватања концепата, те рјешавања нових проблема, као и стицања задовољства учења на изазовним задацима. Тиме се промовише флексибилност размишљања и развој вјештина рјешавања проблема, које су неопходне за успјех у нашем високо технолошком друштву, које се брзо мијења. Исто, Хиеберт и Карпентер (према Jones, 2012) наводе неколико предности учења математике са разумијевањем:

- Разумијевање је генеративно. Када ученици разумију математику, већа је вјероватноћа да ће осмислити стратегије и поступке како би побољшали тренутно разумијевање и стекли нова знања. На примјер, ако ученици разумију резултат множења било ког броја са 10, овај образац могу проширити на множење са 100 или 1000, стварајући тако нова знања о множењу са вишеструким десетицама.
- Разумијевање унапређује памћење. Када ученици схвате шта су научили, већа је вјероватноћа да ће то упамтити и касније примијени на нешто друго. На примјер, ако ученици схвате да се паралелограм може трансформисати у правоугаоник, одсијецањем правоуглог троугла на једном крају паралелограма и додавањем на други крај паралелограма, већа је вјероватноћа да ће упамтити формулу за површину паралелограма.
- Разумијевање побољшава пренос–трансфер знања. Када ученици разумију математичке појмове, они препознају сличности које нови појмови имају са претходно наученим и претходно знање могу да примијене на нове задатке. На примјер, ако ученици разумију рачунавање са цијелим бројевима, већи дио овог знања могу да примијене на рачунање са децималним бројевима.
- Разумијевање утиче на увјерења ученика. Искуство ученика у учењу математике утиче на њихова увјерења према математици као наставном предмету. Ако се од ученика затражи да запамте чињенице и детаљна правила, онда они имају тенденцију да вјерују да се математика састоји од чињеница и правила. Али, ако њихово искуство из математике укључује повезивање математичких појмова, тада они имају тенденцију да вјерују да је математика повезан систем знања (Ibid).

Гинсбург и колеге (Ginsburg et al., 1992) разумијевање разматрају у шири психолошки контекст, тј. разумијевање приказују као поступке стварања смисла, који укључују следеће:

- Неформално знање, формално знање и развој веза унутар и између ових домена;
- Улога посредничке шеме у стварању веза између неформалног и формалног знања и унутар ових домена;
- Правила за трансфер (преношење), генерализацију и примјену математичких знања;
- Могућност за учење – самосвијест, вербална флуентност и метакогниција;
- Вјеровања, ставови и осјећања вишег реда.

Са или без употребе посредничких шема, ученик покушава да схвати формалну математику представљену у школи. Чини се да „разумијевање“ формалне математике укључује неколико карактеристика, тако да је главна формирање веза унутар и између неформалне математике, формалне математике и посредничких шема. Тако, ученик тумачи понуђени аспект формалне аритметике у смислу различитих неформалних појмова и поступака, посредничких шема и разних других формалних појмова и поступака (Ginsburg et al., 1992). Размотримо врло једноставан примјер. Претпоставимо да ученик има за задатак да израчуна вриједност збира бројева 2 и 3. Ученик може на различите начине да израчуна збир. С једне стране, ученик може једноставно да запамти комбинацију бројева као такву и без икакве везе са било чим другим, што представља једноставно памћење без разумијевања. Затим, ученик може да повеже просту комбинацију бројева са другим аспектима математичких знања, на примјер, са већ наученом процедуром бројања, схватајући да ако се скуп од два елемента комбинује са скупом од три, и пребројавањем, резултат ће бити пет. Такође, ученик може да повеже комбинацију бројева 2 и 3 са разним формалним концептима или процедурама, као на примјер са операцијама на бројевној правој, ако се помјеримо напријед од броја 2 за 3 једнака размака, долазимо до броја 5. Ово, заузврат, може бити повезано са формалним законом комутативности, да ученик уочи то помјерање напријед од броја 2 за 3 једнака размака даје исти резултат као помјерање напријед од броја 3 за 2 једнака размака (Ibid).

Различите карактеристике, описане горе, тј. везе између области знања, трансфера и генерализације, могућности за учење, као и увјерења и ставови, доприносе разумијевању или се могу сматрати аспектима разумијевања. Јасно је да не постоји један или једноставно критеријум разумијевања, нема дискретне „тачке“ када можемо рећи да је разумијевање присутно или одсутно. Што се више ученик удаљава од памћења напамет и механичке примјене изолованих поступака, а што се више креће ка сложенијим везама, флексибилним генерализацијама, активном учењу и продуктивном увјерењу, то можемо рећи да је више присутан степен разумијевања (Ibid).

Дакле, чини се да је широко прихваћена категоризација математичког знања на концептуално и процедурално, као и математичког разумијевања на инструментално и релационо или механичко и смислено. Такође, са едукативног аспекта, поставља се питање о важности концептуалног и процедуралног знања и како се између њих може одредити одговарајућа корелација. Може се јасно уочити да је концептуално знање у корелацији са процедуралним знањем. Другим ријечима, ученици који показују висок ниво концептуалног знања обично показују висок ниво процедуралног знања. Заправо, концептуално знање побољшава способност примјене процедуралног знања. Тако се инструменталним или механичким разумијевањем слиједи поступак извођења претходно наученог алгоритма и ученик није у могућности да стечено знање користи у различитим контекстима. Међутим, релационим или смисленим разумијевањем ученик ствара више веза у усвојеним математичким знањима и може да их примјењује у различитим контекстима. На примјер, релационим разумијевањем, флексибилно, се изводи више планова рјешавања математичких задатака, док се инструменталним разумијевањем не разумију планови добијања различитих рјешења. Стога је изграђивање концептуалних знања релационим разумијевањем тежи и временски захтјевнији приступ учења, којим ученици разумију зашто се одређена знања могу примијенити и под којим условима. И поред ученицима прихватљивијег процедуралног приступа усвајања математичких знања, за, лакше и брже, добијање тачног одговора, ипак треба инсистирати на концептуалном приступу изграђивања релационог, смисленог, разумијевања математичких знања ученика. Тиме, имамо да, утрошено вријеме смањује могућност поновног учења наставних садржаја математике и доприноси повезивању постојећих са новим знањима, која је потребно даље проширити.

1.2. Развој математичког знања

Извор формирања математичких појмова, како наводи Де Ланж (De Lange, 1992), треба да буду феномени помоћу којих се појмови појављују у стварности. Стварни свијет ситуација (или проблема) истражује се прво интуитивно, а потом, организовањем и структурирањем, идентификују се математички аспекти ситуације (или проблема) и откривају правилности и односи. Ово почетно истраживање, са снажном интуитивном компонентом, требало би да доведе до развоја, открића или поновног откривања математичких концепата. Јасно је да зависно од фактора као што су интеракција између ученика, те интеракције између ученика и наставника, затим друштвено окружење ученика и способност ученика да формализује и апстрахује, ученици ће прије или касније извући математичке концепте из реалне ситуације. Ово је оно што представља карактеристике концептуалне математизације. Исто, Стринфленд (Streefland, 1992) сматра да ученици, вођени наставником, прелазе са конкретног нивоа на ниво формалних процедура и знања о материји, када се она систематизује, и то, прије свега, кроз сопствене неформалне приступе и стратегије. Садржај, позајмљен из контекста, пролази кроз различите врсте трансформација (скраћивање, поједностављивање и симболизовање) док се не изведу правила и формуле. Даље, након формализовања и апстраховања ових појмова, ученици их примјењују на нове проблеме. Ово доводи до јачања концепата који су конструисани, и до прилагођавања перципираног стварног свијета (De Lange, 1992). Уз то, по Колбовом мишљењу (према De Lange, 1992), за успјешно учење ученицима су потребне четири различите врсте искустава: конкретно искуство, рефлексивно посматрање, апстрактна концептуализација и активно експериментисање.

Зашто су истраживачи заинтересовани за процесе који су укључени у учење математике? Један од основних разлога је стицање теоријских знања о ономе што се дешава у уму ученика. Свакако, постоји неко интризично интересовање за ово фундаментално питање. Ту су веома важни наставни процеси, који се не дешавају сами од себе, за које се надамо да ће заинтересовати ученика, али, и ако се то догоди, да ли су их ученици неизбјежно свјесни? Дрејфус (Dreyfus, 2002) истиче да су то уско повезани математички и психолошки процеси. На примјер, када радимо график функције изводимо математички процес, слиједећи одређена правила на математичком језику, и, у исто вријеме, стварамо визуелну слику графикона, односно, визуализујемо функцију на начин који нам касније може помоћи да схватимо функцију. У ствари, ова повезаност математичког и психолошког аспекта чини процес развоја математичког знања. Осим тога, настава математике од основне школе до универзитета се изводи слично ритуалима, „уради то, онда израчунај,...“, а наставници, обично, за довољан услов постизања успјеха, прихватају правилно изведени ритуал. На крају, суочавамо се са чињеницом да, ученици имају знатну количину математичког знања, али без радне методологије математичара, тј. не умију флексибилно да користе стечено знање за рјешавање непознатих проблема (Ibid).

Једна од брига математичког образовања односи се на начин на који ученици размишљају о математичким објектима, и нарочито на математичко размишљање које су самостално развили, било на елементарном или напредном нивоу. Брандемберг (према Gereti & Savioli, 2015:208) указује да развој напредног математичког мишљења погодује учењу математичких садржаја, у којем „ученик мора ментално да манипулише, истражује и открије ствари о предмету свог знања, а не дјелимично и фрагментирано, желећи да визуализује своје цјелокупно уопштавање ”(Ibid:208). Стога, постизање напредног математичког размишљања ученика ни најмање није једноставан задатак. Међутим, постоје неке индикације о томе како рано излагање изазовним математичким садржајима ученицима може пружити искуства на којима ће се касније градити, математичке генерализације и апстракције (Selden & Selden, 2005).

Један од најефикаснијих начина учења математике је откривање или више поновно откривање односа. Донекле, та дјелотворност приписује се психолошким аспектима процеса открића: личном ангажовању, интензитету пажње, осјећају постигнућа и успјеху (Dreyfus, 2002). Учење открићем, међутим, захтијева доста времена, и то је један од разлога зашто наставници не прибјегавају његовој примјени. Али главно питање односи се на ефикасност учења откривањем не само у смислу обрађених тема, већ у смислу дубине разумијевања. Уопштено, у којој мјери би ученицима већи нагласак на процесима, а мање на садржајима, помогао у смисленом учењу апстрактне математике? Стога, пажњу усмјеравамо на питање психолошких процеса развоја математичког знања.

Према Дрејфусу (Dreyfus, 2002), најважнији процес развоја математичког знања је процес апстраховања. Ако ученик развија способност свјесног стварања апстракције математичких ситуација, постигао је напредни ниво математичког мишљења. Поред процеса репрезентација, о којима је више описано у наредном поглављу, предуслов апстраховања чине генерализација и синтеза. Прво, укратко да их размотримо. Генерализације је извођење или стварање, идентификовање заједничких својстава на основу појединачних посебности. Стога је овај процес важан, јер успоставља резултат за велики број случајева и тако проширује домен валидности. Искуство потврђује да је ученицима тешко извођење генерализације. Синтеза је представља повезивање дјелова у једну цјелину. Тада, цјелина приказује више од збира појединачних дјелова. Пракса, међутим, указује да се процесу синтезе не посвећује довољна пажња. Док наставник детаљно објашњава детаље, ученик их изводи, тако да су малобројне осмишљене активности које подстичу ученике на синтезу различитих аспеката концепта и/или различитих концепата унутар домена или чак различитих домена. То је више активност наставника, а не ученика. Нестандардно питање, чак иако је готово тривијално, али захтијева одређену флексибилност мишљења и синтезе, обично је ван домашаја, бар за просјечног ученика (Ibid).

Претходно описани процеси генерализације и синтезе допуњују процес апстракције, али ниједан од ова два процеса не захтијевају толико когнитивног напора од ученика као процес апстракције. Апстракција тако садржи потенцијал и за генерализацију и за синтезу, и, обрнуто, своју сврху добија углавном од могућности генерализације и синтезе. Апстраховање је прије свега конструктиван проце, изградња менталних структура, тј. својстава и односа између математичких објеката. Овај процес зависи од изолације одговарајућих својстава и односа. То захтијева способност преусмјеревања пажње са самих објеката на структуру њихових својстава и односа. Таква конструктивна ментална активност ученика увелико зависи од усмјеравања пажње ученика на оне структуре које треба да буду дио апстрактног концепта и изостављене од оних које су небитне у предвиђеном контексту. Структура постаје важна док се изостављају небитни детаљи, чиме се смањује сложеност ситуације. Према томе, фокусирање пажње може добро да функционише ако је количина информација у детаљном опису унутрашње структуре ограничена. Ако су, међутим, примјери превише сложени, тј. ако имају многа својства, која треба да се примијене у току апстракције, биће тешко постићи фокусирање пажње. Тада, треба одабрати појединачни случај у комбинацији са дефиницијом апстрактног концепта, тако да се узимају очигледна својства и односи, на примјер корисне активности ангажовања ученика. Ово је један од начина да наставник усмјери пажњу ученика на она својства и односе који су важни за планирану апстракцију (Ibid).

Поред наведеног, процес апстраховања отвара питање: Како стварамо мета структуре које су толико чврсто повезане са визуелним сликама, ако оне представљају односе измијењених конкретних објеката са којима су првобитно повезане? Визуелне слике су обично општи и захтјевни аспекти структуре. Дакле, ако се могу наћи одговарајуће визуелне слике, оне ће вјероватно бити од помоћи ученицима који се баве апстакцијом. Али, дешава се да, визуелни модели прикладни за апстрактне математичке концепте не постоје, нијесу потпуни, или чак доводе у заблуду, и тада се мора бити пажљив (Ibid). Иако се идентификују опасности

процеса визуализације, когнитивне студије указују на огроман потенцијал визуелног приступа смисленом учењу. Познато је да визуализација игра суштинску улогу у раду многих еминентних математичара. То је процес у којем настаје ментална репрезентација. Чин стварања менталне репрезентације ослања се на систем репрезентација, тј. конкретне спољне артефекте помоћу којих се материјализују. На примјер, у случају функција, артефекат су: графици, алгебарске формуле, дијаграми и табеле. Дакле, менталне репрезентације настају у уму на основу конкретних система репрезентације. При томе, за исти математички концепт, ученик може створити једну или више менталних репрезентација (Ibid).

Да бисмо организовали и сумирали горе описане процесе развоја математичког знања, приказујемо следећу табелу (Табела 1).

Табела 1. Развој математичког знања, коју је развио Дрејфус (према Gereti & Savioli, 2015:211).

Процеси укључени у репрезентацију	
Симболичка репрезентација	Математички концепт/објекат може се приказати писањем, у облику исказа или симбола. При том, значање овог записа потребно је повезати са приказаним математичким концептом/објектом.
Ментална репрезентација	Приказивање математичког концепта/објекта догађа се у уму појединца, у односу на скуп конкретних приказа концепта/објекта.
Визуелизација	Кроз интуицију и разумијевање, овај процес омогућава стварање менталних представа.
Промјена репрезентација и њихово превођење	Превођење различитих репрезентација концепта/математичког објекта захтијева способност да се правилно повежу кад год је то потребно. Транслација репрезентација односи се на превођење информација из једног математичког исказа/својства у други, као и превођење између математичког и вербалног језика.
Моделовање	Предмет/поступак моделовања захтијева изграђивање математичке структуре/теорије, који обухвата њене карактеристике.
Процеси укључени у апстракцију	
Синтеза	Примјена композиције различитих математичких објеката/концепата међусобно их повезујући са циљем рјешавања задатка у цјелини.
Генерализација	Из посебних случајева, идентификују се заједничке карактеристике које треба проширити. Постоји могућност укључивања формулације других математичких концепата.

Дрејфус (Ibid) развој математичког знања представља интеракцијом различитих процеса, попут процеса репрезентације и апстракције. За аутора, не постоји јасна разлика између процеса који су укључени у напредно и елементарно математичко мишљење. Постоје теме из елементарне математике о којима се можемо бавити на напредан начин, баш као што постоји елементарно размишљање о напредним темама. Оно по чему се разликују ове двије врсте мишљења јесте сложеност начина на који се поступа и управља у сваком од њих. Према томе, ученици треба да постану свјесни интеракције између процеса као што су репрезентације и апстраховање. Циљ је ученицима приближити математичко размишљање што је могуће ближе ономе који ради математичар. Неопходан предуслов за постизање тог циља је разумијевање напредних математичких процеса и њихове међусобне интеракције (Ibid).

Психолошке процесе развоја математичког знања разрађује Сфард (Sfard, 1991). Она, на основу чисто теоријске анализе односа између процеса и објеката, указује на три „степена структурирања“ математичког знања. Њен модел учења, претпоставком оперативног „поријекла“ математичких објеката, прво подразумијева поступак извођења на већ познатим објектима, а затим превођење овог процеса у аутономни ентитет и на крају требало би да се тај нови ентитет види као интегрисана цјелина објеката. Ове три фазе у развоју концепта назива интериоризацијом, кондензацијом и реификацијом. Дакле, док су интериоризација и кондензација постепене, квантитативне, а не квалитативне промјене, реификација је тренутни квантни скок: процес се учвршћује у објекат, у статичну структуру. Различите репрезентације концепта семантички обједињују овај апстрактни, чисто имагинарни конструкт. Нови ентитет се убрзо одваја од процеса, који га је произвео и своје значење „црпи“ из чињенице да је „припадник“ одређене категорије. Овим процесом реификације, повећава се способност рјешавања проблема и учења, па што је наш приступ структурнији, то је наше повјерење у оно што радимо дубље (Ibid).

Когнитивни развој, од елементарног до напредног математичког мишљења, Тол (према Selden & Selden, 2005) тумачи као значајан прелаз: од описивања до дефинисања, од убјеђивања до логичког доказивања заснованог на дефиницијама. Заправо, изграђује се кроз два паралелна развоја. Један укључује прелаз од визуелно–просторног до вербално–дедуктивног, а други од равнотеже визуелног убјеђења и процесне манипулације до дефинисаних објеката и формалне дедукције. Уједно, ово су питања расвјетљавања специфичне математичке праксе, заједно са развојем повезаног математичког знања. Поред наведеног, једна врло општа пракса која се појављује у наставном програму и у раду математичара може се назвати структурирањем стварног свијета и математичких проблема. Под структуирањем подразумијева се увођење нотације–записа, дијаграма, дефиниција, анализа итд., у класу проблема да би се олакшало њихово рјешавање, у неким случајевима претварају се у друге врсте проблема (Selden & Selden, 2005). Расмусен и колеге (Rasmussen et al., 2005) питање структурирања разјанили су математизацијом, посебно симболизацијом. Почевши са стварним свијетом, или са математичким проблемом, математизација је процес разматрања и размишљања који се наизмјенично мијења између два облика – хоризонталног, у којем се математика проширује, и вертикалног, током којег се креира нова математика (нотација, алгоритми, дефиниције итд). Њихов поглед на „напредовање“ није толико у размишљању ученика у датом тренутку, колико у начину на који ученик развија мишљење током времена и конструише дио пратеће математике (Ibid). Друга уобичајена врста структурирања је моделовање које не мора укључивати стварање нових математичких објеката. У традиционалном погледу моделовања, ученик обично почиње са проблемом у познатом окружењу (стварном свијету или математичком) и додаје (или се фокусира на неки аспект) структуре, као што су промјенљиве, дијаграми, једначине, функције итд. Заправо, у питању је претварање датог проблема у више познатом математичком домену (Selden & Selden, 2005).

У литератури су препознате три компоненте сваког математичког концепта/појма: лингвистичка (математички речник, синтакса и правила превођења математичког језика у матерњи и обрнуто), концептуална (математичка идеја и ментална визија појма), процедурална (рачунарски поступак који се примењује у односу на концепт) (Лазаревић, 2015: 151). Пошто смо већ у поглављу *Врсте знања* указали на концептуални и процедурални аспект математичких појмова, овдје је интересантно приказати значај језичког аспекта математичке и научне писмености ученика основношколског узраста. Тако, Моро и Кокан–Виено (према Стевановић & Ивковић, 2017) разматрајући на који начин једанаестогодишњаци разумију аритметичке проблеме дате кроз текстуалне задатке, објашњавају да на постављање математичког задатка и његов резултат може утицати начин на који ученици разумију специфичне језичке конструкције (нпр. више од) помоћу којих је задатак формулисан. Исто, у

истраживању TIMSS 2015 у Србији, Стевановић и Ивковић (Стевановић & Ивковић, 2017), на основу анализе одговора ученика, потврдно говоре о међуодносу језичке, математиче и научне писмености. Заправо, они наводе да је постигнуће, у извјесном смислу, условљено способношћу да се постојеће знање вербално искаже, односно да се језички формулише (Ibid).

Сингер и колеге (Singer et al., 2011) указују на концепт динамичког структуралног учења. Оно настоји да покрене дидактички приступ са „хоризонталног" начина сагледавања наставе – информације које треба пренијети – до трајног процеса „вертикалног" реструктурирања знања ученика, уграђивањем нових елемената у динамичку структуру. То подразумијева вјежбање задатака који су фокусирани на трансфере: од рада са различитим конкретним објектима до апстрактног размишљања и враћања на конкретне примјере; од размишљања наглас до „размишљања у уму" и обрнуто. Све ово се практикује уравнотеженим „дозирањем" конвенционалних репрезентација. Ова врста учења подразумијева идентификацију и развој оптималних индивидуалних путева у вишедимензионалној мрежи наставне праксе. На примјер, на почетку формирања појма броја знање ученика је површно: бројеви су правилно распоређени у бројевном низу и означени су према њиховом положају. У даљем развоју формирања појма броја, потребно је да се постигну два циља: подизање интернализоване структуре на ниво формалног појма природног броја, односно разумијевање концепта природног броја и трансформација интернализоване структуре у динамичку. Поставља се формат задатака, који је у основи циклуса трансфера како би се, интернализовали различити прикази и, што је подједнако важно, начини преласка са једне репрезентације на другу. Циљ је да се ученику помогне да изгради динамичну менталну структуру коју може самостално да развија и генерализује кроз нове задатке у адекватном контексту (Ibid). Стога, у наредном дијелу, за развијање динамичке менталне структуре, приказујемо различите репрезентације математичког концепта.

Дакле, развој математичког знања представља процес који се састоји од великог броја интерактивних компоненти. Суштина напредног математичког размишљања, у било којој фази садржи више процеса, као што је наведено, репрезентацију, визуелизацију, генерализацију, анализу, синтезу, апстраховање и друге. Важно је да наставник математике буде свјестан ових процеса како би разумио проблеме са којима се ученици сусрећу у развоју математичких знања.

1.3. Репрезентације у настави математике

Када рјешавамо проблеме, човјек користи како унутрашње репрезентације, смјештене у мозгу, тако и спољашње репрезентације, забиљежене на папиру, табли или неком другом медијуму. Видјели смо да су процеси репрезентација и апстаховања међу најважнијим процесима развоја математичког знања. Говори се о два комплементарна процеса супротних праваца. Са једне стране, концепт који је често апстахован из више својих поновљених репрезентација, а, са друге стране, репрезентације су увијек прикази неког апстрактног концепта. Ипак, ово су само неки од многих процеса који се појављују и одвијају као интерактивне везе „стварања" математичког знања. Овдје ближе описујемо репрезентацију концепта у настави математике.

Сам појам репрезентације концепта значи, на примјер, осмислити слику истог. Иако је важно имати више репрезентација концепта њихово постојање само по себи није довољно за флексибилну употребу концепта у рјешавању проблема. Успјешно управљање информацијама, које се користе у рјешавању проблема, могуће је ако су различите репрезентације правилно и „чврсто" повезане. Један од могућих приступа у настави је систематска употреба више репрезентација и наглашавање процеса смјењивања репрезентација. Процес, релевантан за напредно математичко мишљење, који је уско повезан

са смјењивањем репрезентација је транслација, односно превођење значења, са једне формулације математичког исказа на други. Ова коресподенција је можда очигледна наставнику али за ученика је конструкција одговарајуће менталне шеме тежак задатак, који треба да буде подржан експлицитним акцијама наставника (Dreyfus, 2002). Наведено иде у прилог ставу да се знање математике побољшава ако ученик менталну репрезентацију приказује у посебну, на примјер, визуелну репрезентацију, као и да паралелно користи неколико репрезентација. Опет постоји комплементарност између математичког и когнитивног аспекта представљања математичких структура. Обје комплементарности, једна између апстраховања и репрезентација и друга између математичких и менталних репрезентација, могу се користити за дидактичку употребу у процесима учења. Тада, процеси учења се посматрају кроз четири фазе:

- Примјена једне репрезентације;
- Примјена паралелних репрезентација;
- Изграђивање веза између паралелних репрезентација;
- Интегрисање репрезентација и њихово флексибилно смјењивање.

У првој фази процес започиње конкретним случајем, једном репрезентацијом. У другој фази, неколико репрезентација истог математичког објекта се користе паралелно. Тежак процес преласка на апстрактан концепт, у суштини, зависи од веза између формалних репрезентација. Успостављање ових веза представља трећу фазу. Јаке везе омогућавају ученицима смјењивање репрезентација, што им за узврат даје разумијевање основног концепта и стога позитивно утиче на апстракцију. У четвртој фази се дешава процес интеграције различитих репрезентација. Ова фаза је дјелимична процесу апстракције, односно, везе, односи, заједничка својства остају у формирању апстракције концепта, док специфични аспекти репрезентације остају у позадини. Једном када је овај процес комплетиран, формира се апстрактни појам датог концепта и неко „посједује“ тај концепт. Када треба да ријеши проблем у којем се овај концепт јавља, често се, једном или више пута, мора вратити на његове конкретне репрезентације. Значајно за апстрактан концепт јесте контрола над репрезентацијама које се користе. Употреба неколико репрезентација ученицима помаже да пређу из ограниченог, конкретног разумијевања одређене теме на апстрактно и флексибилно разумијевање (Ibid).

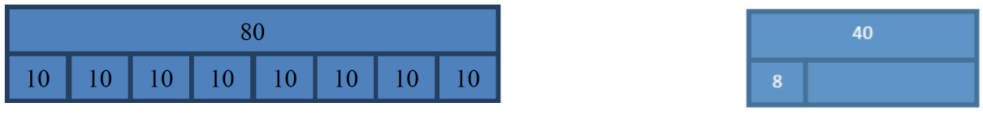
Ларкин и Симон (Larkin & Simon, 1987) истичу да структура и доступност података репрезентација утиче на могућности њихове примјене у рјешавању проблема. Ријеч је о сентенцијалним и дијаграмским репрезентацијама. Структура података у којој се елементи појављују у једном низу је сентенцијална репрезентација. Изрази чине секвенцу која одговара, појединачно, реченицама у језичком опису проблема. Структура у којој се информације одређују дводимензионалном локацијом је дијаграмска репрезентација. Сваки израз садржи информације које се уграђују на одређено мјесто у дијаграму, укључујући информације о односима са сусједним локацијама. У сентенцијалним репрезентацијама сваки елемент је „сусједан“ само следећем елементу, док код дијаграмских репрезентација више елемената може дијелити исти положај, сваки елемент може бити „сусједан“ са било којим другим елементом. Ова једноставна разлика упућује на следеће разлоге због којих је за рјешавање проблема дијаграм бољи од вербалног описа:

- Дијаграми могу груписати све информације које се користе заједно, чиме се избјегава тражење неопходних елемената за рјешавање проблема.
- Дијаграми обично користе локацију за груписање информација о једном елементу, избјегавајући потребу за одређивањем симболичких ознака.
- Дијаграми аутоматски подржавају велики број перцептивних закључака.

На примјер, дијаграм (Слика 3.*а*) којим се не траже неопходни елементи за рјешавање проблема можемо искористити, на примјер, за начине записивања вишеструке десетице: адитивни (10+10+10+10+10+10+10+10=80) и мултипликативни запис (8 · 10).

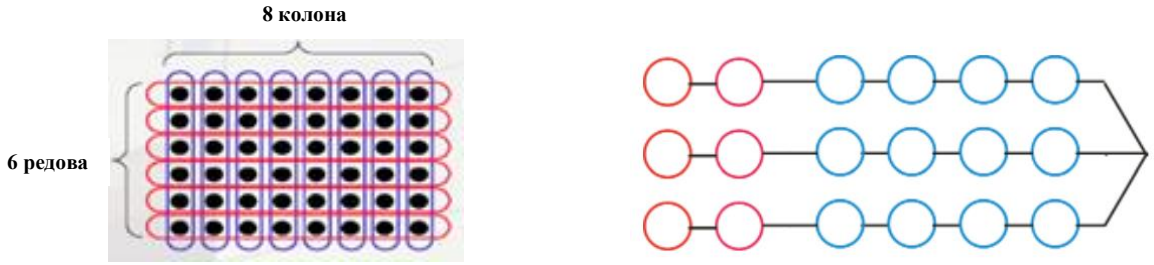
За значење операције сабирања (одузимања) или разумијевање односа множења и дијељења може нам користити дијаграм са груписаним информацијама о једном елементу (Слика 3.*б*). Тако, овај дијаграм (Слика 3.*б*) приказује информације за израчунавање непознатог сабирка или дјелиоца или количника. Треба нагласити да значење ових рачунских операција у почетној настави математике не исказујемо дефиницијом, већ се користе различите активности кроз реалне ситуације које се могу апстраховати дијаграмом (Зељић, 2014).

Помоћу креираних дијаграма приказаног на слици 4.*а,б* можемо да изведемо више перцептивних закључака, тј. правила аритметике, комутативност множења (4.*а*) и својства множења збира бројем (4.*б*). При томе, примјена правила аритметике само као активности „рачунај на два начина“ није функционална, већ има пуни смисао када се сагледава као основа провођења аритметичких процедура (Зељић, 2014).



(а) *(б)*

Слика 3. *а)* Дијаграм са познатим свим информацијама *б)* Дијаграм информација са једним непознатим елементом (Koleza, 2015:1942–1943).



(а) *(б)*

Слика 4. Дијаграми за извођење правила аритметике (*а)*(Koleza, 2015:1945); *(б)*(Зељић, 2014:93).

Ово показује да дијаграми могу бити боље репрезентације не зато што садрже више информација, већ зато што одређивање тих информација може да подржи изузетно корисне и ефикасне аритметичке процедуре. Али, то не значи да су дијаграми корисни само онима који знају одговарајуће процедуре рачунања. Штавише, за рјешавање проблема ученицима, често, су потребна и знања о томе како се конструише „добар“ дијаграм, који пружа оквир за даље проучавање знања, потребног за ефикасну употребу дијаграма (Ibid).

Употребу разноврсних вишеструких репрезентација у савременој настави математике, Милинковић и Дабић–Боричић (Милинковић & Дабић Боричић, 2018) сматрају кључним за успјешан процес учења. Због тога истичу питање оспособљености будућих наставника у осмишљавању добрих визуелних репрезентација математичких идеја. У вези са тим, добар избор јесте онај који испуњава два услова:1) математички је коректан; 2) ученицима је разумљив на очекивани начин. Први услов указује на поштовање принципа научности, што наставника обавезује на научно, тачно репрезентовање математике као научне дисциплине, али поједностављеним наставним садржајима. Други услов представља прилагођавање школских садржаја математике нивоу знања и општег развоја ученика, односно на потребу за испуњеношћу методичког принципа комуникативности којим се, као један од основних циљева процеса математичког образовања, истиче комуникација о математичким идејама. При том, да би ученици усвојили конкретне репрезентације које користе наставници, као средство комуникације, оне треба да буду одраз друштвено прихваћеног тумачења. Заправо, у складу са аспектима функционалне комуникације, наставник треба да познаје различите медије за комуникацију, уважавајући могуће недостатке сваког начина представљања. Према томе, одговорност за успјешну комуникацију математичких садржаја лежи, у великој мјери, на наставнику, тј. потребно је да разумије значај комуникације математичких идеја и да познаје најефикасније начине комуникације, укључујући моделе визуелних репрезентација математичких садржаја.

Голдин (Goldin, 1992) у процјењивању математичког разумијевања сматра да је потребно размотрити начине на које информације могу бити представљене од стране оних који рјешавају проблеме. Он указује на пет различитих репрезентација когнитивних система у рјешавању математичких проблема: (1) вербална/синтаксичка, (2) сликовна, (3) формално нотацијска, (4) хеуристичка, и (5) афективна. При том, наведени репрезентативни системи се не процјењују одвојено и дискретно, јер било која активност рјешавања проблема у математици подразумијева међусобну повезаност неколико система когнитивног представљања. Прије него што укратко продискутујемо репрезентације рјешавања проблема, циљ сагледавања математичког разумијевања јесте добијање свеобухватних информација о способностима ученика у координацији различитих репрезентација, и тиме одговарајуће преобликовање математичких идеја из једног унутрашњег система репрезентације у други.

Вербално/синтаксички систем репрезентације, свакако важан аспект математичког разумијевања, укључује компетенције повезане са синтаксичком обрадом језички описаног проблема, у распону од идентификације декларативних информација и питања или исказа циља проблема, до препознавања различитих врста математичке фразеологије. Сликовни систем представљања подразумијева конструкцију и обраду визуелних/просторних конфигурација, тактилних/кинестетичких конфигурација и тако даље. Сликовне конфигурације могу бити изазване ријечима, симболима, хеуристичким процесима (на примјер, стратегија „нацртај дијаграм“) или афектом. Формални нотацијски систем представљања репрезентација се односи на системе математичких симбола и њихову употребу (на примјер за: нумерацију, аритметичке операције, алгебарско представљање, итд.), као и на праћење формалних процедура, вербални опис формалних процеса итд. Хеуристички когнитивни репрезентативни систем представљања односи се на хеуристичко планирање и праћење сопствених процеса рјешавања проблема ученика. Овдје, укључујемо сложене, добро формулисане стратегије као што су испробавање посебних случајева, анализу података и циљева или цртање дијаграма, као и нејасно дефинисане стратешке одлуке. Коначно, афективни систем представљања обухвата процјену афекта – осјећања или емоционалних стања која се јављају током математичке активности и последице тих осјећања. Ово не би требало да буде ограничено на питање става ученика према математици као наставном предмету, већ, такође, укључити и испитивање промјена стања афекта током математичке активности, на примјер: Да ли ученик рјешавање проблема почиње са осјећајем радозналости и ишчекивањем математичког открића, или са бригом и сумњом у себе? Да ли анксиозност

омета ученика, и ако јесте, шта је њен извор? Да ли ученик конструктивно користи осјећања фрустрације, да предложи нове хеуристичке процесе (као што је покушај постављања једноставнијег проблема), или су сигнал да одустане? Колико је ученику забавна математика? (Goldin, 1992). Сврха сагледавања наведених когнитивних репрезентативних система претпоставља не само да провјеримо скуп вјештина специфичних за рјешавање проблема, већ да развијемо широке, сложене когнитивне системе, који ученику пружају прилику да се ухвати у коштац са новим ситуацијама, како оне настају, те да их интерно представља користећи репрезентације на различите начине, и одговарајуће преобликовање математичких идеја, из једног унутрашњег система репрезентације у други.

Према Џонсу (Jones, 2012) репрезентације у математици могу имати различите облике и служити у више сврха. Репрезентације су графикон, једначина, табела, дијаграм, симбол или слика који помажу бољој визуализацији и темељном разумијевању математичког концепта. Избори које ученици користе за представљање идеја утичу на то колико их добро разумију. Понекад је корисно вишеструко представљање репрезентација истог проблема. Репрезентације могу осмислити ученици или их могу представити наставници. Обрадовић и Зељић (Обрадовић & Зељић, 2015) указују да правилно одабране репрезентације детерминишу процес истраживања математичких проблема и извор су значења математичких појмова и односа између њих. Избор одговарајућег начина представљања може помоћи да се јасно сагледа структура проблема током процеса решавања. Пожељно је да ученици знају и да се служе различитим репрезентацијама, као математичким средством, и да се одлуче за одређени систем представљања проблема који потом активирају у одређеној проблемској ситуацији. Да би постигли овакву способност, ученици треба да имају прилику да проверавају успешност различитих представа и да изједначе њихова значења (Ibid:72).

По мишљењу Поља (Polya, 1973), репрезантације у виду слика су значајне за рјешавање негеометријских и геометријских проблема. Слике нијесу само предмет геометријских проблема, већ и важна помоћ за све врсте проблема у којима, на почетку, нема ничега геометријског. Он, користећи прикладан геометријски приказ, све врсте проблема покушава да изрази сликом и своди на проблеме геометрије. Стога, чак и ако проблем није проблем геометрије, сматра да је потребно нацртати слику. Проналажење геометријског приказа негеометријског проблема је важан корак ка рјешавању проблема. Наводи два добра разлога за примјену слика у рјешавању проблема.

1. Ако је проблем геометрије морамо узети у обзир слику. Ова слика се може замислити или се може забиљежити на папиру. У одређеним приликама пожељно је замислити слику без цртања, али ако се испитује више различитих детаља, један за другим, пожељно је нацртати слику. Детаљи које смо замислили могу бити заборављени, али детаљи забиљежени на папиру остају и подсјећају нас на претходна запажања, олакшавају нам неке проблеме којих се сјећамо из ранијег разматрања.

2. У проблемима геометријске конструкције посебно разматрамо коришћење слика. Детаљно разматрање таквог проблема започињемо цртањем слике, која садржи непознате податке и сви ови елементи се састављају, како је прописано условом проблема. Да бисмо јасно разумјели проблем, морамо да размотримо сваки податак и сваки дио услова посебно. Затим, поново спајамо све дјелове и разматрамо стање у цјелини, покушавајући истовремено да видимо различите везе и односе података који се испитују у проблему. Тешко бисмо успјели да обрадимо, раздвојимо и комбинујемо све ове детаље без слике на папиру, али истичући да је слика помоћ, али никако основа наших закључака (Ibid).

Важно питање репрезентације проблема је валидност репрезентација (Jonassen, 2000). Џонасен (Ibid) посебно истиче значај репрезенције проблема за ученике који су почетници у рјешавању проблема. Иако су репрезентације проблема у формалним ситуацијама учења

обично симулација свакодневних и професионалних проблема, наставници одлучују које компоненте проблема укључују и како их представљају ученицима. Да ли је проблем представљен у својој природној сложености и модалитету, или се филтрира, када се симулира? Да ли социјални притисак и временска ограничења треба тачно представљати? Односно, да ли се проблем мора ријешити у одређеном времену или се може ријешити у слободно вријеме? Који су нивои сарадње заступљени у рјешавању проблема? Ово су само неке од одлука које наставници морају донијети када представљају проблеме у настави (Ibid). Односно, они преузимају одговорност за „изградњу проблемског простора“ ученика, тј. одређују контекстуалне знакове, упутства или друге информације које треба да буду укључене. Колико су „доследни и отворени“ ови подаци одредиће сложеност проблема. Поред тога, наставници доносе одлуке о модалитету и медијуму за представљање различитих компоненти проблема.

У развоју когнитивних способности, како Брунер (према Вилотијевић, 2000) наводи, ученик пролази кроз три начина репрезентација – акциони, иконички и симболички, који се појављују наведеним редом. За акциони начин сазнавања карактеристична је акција, показивање покретама тако да изостају машта и ријечи. Иконичка (сликовна) репрезентација се темељи на машти. Знање се исказује сликама и графичким приказима који замјењују појмове. Замјена није потпуна, јер слика не може бити исто што и дефиниција појма. Симболички начин представљања знања одликује се способношћу ученика да, умјесто покрета и слике, користи појмове, да их хијерархизује по одређеним критеријумима, те да их комбинује и да разматра више могућности. За исказивање својих сазнања користи језик, ријеч, слово. Развој способности коришћењем три начина репрезентације условљен је трима факторима: а) количином вјештина, слика и концепција стечених у културном окружењу, б) начином живота и в) мотивисаношћу појединца да истражује различите начине сазнавања.

Заправо, да би ученици били успјешни у математици пожељно је имати богате менталне репрезентације концепта. Репрезентација је богата ако садржи више повезаних аспеката тог концепта, а лоша ако има премало елемената за флексибилно рјешавање проблема. Такву нефлексибилност често опажамо код наших ученика, тј. најмања промјена структуре проблема, или његове формулације, може их потпуно блокирати. У повољним случајевима, неколико менталних репрезентација, за исти концепт, може се надопуњавати и на крају се може интегрисати у једну представу тог концепта (Jonassen, 2000). Као резултат овог процеса су вишеструко повезане репрезентације, стање које омогућава коришћење више њих истовремено и ефикасно смјењивање између њих, у одговарајућим тренуцима, како то захтијева проблем, или ситуација о којој размишљамо. У сваком случају репрезентације концепта морају бити пажљиво конструисане и прилагођене когнитивним својствима ученика.

2. Постављање проблема у почетној настави математике

У нашем савременом динамичном друштву, изложеном непредвидивим промјенама, постављање проблема постаје образовна тема са великим потенцијалом оспособљавања ученика за потребе свакодневног живота. Постављању проблема се придаје више пажње у заједници математичког образовања – и као средству наставе (постављањем проблема ученици се ангажују у учењу важних концепата и вјештина) и као циљу наставе (развијање компетенције ученика у рјешавању проблема). При томе, ни наставници ни ученици нијесу рутински укључени у постављању математичких проблема. Важан практични аспект односи се на природу задатака, тј. које врсте задатака се могу сматрати задацима постављања проблема. С друге стране, јавља се питање наставних инструкција, односно, да ли би активности постављања проблема могле бити организоване на такав начин да ученицима помогну у развијању креативности и ефикасном учењу математике (Singer et al., 2011)?

Стога, у последње вријеме, чињеница је да се у настави математике јавља међународни тренд увођења реалистичких проблема и тиме потреба ка ширењу погледа на апликације, моделе, математизовање, моделовање, те успостављање веза између математике и других наставних предмета. Ове промјене математичког образовања, Блум (Blum, 1993), у свеобухватном и опсежном смислу, означава термином математичко моделовање. То је процес превођења између стварног свијета и наставе математике у оба смјера (Ibid). Моделовање се обично односи на проналажење математичких приказа не−математичког објекта или процеса (Dreyfus, 2002). Постоји више разлога за фаворизовањем моделовања у настави математике. На примјер, Блум (Blum, 1993) наводи четири суштинска аргумента, која углавном заснива на општим циљевима подучавања математике:

1. Прагматични аргументи – настава математике има за циљ да помогне ученицима разумијевање и рјешавање стварних ситуација и проблема, при чему је неопходно примијенити моделовање.
2. Формативни аргументи – бавећи се математиком ученици би требало да стекну општу квалификацију, као што је способност рјешавања проблема, или изграђивање ставова, попут отворености према новим ситуацијама, тако да је моделовање један од важних начина развоја личности ученика.
3. Културни аргументи – ученике треба подучавати математичким садржајима, као изворима за размишљање, или, у циљу стварања свеобухватне и уравнотежене слике математике, као науке и дијела људске историје и културе. Моделовање је суштинска карактеристика историје људског интелектуализма и стварне праксе, чиме може допринијети промоцији наведених аспеката.
4. Психолошки аргументи – одговарајући примјери моделовања могу допринијети смисленом учењу и подучавању математике, дубљем разумијевању и памћењу математичких тема, или могу побољшати став ученика према математици (Ibid).

Слично, Ријандо и сарадници (Riyanto et al., 2017) истичу значај Наставног програма математике за 2013.годину од којег се очекује да учењем математике ученици, основних и средњих школа, стварају компетенције како би могли да: разумију концепте и примијене математичке поступке у свакодневном животу; стварају уопштавања на основу образаца, чињеница, феномена или постојећих података; изводе математичке операције ради поједностављења и анализе познатих компоненти; математички резонују изношењем објашњења и њиховим провјеравањем; рјешавају проблеме повезивањем идеја помоћу симбола, табела, дијаграма или других репрезентација, за објашњење проблема; и развијају позитиван став, као што је логичан, критичан, прецизан и да лако не одустају у рјешавању проблема. Према овоме, суштински циљ наставе математике је смислено моделовање, односно постављање и рјешавање стварних проблема за дубље разумијевање и лакше памћење математичких садржаја. Проналазе се погодни начини за приказивање структурираних знања,

тако да се у сваком тренутку може прецизно одредити „положај“ проблема и доказати добијено рјешење. Исто, према Лишу и Ламону (Lesh & Lamon, 1992), најважнији циљ савременог математичког образовања је помоћи ученицима конструисање модела који омогућавају концептуална/процедурална „појачала“ за разумијевање све сложенијих искустава у стварном животу. Заправо, они се залажу за заснивање најважнијих когнитивних циљева наставе математике на конструкцији математичких модела. Модел представљају као комплетан функционални систем описивања, објашњења, конструисања, модификовања, манипулисања и предвиђања нашег све сложенијег свијета искустава. Ови репрезентативни системи се користе за моделовање структурно богатих феномена. Тиме, модели су потребни да би се обезбиједили смислени обрасци за: (1) доношење брзих одлука на основу стратешки одабраних назнака, (2) попуњавање празнина или превазилажење минималног скупа познатих информација, (3) пружање објашњења о томе како су чињенице повезане, или (4) постављање хипотезе о непознатим (или скривеним) објектима или догађајима, које би требало активно тражити, генерисати или поново испитати. Њихова примарна функција је опис или интерпретација за разумијевање основних образаца и правилности, и да их изразе у општем облику, којим се лако манипулише (Ibid).

Међутим, јасно је да разумијевање основних модела укључује много више од једноставног памћења и изођења правила унутар система нотације, дијаграма, правила и алата. Циљ наставе није једноставно да наведе ученике да савладају више чињеничних и процедуралних правила, већ више да им помогне разумијевање модела као комплетног функционалног система, на примјер, испитивањем тачности и доброг „уклапања“ описа који су генерисани за дате ситуације рјешавања проблема, и истраживањем структурних својства модела или система у цјелини. Осим учења низа изолованих чињеница и правила, такође, потребно је да ученици развију добро организован и јасно диференциран систем знања. Конкретно, они би за развијање кохерентних модела требало да иду даље од конструисања изолованих модела, на примјер, истраживањем сличности и разлика између алтернативних модела у различитим ситуацијама рјешавања проблема. Тако, модели се експлицитно креирају у складу са три основна принципа савремене когнитивне науке. Наиме, то су: (1) тумачење својих искустава која се преводе у унутрашње моделе, (2) ови унутрашњи модели морају бити конструисани, и (3) конструисани модели резултирају ситуираним знањем које се постепено проширује и деконтекстуализује за тумачење других структурно сличних ситуација (Ibid).

Сврху истицања реалистичких проблема, Лиш и Ламон (Ibid) проналазе у подстицању ученика у конструисању и истраживању сложених и примјенљивих математичких знања, на основу проширења, адаптације или усавршавања личног знања и искуства. Стога, најефикасније проблеме називају модели–изазивање активности, јер рјешења укључују конструисање, трансформацију, истраживање, модификовање, интеграцију, диференцирање или коришћење математичких модела или образаца (Ibid:39). Главни циљ и прво правило креирања реалистичких проблема је да подстичу и не обесхрабрују разумијевање постављеног проблема. Друго правило за постављање ових проблема, усмјерених на подстицање изграђивања и истраживања елементарних математичких модела, јесте да имају највећи утицај и корисност (краткорочну и дугорочну) за ученике који су укључени. Затим, треће правило обухвата креирање задатака у којима ученици превазилазе несвјесно размишљање о моделима, тако да свјесно размишљају о њима, на примјер, конструишу их, модификују и прилагођавају за различите сврхе, и, истражују њихова структурна својства у различитим смисленим ситуацијама. Четврто правило налаже одговарајући распон типова проблема, одговора и могућности интерпретације, а посебно да у реалним проблемима нијесу занемарени познати подаци, циљеви, алати, поставке или процедуре. И пето правило представља избјегавање проблема који имају само један ниво и/или тип тачног одговора.

У погледу „природе знања“, реалистички проблеми имају тенденцију да наглашавају употребу организованих система знања, а не само изолованих чињеница, вјештина или

непотпуних информација. У ствари, модели–изазивање проблема, уопште, не могу се ријешити коришћењем једне формуле за израчунавање. Умјесто тога, релевантно знање обично мора бити интегрисано из различитих тема. На примјер, у истраживању математичког образовања о „природи“ рјешења стварних проблема се показало да су рјешења дјеце често заснована на повезивању појмова и поступака из различитих тематских области, од аритметике, преко мјерења, те статистике, до геометрије, као и поступака који се не уче у школама. Уопштено говорећи, када ученици имају приступ реалистичким алатима и ресурсима, природна је тенденција да се појаве дубљи процеси изградње модела вишег реда. Врсте вјештина које су наглашене превазилазе процесе као што су квантификовање квалитативних информација, процјене количина и мјера, цртање информативних дијаграма или графикона, генерисање симболичких описа (користећи писани или говорни језик) или извођење процедура. Заправо, врсте вјештина које се појављују као важне често укључују много више од једноставног постизања задатих циљева. На примјер, релевантне вјештине често укључују давање упутстава и проналажење корисних начина за размишљање о датим подацима и циљевима. У ствари, Лиш и Ламон (Ibid) су открили да када се ученици навикну на моделе – изазивања активности, они, на основу личног знања и искуства, разумију ситуације рјешавања проблема и примјену одговарајуће стратегије рјешавања. И ученици који су били просјечни или испод просјека често су се показали као изузетно талентовани, јер су модификовали, проширили математичке моделе, и, далеко су превазилазили оне ученике за које су њихови наставници вјеровали да могу рутински користити ове моделе.

Слично, Стринфленд (Streefland, 1992) указује на значај креирања хеуристичке наставе математике у којој је постављени проблем извор стратегија мишљења. То су активности осмишљавања наставе математике који се могу тумачити као хеуристички процеси, гдје се промјене перспективе примењују као стратегије. Њихова успјешна примјена одражава дидактички став који не настаје спонтано већ се развија у току активности. Такође, Стринфленд (Ibid) се залаже за увођење реалистичких проблема и наводи поједине циљеве овако организоване наставе:

- креативност;
- организовање и структурирање података и појава у проблему;
- откривање и коришћење веза, аналогија и изоморфизама, односно сличности у контексту или структури;
- моделовање, апстракција, генерализација и трансфер;
- промјена приступа, тачке гледишта, нивоа размишљања;
- формирање и мијењање хипотеза;
- заобилажење препрека процеса рјешавања проблема (на примјер додавањем информација које недостају);
- одвајање од података како би се прешло преко устаљених ограничења;
- припрема за нове проблеме и ситуације;
- и могућност ученика да рефлектује своје и размишљање другог и примјена глуме.

Дакле реалистичка настава нуди прилику да ученици уче математику сопствених конструкција. Све активности ученика су уклопљене у контекст конкретних ситуација и извођење математике стварних ситуација тражи њен пандан, реализацију математичких садржаја, што значи тумачење и објашњење у оквиру одговарајућег контекста. При томе није важно само конструисање, већ конструисање конкретизовањем, тј. стварне ситуације се бирају као извор математичких идеја, операција и структура које треба научити, а када се овај ниво достигне, оне се не одбацују већ се „култивишу“ као поља примјене. Ова контекстна ситуација утиче на шематизацију, тако да служи као модел ситуације, односно сам контекст функционише као модел ситуације (Ibid).

Међутим, у већини земаља, математичко моделовање још увијек има малу улогу у свакодневној наставној пракси (Riyanto et al., 2017). Осим тога, наставницима и ученицима је прилично тежак овај вид подучавања и учења (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Разлози који се наводе су препреке са становишта инструкције и процјене знања (Blum, 1993). Наиме, моделовање захтијева много времена, а не одговара ни уобичајеном наставном плану математике, који је ионако преоптерећен. Осим тога, моделовање је тешко вредновати, а оно што се не оцјењује ученици и наставници неће узети за озбиљно. И препреке са становишта учитеља показују да је учење моделовањем више захтјевно, јер је потребно додатно нематематичко знање, као и способност управљања отвореном ситуацијом. Даље, учитељи често не познају довољно примјера моделовања погодних за подучавање, и, оне које препознају потребно је прилагодити узрасту ученика (Ibid).

И поред наведених тешкоћа примјене проблема у настави математике, значај овог вида наставе не смијемо занемарити. У прилог томе, на примјер, Силвер (Silver, 1994) упућује да задаци постављања проблема ученика истраживачима могу послужити као „прозор кроз који могу да виде“ размишљање ученика и као „огледало у којем гледају одраз“ школског математичког искуства ученика. Осим тога, искуства у креирању проблема представљају „потенцијално богату арену“ у којој се истражује узајамно дејство когнитивних и афективних димензија учења математике (Ibid). Према Инглишу (English, 1997), постављање проблема је алат за развијање критичког размишљања, јер помаже ученицима да прошире оно што знају, како би развили математичку флуентност и укључили се у размишљање вишег реда. Ако подстакнемо ученике да изразе своје „виђење“ различитих проблема, можемо стећи важан увид у степен развоја математичких знања. Овдје, прије свега, Инглиш (Ibid) сматра да је ученицима потребно изложити читав низ проблемских структура, те помоћи им да препознају важне математичке концепте и тиме их подстаћи да разговарају о томе шта им се у тим структурама свиђа, а шта не. На овај начин, код ученика не само да ће се побољшати разумијевање и перцепција математичких проблемских ситуација, већ им се пружа здрава основа за стварање нових проблема. Истовремено, аутори курикулума имају драгоцјени увид у подручја која захтијевају пажњу у наставном програму, односно, постављање проблема ученика требало би да постане важан процес учења у укупном курикулуму математике (Ibid).

Поред наведеног, током последњих неколико деценија, разумијевање научника о „природи“ и ефектима математичког проблема, са својим коријенима у когнитивној науци, доводи до сазнања да је постављање проблема процес који је уграђен и тешко се одваја од рјешавања проблема (Osana & Pelczer, 2015). Стојанова и Елертон (према Bonotto & Santo, 2015) истичу да истраживачи све више долазе до сазнања да развијање способности постављања проблема у математици је једнако, образовно важно, као и развој способности за њихово рјешавање. Стога, размотримо проблемске задатке, перспективе постављања и рјешавања проблема у настави математике.

2. 1. Шта су проблемски задаци?

Суштину постављања проблемских задатака проналазимо у умијећу постављања проблема који одсликава проблемску ситуацију. Дата ситуација постаје „поље“ за дјеловање ученика и прилика да интегрише и прошири постојећа знања, и, тиме, истовремено, наставнику омогући бољу процјену постигнућа ученика за даље планирање наставе. Па, да кренемо са појашњењем појма проблема, односно проблемске ситуације.

Под проблемом подразумијевамо ситуацију са одређеним отвореним питањима која интелектуално изазивају некога ко не посједује непосредне методе (процедуре, алгоритме итд.) довољне да би се одговорило на постављене захтјеве (Blum & Niss, 1991). Тако, проблемска ситуација исказује противуречности између знања које ученици имају и задатака који су пред њим постављени, између задатака које треба ријешити и начина рјешавања којима су претходно овладали. Сада постоји могућност да се одабере *властити пут* у низу других, при чему предност није у добијању резултата, већ у процесу истраживања који омогућава ученицима да *сами*, према својим могућностима, примјењују одређене поступке у самосталном стицању знања. На овај начин, подстицање учења путем проблемских задатака не састоји се од обичне умне активности и мисаоних операција у рјешавању стереотипних или репродуктивних задатака, већ у активностима мишљења које ствара проблемску ситуацију. То су различите, нове и другачије ситуације, у којима ученици виде оно што до тада нијесу видјели, самоактивно испитујући и откривајући суштинске факторе који доводе до рјешавања проблема (Ђорђевић, 1986).

Према Блуму и Нису (Blum & Niss, 1991) постоје двије врсте математичких проблема, примијењени и чисти математички проблеми. За примијењени математички проблем је карактеристично да ситуација и питања која је дефинишу припадају неком сегменту стварног свијета и омогућавају укључивање одређених математичких појмова, метода и резултата. Под стварним свијетом подразумијева се „остатак свијета“ изван математике, односно изван школског или универзитетског предмета или математике као дисциплине, различите од свакодневног живота и свијета око нас. Супротно томе, са чисто математичким проблемом, дефинисане ситуације су у потпуности уграђене у математички универзум.

Елиа, Ван ден Хеувел Панхуизен и Коловоу (Elia, Van den Heuvel–Panhuizen & Kolovou, 2009) разликују рутинске и нерутинске математичке проблеме. За разлику од рутинских проблема који укључују примјену рутинских прорачуна, нерутински проблеми немају једноставно рјешење, већ разумијевање проблемске ситуације и проналажење начина рјешавања проблема захтијева креативно размишљање и примјену одређене хеуристичке стратегије. Стога се нерутински проблеми сматрају сложенијим и тежим од рутинских проблема. Међутим, Поља (према Elia, Van den Heuvel–Panhuizen & Kolovou, 2009) је примијетио да иако се рутински проблеми могу користити за испуњавање одређених дидактичких функција подучавања ученика, тј. правилној примјени одређене процедуре или дефиниције, ипак само пажљивом употребом нерутинских проблема ученици могу развити способност рјешавања проблема.

У описивању исхода учења за рјешавање проблема, Џонасен (Jonassen, 1997) разликује структуриране и неструктуриране проблеме. Он, под претпоставком да се различите врсте рјешавања проблема у различитим контекстима и доменима позивају на различите вјештине, изграђује моделе креирања наставе за добро структуриране и лоше структуриране проблеме. Модел наставе за добро структуриране проблеме укоријењен је у теорији обраде информација, али модел наставе неструктурираних проблема дијели претпоставке са конструктивизмом и ситуационим знањем. Теорије обраде информација исходе учења схватају као уопштене вјештине, које се могу примијенити у доменима садржаја, док конструктивизам и ситуационо

знање заговарају специфичност домена, било ког извођења, и, стога, препоручују давање упутстава у аутентичним контекстима.

Према Требјешанин (Требјешанин, 2012), за креирање проблемских ситуација потребно је наставне активности употпунити садржајима повезаним с учениковим интересовањима и унутрашњим, развојним потребама, како би у њима пронашао лични смисао. То је повезивање градива са реалним контекстом или лично значајним циљевима ученика. Пажљиво дозирани занимљиви подаци, анегдоте, шале, упечатљиви примјери, повезани с темом коју би ученици могли да доживе као апстрактну, приближиће академске садржаје изворним потребама ученика. Такође, она наводи мишљења когнитивистички усмјерених психолога о карактеристикама самог задатка. Међу њима, истичу се, Џјуи који указује на значај смислених и занимљивих задатака (према Требјешанин, 2012), затим Берлајн (Ibid) говори о подстицајној вриједности задатака, укључујући оптималан ниво несклада међу информацијама. Дојл (Ibid), приказује класификацију задатака с обзиром на ниво когнитивних захтјева и ниво ризика који укључују. У односу на ангажовање когнитивне операције разликује задатке који захтијевају:

- меморисање – рутинска примјена процедура,
- схватање – мисаона елаборација и
- формулисање сопственог става или мишљења.

С обзиром на ниво ризика, Дојл (Ibid) разликује задатке с малом могућношћу грешке, односно малим ризиком да се буде неуспјешан и оне који укључују већи ризик. Са становишта мотивационе вриједности, могло би се очекивати да рутински задаци производе досаду и тиме демотивишу ученике, док изазовни задаци имају већи мотивишући потенцијал. Додатна појашњења, о мотивационим вриједностима изазовних школских задатака, пружила су истраживања у оквиру социо−културолошке теорије учења. Ријеч је о аутентичним истраживачким задацима који се односе на смислене реалне проблеме. Истраживања су показала да изазовни и смислени задаци постају дјелотворни тек у условима корегулације ученикове активности, њиховог прилагођавања зони наредног развоја ученика, уз прилагођену инструктивну и емотивну подршку наставника. Исто, Требјешанин (Требјешанин, 2015) упућује на значај задатака који имају одређене функције у подражавању наредних етапа процеса учења, битних за продубљивање значења, какве су обнављање и разне врсте примјена и екстраполација.

На овом мјесту, када говоримо о когнитивним захтјевима или нивоу знања и интелектуалним вјештинама ученика, најпознатија је Блумова таксономија, према којој су циљеви и исходи учења разврстани у шест хијерархијски уређених категорија, према нивоу апстраховања, од најједноставнијих (памћење, разумијевање, примјена) до најсложенијих (анализа, синтеза и евалуација) у којима доминирају виши нивои когнитивних процеса (критичко резоновање и вредновање) (Милинковић & Пикула, 2015). За нас је посебно значајна Блумова таксономија која се често користи приликом постављања математичких задатака. Шорсер (према Милинковић, 2013), Блумову таксономију когнитивних вјештина прилагођава за наставу математике.

Блумова таксономија когнитивних вјештина за математику:

- *Знање* – познавање терминологије, чињеница, конвенције, методологије, структуре, принципа итд.;
- *Разумијевање* – значење, превод, екстраполација, интерпретација чињеница, прављење поређења итд.;
- *Примјена* – решавање проблема, коришћење информација на нов начин;
- *Анализа* – доношење закључака подржаних са доказима, одређивање образаца;

- *Синтеза* – извођење апстрактних односа, прогнозе, генерализација, стварање нових идеја;
- *Евалуација* – разлучивање примарности (важности), коришћење низа критеријума да би се дошло до закључка, дискриминација (Ibid:519).

Слично, Хенингсен и Стеин (Henningsen & Stein, 1997) током фазе постављања задатака дају следећу класификацију когнитивних захтјева:

- меморисање, употреба формула, алгоритама или процедура без повезаности са концептима, разумијевањем или значењем;
- употреба формула, алгоритама или процедура повезаних са концептима, разумијевањем или значењем;
- когнитивне активности окарактерисане као „радиш математику“ укључујући комплексна математичка размишљања и активности размишљања као што су тестирање претпоставки, формулисање проблема и тражење образаца (Ibid:532).

Поред наведеног, истраживања аутора (Ibid) о факторима који подстичу рјешавање проблема ученика, на високом нивоу, показују да се уклањањем изазовних аспеката задатка, као и да неусклађеност између когнитивних захтјева задатка са претходним знањем ученика, доводи до механичког, за разлику од суштинског и креативног ангажовања на проблему, односно до преусмјеравања пажње са разумијевања проблема на исључиво добијање тачног одговора.

Дакле, претходно наведено упућује да је за усвајање нових знања или унапређивање постојећих на сложенији ниво потребно проблематизовати садржај задатка, који се прије свега односи на реалне ситуације и на садржаје других области интересовања ученика.

2.2. Постављање проблема

Осамдесетих година прошлог вијека, реформу наставе математике је заокупило рјешавање проблема као кључно питање за учење математике. Поред тога, испитује се улога постављања проблема да би десет година касније, средином деведесетих, истраживачи математичког образовања преусмјерили пажњу на постављање проблема ученика и однос између способности рјешавања и постављања проблема (Crespo, 2015). У литератури постоје различити појмови који се користе у односу на постављање проблема, као што су проналажење проблема, детектовање проблема, формулисање проблема, креативно откривање проблема, проблематизација, стварање проблема и предвиђање проблема. Због овог различитог значења, различити аутори користе различите оквире за проучавање активности постављања проблема.

Дакле, имајући у виду значај активности постављања проблема у школској математици, истраживачи су почели да испитују различите аспекте процеса постављања проблема. Испитивани су процеси размишљања везани за постављање проблема. Конкретно, Конторович и његови сарадници (Kontorovich et al., 2012) наводе да се процес постављања проблема састоји од базе знања, хеуристике и схеме, групне динамике и интеракције, способности индивидуалних разматрања и организације задатака. Тако, Инглиш (English, 1998) тврди да постављање проблема унапређује размишљање ученика, вјештине рјешавања проблема, ставове и увјерења према математици као наставном предмету и да математичко рјешавање проблема доприноси ширем разумијевању математичког концепта. Постављање проблема, или способност „Поставите стратешки циљана питања“, како Болова и Форзани (Ball & Forzani, 2009) наводе, од централног је значаја за наставу, нудећи приступ и разумијевање у размишљању ученика. Овакво представљање проблема, заједно са способношћу да „изаберу задатке, примјере, моделе или аналогије и материјале“ је специфично за наставну праксу.

Користе га наставници за мобилизацију важних концепата, тестирање хипотезе о размишљању ученика и помажу ученицима у изазовима учења. Штавише, постављање проблема се сматра као „пракса високе полуге“. Наглашава се потреба за увођењем активности постављања проблема и приказују приступи који укључују инструкције. Болова и Форзани (Ibid), постављање проблема „виде“ као интегрални однос наставника према ученицима, који захтијева наставниково разматрање претходних знања и интересовања ученика. Осим тога, Ленг и Силвер (Leung & Silver, 1997) су доказали да постављање проблема позитивно утиче на способност ученика у рјешавању текстуалних проблема. Такође, формулисање проблема је везано за планирање, јер укључује постављање проблема који представљају подциљеве већег проблема (Silver, 1994). Постављање проблема се односи и на стварање нових проблема и преформулисање задатих проблема. Тако, постављање проблема може настати прије, током или након рјешавања проблема.

Као што смо навели, проблем се може поставити након рјешавања одређеног проблема, када се испитују услови проблема за стварање алтернативних проблема. Бровн и Валтер (према Silver, 1994) опширно су писали о постављању ове врсте проблема, у којој се услови проблема и ограничења испитују и слободно мијењају кроз поступак који се назива "Шта–ако?" и „Шта–ако–не?“. Оперативно питање које покреће ову врсту постављања проблема гласи: Које нове проблеме сугерише ситуација, проблем или искуство? Тиме формулисање проблема доводи до изражаја проблемску ситуацију. Оно што се обично догађа у дуготрајном испитивању проблема јесте да формулисање проблема и његово рјешавање „иду руку под руку“, а како испитивање одмиче, једно изазива друго (Davis, 1985).

У контексту постављања проблема ученика, креативни математички „производ“ мора бити усклађен са одређеним математичким доменом (математички садржај), затим кохерентан, тј. синтаксички тачан проблем (садржи правила и принципе који регулишу структуру математичког проблема) и конзистентан, тј. семантички тачан (постојање смислених веза међу елементима проблема) (Singer & Voica, 2015). Заправо, ово су основни услови за конвенционално прихватање тачно формулисаних проблема. Поред математичке области у којој је саставља проблем, квалитет постављеног проблема зависи од испуњености два критеријума, тј. синтаксе и семантике. Синтакса нуди формално валидан облик проблема, али не даје никакве информације о значењу проблема или резултатима његовог рјешавања. Значење повезано са комбинацијом елемената текста припада семантици. При том, сви синтаксички тачни проблеми нијесу семантички тачни. Многи синтаксички исправни проблеми су само комбинација дјелова који поштују правила у којима недостаје тачно значење елемената проблема, тј. формулација проблема је нетачна. Такви проблеми доводе до обраде склоне грешкама. Кохерентан и конзистентан проблем јавља се, углавном, у областима садржаја који захтијевају одређени формализам, управо зато што овај формализам даје „стабилност“ у исказу проблема. Испитивања способности ученика у стварању кохерентних и конзистентних проблема указују на постојање стратегије функционалног типа, која се састоји од малих промјена праћених провјеравањем исхода, што је одлика математичке креативности (Ibid).

Такође, једна од карактеристика постављања проблема јесте да садржи различите приказе истог математичког концепта како би се пружила могућност за дубље разумијевање и развој математичког знања ученика. Тако, у жељи да обухвате аспекте индивидуалне конструкције знања, Ламон и Лиш (Lamon & Lesh, 1992) долазе до постављања отворених питања, као начина за лични израз математичких знања ученика. Они проналазе неколико типова проблема, корисних за изражавање дубљег и вишег нивоа размишљања: (1) питања за која ученици морају да конструишу сопствене одговоре; (2) пројекте који су у толикој мјери сложени да ученици морају да поставе и одговоре на низ питања у процесу њиховог извођења; и (3) питања која се могу ријешити на различитим нивоима математичке софистицираности (Ibid). Заједничко својство за све три врсте проблема јесте да изазивају и обухватају мишљење

ученика на начин који омогућава његову анализу. Овај начин формулисања проблема показује усмереност на суштину добијеног одговора, тј. да проблеми треба да имају више од једног нивоа или типа тачног одговора, а не само да се односи на форму питања.

Тако један од најпродуктивнијих приступа креирања проблема почиње са занимљивим ситуацијама и постављањем питања, док други приступ настоји да унаприједи постојеће проблеме. Други приступ, креирање „бољих“ проблема, често почиње са проблемима који су понуђени у уџбеницима (Ibid). При томе, ако садржај датог циља није јасно одређен, сврха „побољшања“ проблема, обично, остаје нејасна. На примјер, наставници четвртог и петог разреда, примјер испитивања односа и пропорције из уџбеника:

> Однос дјечака и дјевојчица у одјељењу је 3 према 8. Колико је дјевојчица, ако у разреду има 9 дјечака?;

након дужег размишљања су промијенили у задатак:

> У одјељењу за свака 3 дјечака има 8 дјевојчица. Колико је ученика у одјељењу? (Ibid:321).

Консензус наставника јесте да је други проблем бољи, јер дозвољава више од једног тачног одговора и прилагођава се чињеници да се ученици четвртог и петог разреда упознају са термином „однос“. Наставници су измијенили проблем са циљем да стекну што више знања о размишљању својих ученика и да одлуче шта би могло бити прикладно за следећу фазу наставе. Закључак наставника је да су врло мало открили о размишљању својих ученика, јер нијесу посветили одговарајућу пажњу на сврху постављених питања. Одлучили су да им требају конкретније информације. Заправо, када су ученици дошли до одговора 11, жељели су да испитају да ли ученици разумију могућност добијања различитих рјешења, тј. различите бројности одјељења. Даље, да ли су ученици без размишљања обављали операције над датим бројевима или су ипак разумјели зашто је 11 реална могућност? Затим, када су ученици развили обрасце удвостручавајући и утростручавајући сваки од датих бројева наизменично, да ли су схватили да се однос три према осам није мијењао у одговарајућим паровима? Стога, наставници су касније поставили алтернативна питања, у зависности од концептуалних основа односа и пропорције, које су хтјели су да истакну. Наиме, у настојањима да разумију своје ученике, наставници су се прво фокусирали на коваријансу броја дјечака и дјевојчица и инваријантност поређења дјечака и дјевојчица. Један наставник је упитао: „Да ли би могло бити 25 ученика у одјељењу? Зашто или зашто не?“ Откривено је да половина ученика у одјељењу потврђује ову бројност одјељења, јер је $3 \cdot (3) + 2 \cdot (8) = 25$. Други наставник је примијетио да је већина ученика дошла до следећег одговора, као једне од могућности: 6 дјечака и 16 дјевојчица чине одјељење од 22 ученика (Ibid).

Извјештај експерименталног програма Сингера и колега (Singer et al., 2011) показује позитиван утицај активности постављања проблема на ефикасно учење математике, односно дубоко разумијевање математичких концепата. Овдје је ријеч о четворогодишњем експерименталном програму који је спроведен са ученицима од 1. до 4. разреда (6–7 до 10–11 година). Програм је почео са два одјељења ученика из школе у Букурешту (Румунија). У другој години програму су се придружила два нова одјељења, да би се у трећој години укључило пет одјељења из Републике Молдавије. Коначно, у овом истраживању учествовало је 232 ученика у 9 експерименталних одјељења. Током школске године, ученици су 15 пута тестирани. Сваки тест је садржао 10 задатака у којем је укључено 4 до 6 питања отвореног типа, за које су тражени креативни одговори (Ibid). Резултати истраживања су показали да је просјечан успјех рјешавања креативних задатака био више од 60% за ученике из сваког одјељења, укључених у експеримент. Ови резултати су упоређени са резултатима националног тестирања ученика четвртог разреда. Тестирање је спроведено на крају исте школске године, а учествовало је 18 844 ученика из 992 градске и сеоске школе. У овој процјени, питање у којем је од ученика

тражено да дају нестандардни креативни одговор: „Осмислите проблем користећи бројеве мање од 20, који се могу ријешити сабирањем, одузимањем и множењем“, тачно је ријешило само 20% ученика (бодован је само текст задатка, а не и његово рјешавање), а скоро половина (46,1%) није ни покушала да ријеши задатак. Овај велики проценат избјегавања одговора сугерише да је већина ученици 4. разреда већ успоставила такву „навику ума“ која не прихвата укључивање у креативно рјешавање проблема (Ibid). Излагање овим типовима задатака, са једне стране, претпоставља се да наставник треба да поставља низ таквих проблема, а са друге стране да се ученици стимулишу за постављање сопствених проблема.

Савремене конструктивистичке теорије подучавања и учења захтијевају важност препознавања да ученици постављају проблем који се представља као компонента наставне активности. Наиме, Силвер (Silver, 1994) сугерише да ангажовање ученика у постављању проблема и формулисању хипотеза, у контексту рјешавања неструктурираних математичких проблема, може имати позитиван ефекат на рјешавање проблема и каснији развој знања. Постављањем проблема ученици постају осјетљивији на чињенице и односе уграђене у ситуације. Према томе, чини се да постављање проблема ученика не само да пружа „прозор кроз који може да се види“ разумијевање математике, већ је то и „огледало“ које одражава садржај и „карактер“ школског, математичког, искуства ученика. „Отварање прозора“ за постављање проблема такође пружа прилику да се сагледају аспекти ставова и односа ученика према математици (Ibid:24). На важност питања: Зашто ученици треба да науче постављање проблема?, Милинковић (Milinković, 2015b) наводи најмање два разлога. Један је да се у стварном животу не бавимо задацима из уџбеника, већ са више или мање сложеним ситуацијама. Формулисање математичког проблема који рефлектује (не)математичку ситуацију постаје важан дио процеса моделовања који нас, опет, може довести до рјешавања стварног животног проблема. Други разлог је добро позната чињеница да формулисање проблема подразумијева разумијевање садржаја. Она указује на помало занемарену везу између знања математике и постављања проблема. Поред тога, постављање проблема разматра на могућностима трансформације проблема промјеном контекста (Ibid), о чему је више описано у *Стратегијама постављања проблема*.

Такође, Стојанова и Елертон (према Prabhu & Czarnocha, 2015) су испитивали улогу ученика у постављању проблема. Идентификовали су три врсте ситуација постављања проблема: слободне, полуструктуриране или структуриране. У слободним ситуацијама ученици постављају проблеме без ограничења: од ученика се једноставно тражи да генеришу математичке проблеме из дате ситуације. Полуструктуриране ситуације постављања проблема односе се на отворене ситуације у којима се ученици позивају да истраже структуру те ситуације и да је употпуне користећи знање, вјештине, концепте и односе из претходних математичких искустава. На крају, структуриране ситуације, у којима се постављају проблеми, односе се на ситуације у којима ученици постављају проблеме, преобликовањем већ ријешених проблема или мијењањем услова или питања проблема. Елертон (према Михајловић, 2014:146) сматра да дечије изражавање математичких идеја кроз креирање њихових сопствених проблема илуструје не само њихово разумевање и ниво развоја математичких појмова, већ и рефлектује њихову перцепцију природе математике. Дакле, истраживања указују смјернице да не само наставници већ и ученици постављају проблеме. У прилог томе, коментари ученика, који су креирали проблемске задатке и ријешили их, су, на примјер, да је задатак „поново подстакао моју радозналост у математици“, као и да први пут, писањем проблема, математику „виде“ као креативни подухват и да никада нијесу мислили да могу саставити проблемски задатак (Matsko & Thomas, 2015).

Дакле, заговорници постављања проблема тврде да искуство ученика са постављањем математичких проблема може подстаћи ангажовање ученика у аутентичним математичким активностима, што им омогућава рјешавање различитих проблема, те развој метода рјешавања, као и промовисање креативности ученика – склоност ка тражењу нових проблема.

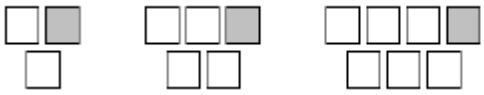
У контексту самосталног састављања проблема, ученици се подстичу на усмјерена запажања, затим да експериментишу кроз варирање одређених података и анализу резултата, као и да осмишљавају нове проблеме који би се подједнако могли ријешити користећи сличне или различите обрасце. У прилог овоме имамо недавна истраживања когнитивних наука, која потврђују да дјеца показују спремност спонтаног стварања новог, раније непознатог ентитета, почевши од већ познатих ентитета. Они схватају контекст, идеје, везе, у стању су да сагледају ентитет или његову суштину тренутно, без дискурзивног кретања у простору или времену, тј. пролазећи од једне информације до друге (Singer, 2009).

Гледајући постављање проблема ученика, наставници морају, између осталог, узети у обзир повратне информације добијене од ученика. Наиме, писањем, креирањем проблемских задатака ученици преузимају одговорност за њихово рјешавање, а самим тим дају увид у развој способности за креативне, иновативне приступе постављања и рјешавања проблема. Осим тога, ученици се сусрећу са математиком на другачији начин. Поред тога, проблемски задаци, можемо рећи, постају инструмент у испитивању ставова ученика према математици. Зато је важно код ученика млађег школског узраста развијати осјећај за функционалан и сврсисходан писани израз, тако да је способан да покаже своја знања и вриједности, да искаже своје мишљење, ставове, одлуке (Стевановић & Ивковић, 2017). У том погледу, Стевановић и Ивковић (Ibid:217) истичу да: „различитим лексичким, правописним и синтаксичким вежбама у разредној настави можемо подстаћи ученике да правилно обликују свој језички израз како би јасно и прецизно исказали своја знања у различитим областима“.

2.2.1. Стратегије постављања проблема

Основна претпоставка стратегије постављања проблема јесте да изазива процес рјешавања проблема, као и образложење ученика, што заузврат ствара прилику за нове могућности учења. Тако се постављањем проблема у почетној настави математике, како Лин и Тсаи (Lin & Tsai, 2013) наводе, постижу двије основне функције које се односе на улогу ученика или хипотетичке путање учења и на практичну функцију оцјењивања. При том, поступак постављања проблема се заснива на задатим циљевима математичког курикулума који својим критеријумима знања имплицира примјену не само једног типа задатака, већ скупа задатака и не(математичких) ситуација (Lithner et al., 2013). Стога, постављање проблема, као релативно нова област у математичком образовању, истраживачима и наставницима пружа широк спектар поступака у изналажењу најбољих проблема, за постављене образовне захтјеве.

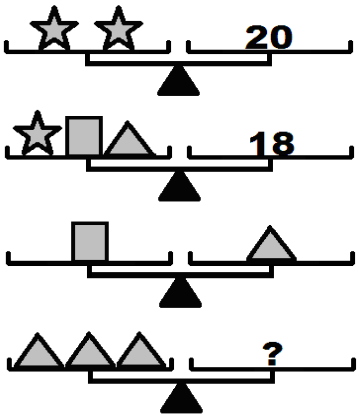
У својим истраживањима о постављању алгебарских задатака, Пољарес, Виеира и Хименез (Palhares, Vieira & Gimenez, 2013) наводе четири принципа креирања задатака који се заснивају на: (1) примјени аритметичких, нумеричких, способности у алгебарском резоновању; (2) примјени одговарујућих критеријума за анализу математичких активности; (3) примјени односа и различитих репрезентација, али без употребе слова за непознате; (4) праћењу одговора ученика за анализирање и подстицање математизације и памћења. У свим приступима креирања задатка, главна стратегија, поред когнитивне и епистемолошке анализе задатка, обухвата усклађивање захтјева задатка са постојећим знањима и способностима ученика ради изграђивања и/или трансфера математичких знања (Ibid). На основу датих принципа, активности постављања задатака интегришу различите математичке аспекте. Ријеч је о постављању секвенцијалних и структуралних задатака. Задатак секвенцијалног типа карактерише постојање услова за први члан низа, а затим се тражи услов за следећи члан низа или истражује правило низа као врста генерализације. На примјер, секвенцијално сликовни задатак (Слика 5) приказује идеју да се помоћу слике може олакшати утврђивање и образложење правила низа (Ibid).



Сл.1 Сл. 2 Сл. 3 Сл. 4 Сл. 5

Слика 5. Секвенцијално сликовни задатак (према: Radford) (Ibid:245).

Задатак структуралног типа укључује различите процесе и својства: једнакост, проналажење правила кроз примјере, идентификовање еквиваленције, активности претпостављања, односно претпостављање релативних идентитета, партикуларизацију (Ibid). У структурално сликовном задатку (Слика 6) циљ је пронаћи аргументе који откривају алгоритамски поступак.



Слика 6. Структурално сликовни задатак (према: Femino) (Ibid:245).

Силвер (Silver, 1994) постављање проблема објашњава као преформулисање проблема. Дати математички проблем, у процесу рјешавања, је формулисан или трансформисан у нову верзију проблема. За ову врсту постављања проблема, прво, главни циљ је рјешавање проблема, а затим подстаћи ученике на размишљање о свим повезаним проблемима. Током процеса рјешавања и постављања проблема, према Мосизу (према Rosli et al., 2015), ученици могу уочити повезаност математичких концепата и онда конструисати и дубоко реструктурирати своје знање засновано на претходном.

Осим тога, Силвер и његове колеге (према Милинковић, 2015а) су спровели истраживање о способности наставника да креирају проблеме у сложеном контексту. Идентификовали су три групе повезаних генерисаних проблема. Поред секвенцијално повезаних типова задатака и „симетричних“–замјена циљева и услова проблема (тражени податак из једног проблема постао је познат услов у симетричном проблему и обратно), они су приказали отворене проблеме који су имали тенденцију мијењања ограничавајућих услова (Ibid). У складу са наведеним, Милинковић (Милинковић, 2013) говори о значају постављања аутентичних задатака, који често имају потенцијал проширења почетног оквира задатка, откривањем могућности да се одговори и на нека нова питања која могу бити постављена од стране учитеља или ученика и тако ствара позитиван однос према стицању и коришћењу математичких знања. Осим тога, пракса коришћења аутентичних математичких задатака претпоставља процес евалуације интегрисан у наставу (Ibid:516).

Слично, Милинковић (Милинковић, 2015а) указује на идеју трансформације у постављању проблема. Она сматра да се проблеми могу трансформисати тако да одражавају промјене математичке структуре и предлаже следеће стратегије постављања проблема:

(1) трансформација проблема са мањим бројем једноставнијих параметара у проблеме са више (често и компликованијих) параметара;

(2) трансформација проблема у нове, додавањем нових параметара;

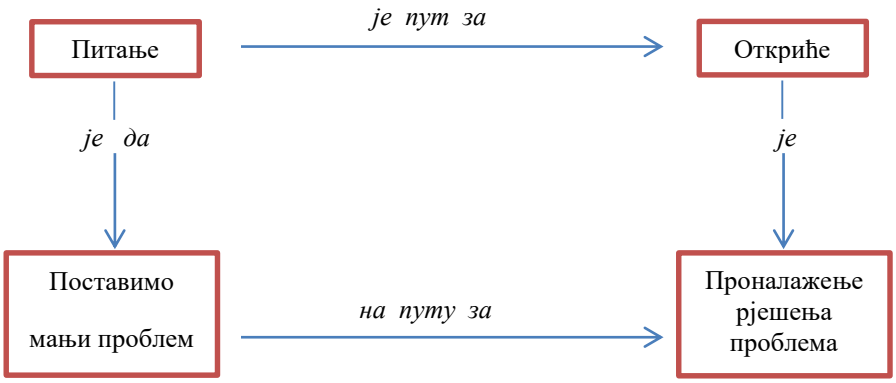
(3) трансформација проблема уклањањем неких услова;

(4) трансформација проблема променом репрезентације (Ibid:566).

Нови проблем се може поставити промјеном: 1) онога што је дато (познато), 2) онога што се тражи (непознато), или 3) контекста. Нови, трансформисани проблем може бити лакши или тежи од иницијалног. Процес трансформације се не може одвијати механички, непромишљено. Када се тако ради, као последицу добијамо нерјешиве проблеме (Ibid). Дакле, трансформација проблема, у нови проблем, значи да се неки (један или више) елементи промјењивог простора мијењају, док остали остају исти. На примјер, добра полазна тачка наставника у постављању проблема може бити трансформација познатих игара (Milinković, 2015b). Други аспект постављања проблема путем трансформација заснива се на репрезентативном приступу, односно на способности наставника да трансформише садржај знања у различите форме. У вези са тим, ефикасно математичко размишљање подразумијева разумијевање релација приказа „истог" концепта, као и структурне сличности (и разлике) међу репрезентативним системима (Ibid).

Сингер и колеге (Singer et al., 2011) заступају различите начине постављања проблема у почетној настави математике. Акценат, такође, стављају на транспозицији проблема, задржавањем истих података и/или проширивањем проблема, укључивањем двије или три операције или комбиновањем рачунских операција. Затим, аутори наводе састављање текстуалних проблема, тј. осмишљавање нових проблема на различите начине, при чему су у почетку понуђене одређене олакшице, да би се касније постепено искључиле. Ученици имају изазов да поставе различите текстуалне проблеме који се могу генерисати задржавајући исте податке, али мијењајући контекст или тему проблема. Даље, наводи се стратегија упоређивања проблема, почетни проблем се пореди са другим проблемима како би се нагласиле могуће сличности и разлике. Аутори предлажу анализу некомплетних или сувишних проблема. Анализира се да ли је и зашто рјешавање ових задатака било могуће, а по потреби допуњава се текст задатка додатним информацијама. Исто, истиче се дискусија о сувишним проблемима и елиминишу сувишни подаци. Изрази са словима се постепено уводе у постављању проблема, у зависности од нивоа знања ученика и знања наставника о одговарајућој употреби симбола. При томе, описани начини постављања проблема се систематски користе, уз варирање информативног садржаја.

Постављање проблема се разматра и као „пут ка открићу", којим се централни проблем разлаже на низ постављених питања (Слика 7) (Prabhu & Czarnocha, 2015).



Слика 7. Упитна наставна метода и декомпозиција у постављању питања/проблема (Ibid:356).

Ово указује да је декомпозиција постављеног проблема основна стратегија за његово рјешавање, односно, њено одсуство отежава приступ проналажења рјешења. Трансформација процеса испитивања проблема састоји се од постављања низа мањих проблема које постављају учесници, тако да је сваком ученику омогућено да учествује.

Боното и Санто (Bonotto & Santo, 2015) вјерују да дидактички потенцијал коришћења одговарајућег артефекта, као извора задатака и активности, комбинован са посебним методама подучавања, подстиче стварање проблема и процесе креативности у размишљању. Посебно су настојали да испитају:

- Улогу погодних артефеката као извора стимулације за постављање проблема у полуструктурираним ситуацијама; и
- Способност ученика основне школе да стварају и рјешавају математичке проблеме (укључујући отворене проблеме).

Овом студијом описују се могућности које пружају активности увођења артефеката за препознавање креативног размишљања ученика у математици и методе анализе исхода постављања проблема, које би наставник могао користити у идентификацији и процјени активности постављања проблема. Коришћењем артефеката, ученици се подстичу да препознају различите ситуације као математичке ситуације, при том, тражећи од њих да: (а) изаберу друге артефекте из њиховог свакодневног живота; (б) идентификују математичке чињенице које су повезане са наведеним ситуацијама; (в) пронађу сличности и разлике (нпр. различити прикази бројева); или (г) генерисање проблема (нпр. откривање односа између количина) (Ibid). Дакле, ова студија показује да креирање проблема, са различитим нивоима тежине, употребом специфичног културног артефекта (нпр. брошура за посјету познатог забавног парка) даје посебан атрактиван контекст, који одражава комплексност стварности, и тако, у погледу различитих понуђених могућности, нуди богатство постављања питања и формулисања хипотеза. Тиме, артефекат, као резултат приступачности свим ученицима, представља користан контекст за стварање проблема и математизацију стварности.

Никол и Брег (према Osana & Pelczer, 2015), класификују стратегије постављања проблема на следећи начин: (а) уклањањем информација из затворених питања (тј. оних проблема са само једним тачним одговором); (б) коришћењем главних курикуларних области (на примјер, геометрија, мјерење) као полазне тачке; (в) почевши од специфичнијих наставних тема и узимањем оних које се сматрају прикладним; (г) замишљањем малог дјетета и представљањем проблема, на начин, на који би оно могло да постави проблем; и (д) фокусирањем на формулацију и друге лингвистичке аспекте проблема. Утврђено је да практичне ситуације, са елементима фантазије, стимулишу машту ученика, на примјер, када ученици виде себе као телевизијске извођаче и продуценте (Bell, Burkhardt & Swan, 1992b). Ово одговара запажању Бинса и колега (према Bell, Burkhardt & Swan, 1992b), тј. према

њиховим закључцима, стратешке вјештине се најбоље развијају у току рјешавања проблема, који су реални, стимулативни и у оквиру могућности ученика.

Приликом постављања проблема, Креспо (Crespo, 2015) наводи следеће тематске групе проблема:

- *Постављање отворених проблема* (проблеми захтијевају да се објасни рјешење и да се размијене идеје; додатна питања су за анализу и рефлексију урађеног);
- *Постављање математички изазовних проблема* (увођење нових идеја подстиче размишљање; додатна питања отварају прилику за ширење оригиналне верзије математичког рада);
- *Постављање математички занимљивих проблема* (математичка ситуација служи за генерисање „занимљивих“ проблема, употребом математичких, естетских, критеријума–изненађење, новост, једноставност);
- *Постављање друштвено релевантних математичких проблема* (истраживање и математизирање стварних животних ситуација у којима се може укључити разумијевање и рјешавање друштвених проблема).

Свако од ових искустава представља припремање наставника да прошири и учврсти професионалне визије и праксу наставе математике и то учењем да: (а) пажљиво постављају проблеме ученицима, (б) стварају проблеме заједно са ученицима, и (в) представљају личне и/или друштвено релевантне проблеме. Такав је, на примјер, задатак који се односи на тему мјерења површине. Проучавање проблема може бити пренатрпаност школе (бројност одјељења и величина учионице – која је одговарајућа квадратура по ученику?) и разматрање о утицају простора учионице на учење ученика (Ibid).

Креспо (Ibid) наводи примјер задатка који покреће ученике да усвајају и траже обрасце, а затим покушају да објасне разлоге који стоје иза тих образаца, примјењујући оно што већ знају о дијељењу цијелих бројева:

С обзиром на 2.726 :58 = 47

Предвидите рјешења: 272.6 : 58 = _____

27.26 : 58 = _____

2.726 : 58 = _____

0.2726 : 58 = _____ (Ibid:496).

Такође, занимљив проблем, усмјерен на истраживање и примјену, о количини токсичног отпада, који производи аутомобилска компанија за 2012. годину, при чему су дати одговарајући почетни услови. Еколошка агенција тражи да укупна произведена количина токсичног отпада, након 1. јануара 2010. године, не прелази одређену количину ограничења, а проблем је да се утврди да ли компанија испуњава ове услове (Matsko & Thomas, 2015).

Занимљиве математичке проблеме наставници могу да креирају из примјера свакодневних ситуација, као на примјер присуство у школи, школски ручак и школске или друштвене активности (Jones, 2012). То су задаци, уграђени у стварни контекст, који укључују више начина рјешавања, могућност истраживања, и тако креирани, да помогну ученицима у конструисању знања, умјесто увјежбавању већ научених вјештина. Заправо, од ученика се тражи да примијене оно што већ знају да ријеше, односно, створе нова математичка рјешења проблема, науче нове концепте и тачне процедуре. Осим наставника, ученици могу да самостално креирају проблеме. На примјер, задајемо бројевну реченицу или математичку ситуацију и од ученика тражимо да саставе текстуални задатак и/или да саставе проблеме на

основу свакодневних ситуација. При томе, ученицима се за састављање проблема могу понудити рекламе из новина, мени ресторана, распореди тимова и цијене карата. Такође, постављање проблема је корисно за ученике свих старосних група јер их мотивише да постављају питања на која не могу брзо дати одговор (Ibid).

Досадашњи преглед литературе показује да је постављање проблема комплексно питање које је проучавано из улоге наставника, ученика, услова, као и стратегија, ситуација, тј. основних извора креирања проблема. Једно од наших запажања јесте да аутори постављање проблема заснивају, прије свега, у складу са математичким знањима одређених математичких области, као и са педагошким захтјевима, планираним наставним исходима, способностима и интересовањима ученика. Дакле, постављање проблема је облик креативне активности осмишљавања математичких задатака у специфичном контексту, чија је формулација важан пратилац рјешавања проблема.

2.3. Рјешавање проблема

Рјешавање проблема се често наводи да је најважнија когнитивна активност у свакодневном и професионалном контексту (Jonassen, 2000). Зашто? Практично свако, у свакодневном и професионалном животу, редовно рјешава проблеме. Оно што је, уопште, тачно за рјешавање проблема односи се и на математичко рјешавање проблема (Elia, Van den Heuvel–Panhuizen & Kolovou, 2009). Иако је тешко дефинисати рјешавање проблема, Лестер и Кехле (према Lester, 2013:4) тврде да: „Успјешно рјешавање проблема укључује координацију претходних искустава, знања, познатих представа и образаца закључивања и интуиције у настојању да се генеришу нови прикази и сродни обрасци закључивања који рјешавају одређену напетост или двосмисленост (тј. недостатак смислених представа и подршке инференцијалних поступака) којима су подстакнуте првобитне активности рјешавања проблема.“ Према Џонасену (Jonassen, 1997) рјешавање проблема је сложена активност и више од збира њених саставних елемената. Рјешавање проблема нужно укључује разне когнитивне компоненте, предложене информације, концепте, правила и принципе (знање из домена). Међутим, рјешавање проблема, такође, укључује структурирано знање (умрежавање информација, семантичко означавање/концептуално умрежавање и менталне моделе), ампликативне вјештине (конструисање/примјена аргумената, анализирање и закључивање) и метакогнитивне вјештине (постављање циљева, расподјела когнитивних ресурса, процјена предзнања, процјена напретка/процјена грешке) ученика (Ibid).

За нас је посебно занимљив проблем разумијевања процеса рјешавања задатака. У том погледу, велики допринос даје Поља (Polya, 1973) који уводи појам хеуристике и стратегије у процесу рјешавања задатака. Ријеч је о сложеном процесу који има неколико различитих аспеката. Поља (Polya, 1973) идентификује четири фазе рјешавања проблема: (1) разумијевање проблема, (2) осмишљавање плана за рјешавање проблема, (3) спровођење плана и (4) размишљање о проблему. Савремени аутори модификују наведене фазе рјешавања проблема. Тако Новотна (према Обрадовић & Зељић, 2015:71) разликује следеће фазе решавања проблема:

- Етапа шифровања (схватање задатка);
- Етапа трансформисања (пребацивање у математички језик);
- Етапа рачунања (математичко решавање проблема);
- Етапа складиштења (пребацивање математичког резултата назад у текст).

У наведеним приказима модела рјешавања проблема, прва фаза налаже разумијевање проблема у цјелини. Колико год то звучало једноставно, ово је често превиђено у процесу рјешавања проблема (Florida Department of Education, 2010). Након што се ученици одлуче за

одређени план, требало би да примјењују следеће кораке: (1) Ријешите проблем користећи свој план; (2) Обавезно провјерите сваки корак; (3) Ако план не успије након неколико покушаја, испробајте други план; (4) Испитајте грешке (сјети се да ће можда бити потребна ревизија плана); (5) Провјерите свој одговор (Ibid:53). Дакле, када схватимо проблем моћи ћемо да процијенимо која су питања најважнија. Испитавши једно или два суштинска питања бићемо у бољој позицији да процијенимо шта би даље испитали. Потребно је ући у детаље и постепено разложити проблем, али не више него што је потребно (Polya, 1973).

Слично, Џон Брансфорд и Бери Стејн (према Вулфолк, Хјуз & Волкап, 2014) сматрају да опште стратегије рјешавања проблема обично имају пет фаза, за чије именовање користе акроним ИДЕАЛ:

И – идентификујте проблеме и прилике;

Д – дефинишите циљеве и представите проблем;

Е – истражите могуће стратегије;

А – антиципирајте исходе и крените у акцију;

Л – осврните се уназад и научите.

Дакле, као што смо истакли, за рјешавање проблема највише нас интересује разумијевање цјелокупног проблема. То значи да ученици треба да разумију шта се у проблему заиста тражи. Међутим, истраживања показују да ученици пребрзо закључују шта је питање проблема (Ibid). Заправо, у рјешавању проблема, након категоризације проблема активира се одређена шема. Шема усмјерава пажњу на важне информације и ствара очекивања како би требало да изгледа тачан одговор. На примјер, Гентнер и сарадници (према Вулфолк, Хјуз & Волкап, 2014) захтијевају да ученици пореде примјере или случајеве тако да могу да развију општу шему рјешавања проблема, која региструје општу структуру, а не површне карактеристике случајева.

Поред наведеног, Поља (Polya, 1973) истиче да би након ријешеног проблема ученици требало да размисле о процесу рјешавања проблема. Одвајањем времена за размишљање, и освртањем, на оно шта се урадило, шта је успјело, а шта није, може се много тога добити. Прије свега, то ће омогућити предвиђање стратегије рјешавања будућих проблема. Оно што Поља (Ibid) посебно истиче јесте да рјешавање проблема често зависи од открића одговарајућег помоћног проблема. Варијација предложеног проблема може нас довести до открића доступнијег, помоћног, проблема. Мијењајући проблем, постављамо нова питања и тако стварамо нове везе, нове могућности повезивања елемената који су релевантни за наш проблем. Даље, Поља (Ibid) предлаже разматрање проблема са различитих страна, испитивање различитих детаља, испитивање истих детаља више пута, али на различите начине, различито комбиновање детаља, сагледавање сваког детаља на нови начин, као ново тумачење цјелине, разматрање рјешења и поједностављивање рјешења, тако да се учини интуитивним и, тако што природније, уклопи у раније стечено знање. У прилог томе, за постизање успјеха у рјешавању проблема, Поља (Ibid) наводи примјену савремене хеуристике. Хеуристички, као придјев, значи „служити откривању“. Ова стратегија настоји да разумије процес рјешавања проблема, посебно менталних операција које су типично корисне у овом процесу. Озбиљно проучавање хеуристике требало би да узме у обзир и логичку и психолошку позадину, али и искуство рјешавања проблема. Хеуристичко расуђивање се не сматра коначним и строгим, не узима се као доказ, и његова сврха је откривање рјешења садашњег, тренутног, проблема (Ibid).

Поред хеуристичких (когнитивних) стратегија, рјешавање проблема захтијева и метакогнитивне стратегије. Метакогнитивне стратегије укључују саморегулативне

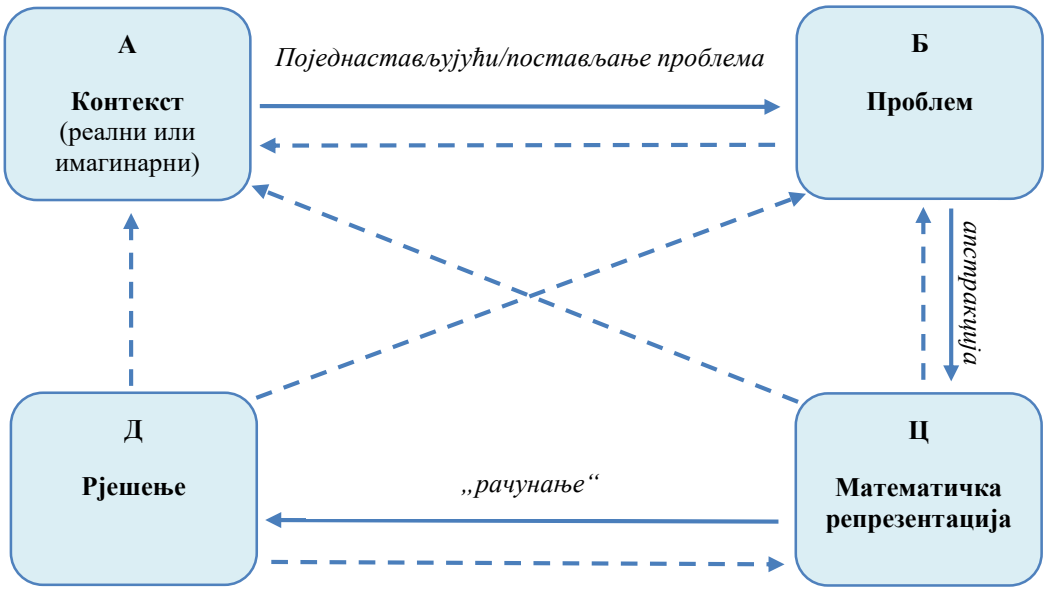
активности, попут разлагања проблема, праћења процеса рјешавања, процјене и верификације резултата (Verschaffel et al., 1999). Такође, важан корак у разумијевању и рјешавању проблема је одабир записа. Штавише, приликом одабира записа, морамо добро размислити о елементима проблема који се означавају. Вријеме које утрошимо на одабир записа доприноси каснијем избјегавању збуњености и неодлучности (Polya, 1973). Осим тога, у рјешавању било које врсте проблема морамо се ослонити на искуство ученика са сличним проблемима и често постављати питања: Да ли сте видјели исти проблем у мало другачијем облику? Да ли знате проблем који је повезан са датим проблемом? Да ли сте узели у обзир све суштинске појмове проблема? Примјена ових питања увелико зависи од нивоа сложености појмова који се постављају у проблему (Ibid). Овако испитивање рјешења ствара добро уређено и спремно знање за примјену и развијање способности рјешавања проблема. Другим ријечима, ученици уче математику анализирајући рјешења проблема, како тачних тако и нетачних. Анализом властитих метода рјешавања проблема, као и метода других ученика подстиче се изграђивање математичких односа. Ово је како Хиеберт (према Jones, 2012) истиче „у срцу разумијевања“. Када ученици уче математику рјешавањем проблема, они успостављају везе између математичких појмова и развијају концепте, као и стратегије рјешавања проблема. Тако се стварају представе о повезаности математичких знања, олакшава развој математичких способности рјешавања проблема и подстиче увјерење ученика у њихову способност учења математике.

Чарлс и колеге (према Elia, Van den Heuvel–Panhuizen & Kolovou, 2009) наводе неколико стратегија рјешавања проблема у настави математике за основну или средњу школу, као што су: погодите – провјерите – ревидирајте, нацртајте слику, изведите проблем, користите предмете, изаберите операцију, ријешите једноставнији задатак, направите табелу, потражите образац, направите организовану листу, напишите једначину, користите логичко резоновање, радите уназад. Овдје занимљив и један од корисних начина у провјеравању урађеног задатка, према Дрејфусу (Dreyfus, 2002), је употреба обрнуте процедуре. Иако би им провјера пружила доста сигурности, чини се да већина ученика није баш заинтересована за ову математичку активност. Ово би могло и требало промијенити, преносећи више одговорности процеса учења са наставника на ученика. У том правцу, један од корака је пружање више отворених активности, а не кратких вјежби. При том, ови процеси требају бити веома јасни ученицима до најситнијих детаља. То не значи да ученицима треба рећи све о тим детаљима, већ да активности ученика морају бити креиране у складу с наведеним активностима, на начин на који је ученицима разумљив. У активностима могу али не морају бити укључене детаљне математичке чињенице или односи, већ су то чешће активности које су дјелови процеса. На примјер, када говоримо о смјењивању репрезентација, ученици морају бити свјесни поступка извлачења информације једне репрезентације и њене употребе у другој (Ibid).

У истраживањима Блума и Ниса (Blum & Niss, 1991) рјешавање проблема се разматра на два начина. (1) Као предмет истраживања о питањима као што су: Како се рјешава проблем повезан са другим аспектима „математичког размишљања“? Које су суштинске структурне и психолошке компоненте рјешавања проблема? Како неко адекватно класификује различите процесе рјешавања проблема? Које су најзначајније когнитивне и афективне препреке за развој способности рјешавања проблема? Да ли је могуће предавати и учити рјешавање проблема? (2) У вези са наставом математике, гдје се обрађују питања која се односе на укључивање и примјену рјешавања проблема у наставним програмима математике. Даље, Блум и Нис (Ibid) детаљније разматрају поступак рјешавања примијењеног проблема. Полазна тачка је примијењени проблем или, како се још назива, стварна проблемска ситуација. Ова ситуација мора бити поједностављена, идеализована, структурирана и подвргнута одговарајућим условима и претпоставкама. Стварни модел треба математизовати, тј. његове податке, концепте, релације, услове и претпоставке превести на математички језик. Такав модел се у

основи састоји од одређених математичких објеката, који одговарају „основним елементима“ првобитне ситуације или стварног модела, и од одређених односа између ових објеката, који опет одговарају односима између тих „основних елемената“. Прецизније, математички модел се може посматрати као троструки (С, М, Р), који се састоји од стварне проблемске ситуације С, скупа М математичких ентитета и релације Р. Објекти и односи С (стварне проблемске ситуације) повезани су са објектима и релацијама М (скупа математичких ентитета). Процес рјешавања проблема наставља се радом у математици, односно извлачењем закључака, израчунавањем и провјером конкретних примјера, примјеном познатих математичких метода и резултата, као и развојем нових итд. При валидацији модела могу се јавити одступања различите врсте, која доводе до модификације модела или до његове замјене новим.

Према Лестеру (Lester, 2013) математичка активност рјешавања проблема је сложени, вишефазни, процес (Слика 8), који започиње када појединац, који ради у сложеном контексту (оквир А), постави (или му се да) одређени проблем који треба ријешити (пуна стрелица између А и Б). Да би започео рјешавање проблема, појединац поједностављује сложену поставку проблема, идентификујући оне концепте и процесе који директно упућују на проблем. Ова фаза укључује доношење одлука о ономе на шта треба обратити пажњу, а шта се може занемарити, развија осјећај за повезивање основних појмова и резултира реалним приказом првобитне ситуације. Слиједи фаза апстракције (пуна стрелица од Б до Ц), која уводи математичке концепте и ознаке (иако можда идиосинкратске) и укључује избор математичких појмова који ће представљати суштинске карактеристике реалног модела. Експлицитни приказ изворне поставке и проблема у математичкој симболици представља математички приказ поставке и проблема. Математички проблем сам по себи добија значење, постајући изоловани, добро дефинисани математички проблем (оквир Ц). Трећа фаза процеса (од Ц до Д) укључује манипулисање математичким приказом и извођење појединих математичких закључака, приказаних на слици стрелицом „рачунање“. Током ове фазе, појединац се ослања на математичке чињенице, вјештине, способности математичког закључивања и тако даље. Завршна фаза (од Д до А, Д до Б и Д до Ц), укључује упоређивање добијених резултата са оригиналним контекстом и проблемом, као и са математичким приказом. Али, упоређивање се дешава тек након доношења закључака и добијања рјешења. Заправо, ово редовно и стално праћење, метакогнитивне активности нечијег рада је кључна карактеристика постизања успјеха у рјешавању сложених математичких задатака (Ibid).



Напомена: Испрекидане стрелице означавају „упоређивање“

Слика 8. Модел комплексне математичке активности (Ibid:4).

Стеник и Килпатрик (према Milinković, 2015b) су идентификовали три приступа рјешавања проблема: (а) рјешавање проблема као контекста; (б) рјешавање проблема као вјештине; и (в) рјешавање проблема као умјетност. При томе, за рјешавање проблема посебно је важно познавање репрезентација. Фридлендер и Тебеч (Ibid) тврде да различите репрезентације проблемске ситуације могу да подстакну флексибилност избора ученика у процесу рјешавања. У том погледу, Арсеви (Ibid) идентификује три функције визуелних репрезентација и то: (а) илустрација симболичких репрезентација; (б) средство за рјешавање конфликта између интуиције и симболичког рјешења; и (в) средство реорганизације и обнављања концептуалног разумијевања. Он сугерише да „гледање ствари“ изоштрава наше разумијевање и служи као одскочна даска за питања која иначе не бисмо постављали. Исто, Милинковић (Milinković, 2015b) тврди да вишеструке репрезентације истог проблема могу помоћи развој флексибилности расуђивања и дубље разумијевање математичких концепата и процедура.

Налази испитивања, такође, упућују да је ниво развијености језичке писмености, тј. могућности да се разумију и интерпретирају садржаји, важан услов за успјешно овладавање и примјену математичких знања у рјешавању проблема. Тако, разумијевање аритметичких проблема, код једанаестогодишњака, који су дати кроз текстуалне задатке, Моро и Кокан–Виено (према Стевановић & Ивковић, 2017) објашњавају да на постављање математичког задатка и његов резултат може утицати начин на који ученици разумију специфичне језичке конструкције (нпр. више од) помоћу којих је задатак формулисан. Поред тога, резултати испитивања односа језичких и математичких постигнућа, на интернационалним тестирањима трендова постигнућа из математике и природних наука, показују релативно низак ниво постигнућа ученика млађег основношколског узраста у Србији (Чутура & Вуловић, 2016). У прилог томе, Чутура и Вуловић (Ibid) су анализирали карактеристике одговора ученика четвртог разреда, у којима они преводе математичке изразе у форму текста. Говори се о комплексним задацима, који подразумијевају употребу способности из различитих домена, тј. процесе самосталног писања и рјешавања математичких задатака. У њима се од ученика тражи да „преведу“ математички израз у текст, што их чини отвореним математичким проблемима који имају више могућих рјешења и захтијевају креативни приступ у рјешавању. Први корак рјешавања представља разумијевање израза, а други конструисање одговарајућег текстуалног задатка. Аутори износе закључак да ученици нијесу у довољној мјери оспособљени да преводе математичке изразе у форму текстуалног задатка. Увидом у резултате може се констатовати да један од разлога слабог успјеха ученика представља несврсисходно повезивање говорног и математичког језика, односно свакодневни говорни језик преовладава над математичким, тако да изостају неопходна експлицитност и прецизност, као што је, на примјер, изостанак битног елемента задатка (налога или питања). Са порастом реда величине података, на основу којих треба саставити текст задатка, веома опада степен реалног сагледавања контекста, што се може објаснити узрастом ученика, тј. недовољним познавањем реалних животних ситуација у којима се оперише хиљадама или десетинама хиљада (било да је у питању новац или неки други репрезент величине). Стога, ученици су имали и проблем приликом избора теме, уколико је ред величине података био виши, што недвосмислено показује да ученици користе узак спектар тема. Коначно, укупна постигнућа ученика показују да се најбољи резултати постужу у областима које су аутоматизоване у писаном изражавању, тј. правописна и граматичка коректност (нормативност), док су најнижа постигнућа у разноврсности тема, што недвосмислено упућује да је тачност у математичком смислу захтјев који ученици сматрају доминантним, а не иновативност и квалитет текста. То доводи до закључка да ученици усмјеравају свој рад на тачно рјешавање једне врсте проблема (само математичког), релативно занемарујући аспекте језичког обликовања и оригиналности.

Обрадовић и Зељић (Обрадовић & Зељић, 2015) проучавају различите аспекте процеса рјешавања текстуалних проблема, при чему истичу да нам одговори ученика у рјешавању

проблема могу помоћи да уочимо и разумијемо проблеме које ученици имају у том процесу, као и да сагледамо ниво разумијевања поступака рјешавања задатака од стране ученика. Основну претпоставку за успјешно рјешавање текстуалних задатака виде у разумијевању текста тог задатка. Ако се везе између датих и тражених података могу утврдити непосредним методама математичког мишљења, уз коришћење оригиналног проблема, онда се говори о директним методама рјешавања математичких проблема (Дејић & Егерић, 2003). Дејић и Егерић (Ibid) наводе следеће директне методе: синтетичка (Знамо, шта можемо добити?), аналитичка (Шта треба знати да би се добио одговор?) и аналитичко–синтетичка метода (растављање сложеног задатка на више простијих, који се затим рјешавају синтетичком методом). При рјешавању задатака, Новотна и Роџерс (према Обрадовић & Зељић, 2015) тврде да ученици најчешће развијају инструментално разумијевање, тј. за рјешавање задатака користе претходно запамћене алгоритме. Ако алгоритам не одговара, ученици не могу ријешити задатак, осим ако не активирају постојећа знања, уоче различите везе између података и захтјева задатка, односно релационо разумију математички проблем.

Даље, уколико проблем не можемо директно да ријешимо онда га рјешавамо према њему одговарајућим моделима. Умјесто датог текста задатка или неког другог захтјева наставе (да се формира одређени појам, открије правило итд.), тј. оригинала, ми посматрамо његову замјену–модел (Дејић & Егерић, 2003). Процес започиње анализом оригинала, стварањем информационе базе модела, одређивањем менталне слике оригинала, односно самог модела. Затим се формално изучава модел, примјењују математичке операције за налажење рјешења и коначно се интерпретирају резултати моделовања у сфери оригинала (Питер, Крекић & Ћетковић, 2002). С обзиром на врсту графичке илустрације, које су одређене моделом, у почетној настави математике се користе следеће методе рјешавања математичких проблема: метода дужи, метода таблица, метода правоугаоника, метода Веновог дијаграма и метода фокусног дијаграма (Дејић & Егерић, 2003).

Када је ријеч о најважнијим активностима рјешавања проблема, Лиш и Ламон (Lesh & Lamon, 1992) упућују на следеће карактеристике:

- Рјешавање проблема обично захтијева вријеме од 5 до 50 минута.
- Контексти се могу односити на свакодневни живот ученика.
- Питања одговарају интересовањима и искуствима ученика одређеног узраста.
- Задаци подстичу ангажовање личног искуства, знања и способности разумијевања ученика.
- Циљеви наглашавају дубље схватање и процесе вишег реда у елементарној математици.
- Поступци рјешавања омогућавају ученицима да користе реалне алате и ресурсе (као што су дигитрон, џепни рачунар, лаптоп, консултовање са вршњацима или приручнике „како да“).
- Активности, уопште, захтијевају више од једноставног одговора на конкретно питање. Оне укључују развијање математичког модела који се користи за описивање, објашњење, манипулисање или предвиђање понашања разних система, који се јављају у свакодневним ситуацијама.
- Активности доприносе и учењу и оцјењивању.
- Процедуре евалуације препознају и награђују више од јединственог типа и нивоа тачног одговора (Ibid).

Поред наведеног, за процесе рјешавања реалистичких проблема, Лиш и Ламон (Ibid) укључују: (1) паралелну и интерактивну употребу неколико различитих система нотације и/или интерпретације проблема, (2) дјелимична пресликавања између компоненти моделоване ситуације и одговарајућих компоненти модела и/или система нотације и (3) конструисање, прилагођавање, проширење, интегрисање, разликовање и/или изграђивање низа модела који

постепено постају потпунији, тачнији и софистициранији. Тиме многи од значајних математичких „објеката“ који се од ученика очекује да проуче нијесу само изолована чињенична и процедурална правила или општи процеси рјешавања проблема. Они су модели (или обрасци, или структуриране метафоре) који су корисни за изградњу и разумијевање стварних и могућих свјетова (Ibid:26).

Поред наведеног, сагледали смо рјешавање проблема као контекста који се користи за проучавање креативности ученика. Литература садржи различите дефиниције и карактеристике математичке креативности. Разне студије су идентификовале одређена понашања која пружају доказе о математичкој креативности ученика. На примјер, Торанс (према Singer & Voica, 2015) је дефинисао основне карактеристике математичке креативности: флуентност, флексибилност и новост, које представљају, редом, број идентификованих, различитих, приступа проблему; број генерисаних рјешења и ниво њихове конвенционалности. Као главне компоненте математичке креативности, Балка (Ibid) је издвојио конвергентно мишљање, за које је карактеристично одређивање образаца, и дивергентно мишљење, којим се формулишу математичке хипотезе, вреднују необичне математичке идеје, увиђа шта проблему недостаје и рашчлањује општи проблем на специфичне подпроблеме. Осим тога, креативност захтијева широку базу знања, флексибилност и стално реорганизовање знања. При томе, у креативном процесу рјешавања проблема важну улогу имају мотивација, истрајност и друштвена подршка (Вулфолк, Хјуз & Волкап, 2014). Исто, Бир и Кеуфмен (према Singer & Voica) идентификују предуслове за креативно изражавање понашања и то: интелигенцију, мотивацију и погодно окружење.

Ипак, Каj (Cai, 2003) указује да се у истраживањима и теоријама креирања наставе премало пажње посветило проучавању процеса рјешавања проблема. За Каја (Ibid), појединачне разлике рјешавања математичких задатака могу се разумјети разликама у примјени различитих стратегија. Отуда се може рећи да вјештине рјешавања математичких проблема зависе од усвајања, избора и примјене стратегија, специфичних за домен, и, општих когнитивних стратегија рјешавања проблема (Ibid). С друге стране, стратегије и методе рјешавања проблема зависе од одабраног модела или репрезентације проблема. Запажамо да стварање креативне околине за учење, проблематизација ситуација из свакодневног живота, подстиче дубље разумијевање проблема. Навике ученика у учењу математике могле би се трансформисати у учење засновано на истраживању проблема, које би подстакло њихову радозналост и повећало ангажовање у креативном проналажењу рјешења. Стога, главни модели који се користе за описивање креативности су процеси који наглашавају важност осјетљивости на проблеме, тј. постављање проблема и њихово рјешавање. Истраживања, оријентисана на наставу математике, показала су да постављање и рјешавање задатака ученицима помаже у развоју математичких знања (Silver, 1994). То потврђују савремени модели обраде информација, по којима се сложени проблем рјешава узастопним успостављањем низа прецизно постављених проблема, који укључују везе између датих информација и жељеног циља, и, у којима се нове информације додају као испуњени подциљеви проблема (Ibid). Дакле, овим задацима наставници могу повећати способност креативности ученика, прије свега, флексибилност и оригиналност. Такође, репертоар постављања и рјешавања проблема се досљедно изграђује кроз самоусмјеравање пажње на разумијевање прочитаног, односно постављеног задатка. Исто, поновљена динамика постављања проблема/рјешавања проблема повећава репертоаре ученика за препознавање и проширивање већ усвојених начина разумијевања проблема (Prabhu & Czarnocha, 2015).

2.4. Улога наставника у постављању и рјешавању проблема

Како су активности постављања и рјешавања проблема постале важне компоненте наставе математике, Мосиз и његови сарадници (према Rosli et al., 2015) истичу кључну улогу наставника у изграђивању репертоара асоцијативних знања ученика за правилно постављање и ефикасно рјешавање проблема. На примјер, Кнот (Knott, 2010), проблематику постављања проблема објашњава на начин да подстицање активне наставе, постављање и рјешавање когнитивно изазовних проблема, промовисање рефлексије, метакогниције и широких расправа, побољшава разумијевање математичких знања ученика на свим нивоима. Он упућује да ово није могуће без стручности наставника у области садржаја, али и онога шта каже, каква питања поставља и које учешће и одговоре очекује од ученика. Према томе, приликом процјењивања проблема који постављају, наставници треба да посвете пажњу педагошком и математичком значају датог проблема.

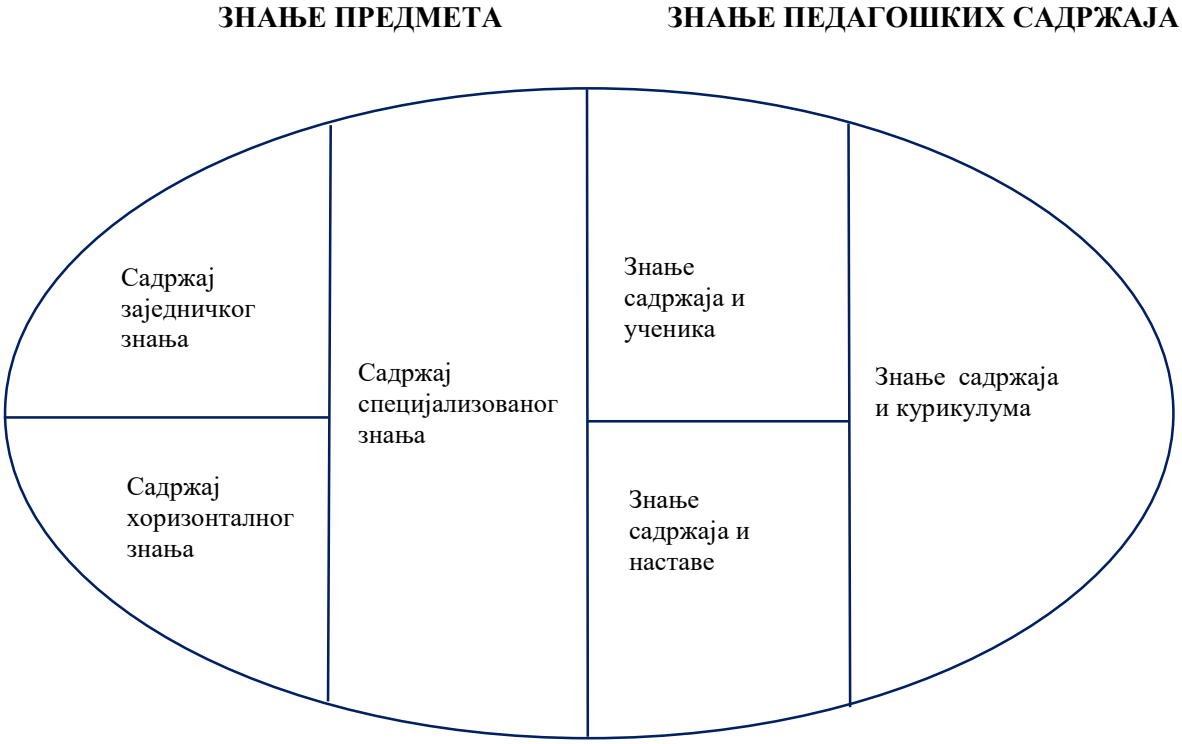
У подацима својих истраживања, Осана и Рojиа (према Osana and Pelczer, 2015) откривају да, иако разумију интуитивно и формативно рјешење проблема, ученици нијесу увијек у могућности да примијене своје знање за рјешавање проблемског задатка. Импликација оваквог стања од наставника тражи ангажовање у разредним дискусијама, које се односе на поређење различитих проблема у односу на њихову структуру. Осим тога, неопходно је да наставници процијене инструктивне вриједности задатака и модификују их према специфичним циљевима учења или потребама ученика. Задаци који од наставника захтијевају да преформулишу проблеме и процијене њихове модификације (рјешивост, ниво когнитивних захтјева, методе рјешавања, контекстуалне карактеристике, могуће грешке и циљеве учења) доводе до „већег смисла“ постављеног проблема. Преформулација проблема се може појавити на различитим нивоима, (на примјер исти математички израз може бити формулисан на различите начине), тако да наставници треба да размотре релативне предности и недостатке сваке (ре)формулације (Osana & Pelczer, 2015). Како наводе Креспо и Синклер (Crespo & Sinclair, 2008), пружа им се могућност да модификују проблеме у складу са специфичним критеријумима или наставним циљевима.

Са друге стране, чак и када наставници имају приступ висококвалитетним уџбеницима и наставним плановима и програмима, они често, како наводе Хенингсен и Стејн (према Crespo, 2015), трансформишу комплексне проблеме на начин који смањује њихов когнитивни захтјев. Али, ако наставници желе да пруже богата и дубока искуства учења својим ученицима, важно је да они развију принципијелне начине одлучивања о релативној вриједности проблема – шта поједине проблеме чини бољим проблемима од других. Што је још важније, они, такође, треба да имају искуства креирања таквих проблема, односно, у ширем смислу, неопходно је да су усмјерени на одговарајуће стратегије постављања проблема.

Данас, као значајан аспект наставе математике истиче се ефикасност резоновања ученика и његова заступљеност у рјешавању проблема. Овај задатак захтијева, између осталог, способност наставника у пружању повратних информација о процесима рјешавања проблема, и подстицању развоја математичких знања ученика (Mellone, Ribeiro, & Jakobsen, 2018). На примјер, Болова (Ball, 1993) тврди да наставници математике морају поштовати размишљање ученика, чак и док им помажу усвајање разумијевања концепата и вјештина. Неопходно је да пажљиво анализирају тренутне идеје и интересовања ученика. Заправо, потребно је да пруже подршку за испитивање и анализу садржаја тако што бирају и користе приказе, којима се „освјетљавају критичне димензије“ тог садржаја. Осим тога, наставницима су потребни алтернативни модели како би надокнадили „несавршеност и искривљеност“ у било којој датој репрезентацији (Ibid).

У ширем смислу, знање наставника из математике као научне дисциплине и његова увјерења о динамици процеса наставе и учења играју кључну улогу у настави математике (Ball,

Thames & Phelps, 2008). Неопходно је да наставници знају градиво које предавају, као и да препознају када ученици дају погрешне одговоре или када уџбеник садржи нетачне дефиниције. Тако, идеја о више облика знања, коју је Шулман (Shulman, 1986) значајно истикао у свом раду, у великој мјери, утицала је на истраживање у настави математике. Шулман (Ibid) развија оквир за класификацију домена и „категорија“ знања наставника: (а) познавање садржаја наставног предмета, (б) знање педагошког садржаја и (в) знање курикулума. Полазећи од овог модела, Болова и колеге (Ball et al., 2008) су развили студију концептуализације математичких знања наставника, потребних за подучавање у настави математике (Слика 9).



Слика 9. Концептуализација математичких знања за наставу (Ibid:403).

У раду Болове и колега (Ibid) се препознају и дефинишу три типа знања о педагошким садржајима (десна страна модела) (Слика 9): знање садржаја и ученика, знање садржаја и предавања и знање садржаја и курикулума. Поред тога, знање које се односи на одређену тему математике, тј. знање наставног предмета, упућује на посебне карактеристике математичког садржаја, који се уводи у наставу (лијева страна модела) (Слика 9). На овај начин, наставник може помоћи ученицима у усвајању математичког садржаја и проучавању те специфичне математичке теме, тј. да разумију шта уче, како повезују појмове и зашто. Ово је садржај заједничких знања модела јер су ова знања саставни дио математичких знања која посједују различити професионалци (инжењери, економисти, програмери). Поред знања из математике, за наставника значајну улогу у планирању и извођењу наставе има разумијевање математичких садржаја у оквиру наставног плана и програма.

Домен специјализовано знање о садржају укључује математичко знање и вјештине јединствене за наставу. Знање о садржају и ученицима је домен који повезује знање о ученицима и математичко знање. Наставници морају предвидјети шта ће ученици мислити и шта их може збунити. Исто, при избору примјера, наставници треба да предвиде шта ће бити занимљиво ученицима и шта их мотивише. У средишту ових задатака је познавање

уобичајених ученичких концепција и заблуда о одређеном математичком садржају. Последњи домен, знање о садржају и настави, комбинује знање о математици и знање о настави. Многи задаци који се постављају у настави математике захтијевају знање о планирању наставе. Наставници одређују математички садржај за наставу, односно, бирају са којим примјерима ће почети и које ће примјере користити за дубље увођење ученика у садржај. Процјењују наставне предности и недостатке приказа, који се користе за подучавање одређеног концепта, и идентификују шта различите методе и поступци пружају у настави. Сваки модел такође захтијева различити опрез који се користи како би се математичка питања учинила значајним и употребљивим за ученике. У сваком од ових примјера, знање о настави и садржају је спој који укључује одређени математички садржај и упознавање са педагошким принципима подучавања тог садржаја. Поред наведеног, Болова и колеге (Ibid) упућују на знање како су математичке теме међусобно повезане, односно на хоризонтално знање. То је свијест о повезаности тема у домену математике која је обухваћена наставним планом и програмом. На примјер, наставници треба да знају како је математика коју предају почетницима повезана са математиком коју ће ученици учити у трећем разреду, како би поставили математички „темељ“ за оно што ће касније учити. Такође, то укључује визију корисну за уочавање веза са каснијим математичким садржајима. Ово познавање „математичког хоризонта“, наставницима може помоћи у доношењу одлука о томе како, на примјер, користе бројевну праву, у почетној настави математике, за усвајање скупа природних бројева N, и да ли, и како, овај избор наставника предвиђа или „искривљује“ каснији развој знања, на примјер у скупу цијелих бројева Z (Ibid).

Према томе, предложени задаци треба да су усмјерени на развијање знања ученика, омогућавајући им да увиде математичку структуру теме. При томе је важно да наставници истражују различите начине постављања проблема и анализе различитих рјешења проблема (Mellone, Ribeiro & Jakobsen, 2018). Од пресудног значаја је да наставници имају знање које им омогућава разумијевање математичког закључивања ученика, које је „у позадини“ дефиниција, израчунавања и процеса рјешавања проблема. Штавише, наставници треба да посједују богат и широк скуп примјера, стратегија и репрезентација рјешавања проблема, што им омогућава да разумију не само познате начине рјешавања проблема које ученици користе, већ и нестандардне одговоре, резоновања и стратегије (Ibid). Између осталог, потребна су знања наставника којима разумију одговоре ученика, прије свега, када се одговори разликују од стандардног резоновања, тј. оних одговора који су више учестали и често их користе сами наставници. Такво разумијевање одговора ученика подразумијева и способност процјене да ли се неко рјешење може размотрити на математички валидни и/или генерализовани начин у другим ситуацијама. Такође, потребно је испитати дата понуђена рјешења, чак и погрешна рјешења, како би се испитали когнитивни процеси рјешавања проблема ученика, на, значајан, математички начин (Ibid).

Ефикасни наставници математике разумију математику коју планирају да предавају, као и значај креирања задатака који изазивају претходно знање ученика, ради његове примјене за усвајање нових знања. Тако, они не само да креирају задатке за усвајање и овладавање релевантним знањима већ и задатке који подстичу развијање вјештине мишљења. С тим у вези, резултати експерименталног истраживања, Маричић, Шпијуновић и Лазић (Maričić, Špijunović & Lazić, 2016) показују да се бољим планирањем, тј. правилним одабиром одговарајућих садржаја (задатака) може успјешно развијати критичко мишљење у почетној настави математике. На узорку од 246 ученика (9,5 – 10,4 година) утврђено је да се може значајно утицати на развој сваке операционализоване вјештине критичког мишљења (формулисање проблема, преформулисање проблема, евалуација, осјетљивост на проблеме). Ово показује да избор одговарајућих садржаја (задатака) може помоћи ученицима да стекну више развијен критички однос према информацијама, садржају задатка, добијеном рјешењу, али и према мишљењу наставника. То сугерише да наставник избором одговарајућих садржаја значајно

доприноси развоју способности ученика да критички процјењују реалност проблемске ситуације дате у задатку, као и да процијене реалност рјешења узимајући у обзир околности у којима је проблем дат, те да уоче и открију скривене и имплицитне информације проблема, затим да се уздрже од брзих закључака и да уочавају недоследности, контрадикторности, сувишне и непотпуне податке формулисаног проблема. Више о типовима задатака за процјену наведених вјештина критичког мишљења налази се у поглављу *Врсте задатака у вредновању*.

Полазећи од запажања да у традиционалној настави наставник поставља проблеме, а ученици приказују рјешења, све се више долази до става да би се наставници требали удаљити од ове ригидности, односно помјерити активности ученика са такозваних „правих начина“ и „исправних одговора“. Наиме, развија се потреба за креирањем наставе постављања проблема као „отвореног“ приступа настави математике или подучавање са отвореним проблемима. У том смислу, поступцима транспозиције проблема, наставник коришћењем различитих репрезентација, проширивањем проблема, додавањем нових операција или услова, поређењем различитих проблема, у циљу процјене сличности и разлика, или анализом непотпуних или сувишних проблема, подстиче разумијевање проблема (Singer et al., 2011). Овим активностима постављања проблема ствара се боља повезаност међу појмовима и тиме продубљује њихово разумијевање. Осим тога, ниво квалитета усвојеног знања сматра се „одрживим“ ако се постављање проблема заснива на систематској основи.

Дакле, формат задатака је у основи циклуса трансфера знања како би се интернализовали различити прикази и, што је подједнако важно, начини преласка са једне репрезентације проблема на другу. Као најефикаснији проблеми издвајају се примјери модела – изазивање активности, који се могу поставити на неколико алтернативних начина, а чија су тумачења заснована на проширивању знања и искустава ученика из стварног живота. Све ово показује да се ефикасна настава, са акцентом на реални контекст знања, усмјерава на промјену репрезентација, у оквиру различитих активности, које пружају информације о когнитивним приступима ученика у рјешавању проблема. Тиме промјена репрезентација проблема постаје поуздано „оруђе“ за рјешавање проблема. Међутим, у радним групама у којима се од наставника тражило да напишу моделе–изазивање проблема, наставници, који су се у великој мјери ослањали на процес рјешавања проблема, доживљавају „велики осјећај сукоба“ са практичним правилима креирања проблема, усмјерених ка отвореним питањима и неопходности изазивања различитих типова одговора (Lamon & Lesh, 1992). И као последицу тога имамо да наставници постављају проблеме који имају један тачан одговор. Дакле, иако циљеви процеса учења све више „иду даље“ од чињеница и вјештина као резултата наставе, ипак, када постану центар збивања у настави, они остају само правила, нејаснија од алгоритма. Рјешавање проблема постаје прелазак од датих података до траженог циља, а основни метод је низање правила. Средство за постизање циља постаје циљ сам по себи, а могућност да се истражује, конструише, манипулише, предвиђа, тестира, појашњава и прилагођава постаје угушена (Ibid). Сходно наведеним резултатима постављања проблема наставника, објашњење можемо пронаћи у томе да, током година формалног образовања из математике, наставници немају довољно искуства у постављању проблема. Из тог разлога, важно је наставницима омогућити експлицитна искустава постављања проблема (Crespo, 2015). Овим знањима, они могу да процијене инструктивне вриједности задатака и да их модификују према специфичним циљевима учења или потребама ученика. Дакле, када стекну основно знање и искуство у постављању математичких проблема, наставници их примјењују у репертоар стратегија поучавања. И структурирање инструкција задатака поставља основу на којој они развијају вјештине постављања проблема.

Дакле, уз редовни наставни план и програм, потребно је да наставници систематски развијају ситуације за различите стратегије постављања проблема. Од изабраног модела или репрезентације проблема детерминишу се стратегије и методе рјешавања проблема. Истицање процеса који се користи у рјешавању проблема, у најмању руку, једнако је важан као и

постизање тачног одговора. За многе наставнике математике, процес рјешавања проблема, која је Поља идентификовао у четири корака, представља важан начин за подстицање ученика ка истраживачким, креативним, афективним и метакогнитивним циљевима математичког образовања. Тако активности постављања проблема у настави математике стварају интелектуални контекст за развој математичких знања.

3. Вредновање у настави математике

Значајна компонента остваривања наставе математике је систематско праћење и вредновање нивоа усвојености знања ученика, како у квантитативном тако и у квалитативном смислу. У широј, па и просветној јавности присутна је заблуда да је вредновање знања у математици једноставније него у другим предметима, односно да се лакше обезбјеђује објективност и прецизност приликом оцјењивања (Милинковић, 1998). Исто, квантитативни показатељи математичког знања – „или знаш или не“, „одговор је или тачан или нетачан“, „да ли су запамћене стандардне чињенице и поступци“, итд. – јачају увјерење да је знања из математике лако оцијенити. И када се овако оцјењивање примијени на најелементарнијем нивоу математике, открива се истина о квази–механичкој флуентности знања код успјешних ученика. Тако се, заиста, код ученика показује недостатак сигурности и апсолутна коначност, о којој говоре математичари и филозофи, на примјер, када уче да рачунају производ разломака, да растављају трином, или када доказују једноставну геометријску теорему. Поглед на овако учење математике води ка „категоризацији основног садржаја“ математике, тј. идентификацији оних концепата и вјештина које је неопходно научити. У ствари, овим, оцјењивање доводи до атомизације математичких знања пошто концепти и вјештине морају бити разграничени и диференцирани једни од других (Wheeler, 1993).

За разлику од памћења бројних чињеница или способности употребе рачунских процедура на механички начин, јавља се потреба за оцјењивањем мишљења и могућности учења ученика (Ginsburg, Jacobs & Lopez, 1993). Колико је захтјеван задатак наставника када покушава да идентификује начине размишљања ученика о проблему или ситуацији, како би испланирао начине за њихово побољшање, свједочи велики број доказа. Јасно је да овако залагање наставника, за ниво размишљања ученика о математичким ситуацијама, као и начина на који тумаче и користе размишљање ученика, представља једно од најкритичнијих питања у математичком образовању. То захтијева пажљиву и проницљиву анализу, али још више наставнике који ће тражити најбоље могуће податке, чак и у случајевима када би, гледајући уназад, пожељели да су урадили нешто другачије (Maher, Davis & Alston, 1992:263).

И поред тога што постоји широко распрострањено мишљење да наставници долазе до информација о мисаоним активностима ученика, разумијевању и њиховим процедуралним и концептуалним проблемима у рјешавању задатка, ипак, према Гинсбургу и колегама (Ginsburg et al., 1992), чини се да наставници дају оцјене којима се не успијева освијетлити мишљење и разумијевање ученика из математике. С обзиром на ову ситуацију, они се залажу за развијање метода оцјењивања о разумијевању различитих, кључних, математичких тема, укључујући и аритметику. Овим одражавају увјерење да је и за наизглед једноставану аритметику разумијевање комплексно и да су потребне различите методе оцјењивања. Неке методе оцјењивања су корисне за евалуаторе (школске психологе, стручњаке за математику, стручњаке за оцјењивање, итд.), док друге методе, у потпуности, могу бити прикладне за примјену наставника у свакодневној настави (Ibid). Аутори за полазну претпоставку узимају да се процјена мишљења остварује само у настави у којој се подстиче размишљање. Традиционални наставник који упућује ученике на стандардне алгоритме и углавном води рачуна о њиховим тачним и нетачним одговорима није у позицији да много научи о разумијевању ученика. Насупрот томе, наставници који подстичу ученике математичким активностима (развијање метода рјешавања, дискусије о математичким идејама и поступцима)

и цијене њихов сопствени приступ учењу може релативно лако процијенити разумијевање ученика (Ibid).

Дакле, реформу праксе оцјењивања наставника обиљежила је промјена погледа на оцјењивање, односно промјена аспекта оцјењивања као низа догађаја, којим се објективно мјери стицање знања, у оцјењивање као наставну праксу која пружа сталне увиде и информације за подстицање учења ученика и креирање праксе наставника (Suurtamm et al., 2016). Оцјењивање се више не поистовјећује са тестирањем, иако је тестирање само једна сврха оцјењивања. У прилог томе, стандарди оцјењивања за школску математику (NCTM,1995)[3] наводе четири сврхе оцјењивања:

- Праћење напретка ученика према одређеним циљевима учења;
- Оцјењивање програма;
- Помагање у доношењу одлука за наставу;
- Оцјењивање постигнућа ученика у датом тренутку.

Ово значи да оцјењивање под одређеним условима има значајан потенцијал за побољшање учења. Оцјењивање се све мање доживљава формалистички, као пуко додјељивање оцјена, већ као свакодневна активност подржавања процеса учења. Акценат није више на праведном и ефикасном вредновању знања, већ више о томе како нове методе и систем вредновања подстичу когнитивни и мотивациони напредак ученика. На примјер, наставници треба да превазиђу директно испитивање стандардних операција и више пажње усмјере на испитивање дубљег разумијевања операција (Zhao, Heuvel-Panhuizen & Veldhuis, 2017). Показано је да разумијевање утицаја које оцјењивање има на учење захтијева: шири фокус од саме „интервенције повратне спреге“, посебно, реакције ученика на повратне информације и миље за учење у којем дјелује повратна информација (Wiliam, 2011). То је један од разлога да се у литератури на француском језику оцјењивање разматра као аспект регулисања процеса учења, док литература на енглеском језику оцјењивање тумачи као аспект добре наставе (Ibid).

Основна идеја је да су оцјењивање, настава и учење интегрисани процеси који једино у синергији могу довести до предвиђених ефеката (Глишић, Илић & Јадријевић Младар, 2013). У том погледу, наставници користе различите облике оцјењивања. Све се више говори о изазовима наставника у пракси оцјењивања ради пружања свеобухватне слике мишљења и учења ученика. Истиче се процјена размишљања ученика постављањем проблема у којој наставници тако добијену процјену, тј. одговарајућу повратну информацију о начину размишљања, пружају ученицима, при чему им помажу да врше самопроцјену, како би резултате процјене користили за даље планирање наставе (Suurtamm et al., 2016). При томе, за основу реформе вредновања у настави математике узимају се три принципа – садржај, учење и праведност, који покрећу да се реформа математике одржи у тренду ка новим процјенама, путем укључивања важних математичких садржаја, добре инструкције у настави и промовисања могућности учења сваког ученика (National Research Council, 1993).

Поред наведеног, до главних промјена приступа оцјењивања долази се онда када је оно засновано на компетенцијама (Глишић, Илић & Јадријевић Младар, 2013). Компетенцију можемо да схватимо као начин рјешавања задатака или проблема. Када треба да ријешимо задатак или проблем користићемо констелацију програма из наше главе (које називамо схемама – знања и вјештине које смо усвојили), а који се налазе у одређеним међусобним односима, како бисмо дошли до рјешења. Тако, имамо да свако користи различите комбинације схема за различите задатке или проблеме (Ibid). За вјештине вишег реда Бел, Буркхарт и Сван (Bell, Burkhardt & Swan, 1992a) сматрају да су, прво, то опште стратегије и

[3] Упућујемо на рад: National Council of Teachers of Mathematics (1995). Assessment standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

тактике специфичне за домен, које управљају изборима нижег нивоа, вјештине и концепти који се користе у датој активности. Оне омогућавају ученику да ефикасно примијени математичко знање и изражава способност у низу домена, тј. да генерализују, представљају, апстрахују, доказују, провјере, генеришу питања, тестирају хипотезе или вјежбају вјештине. Такође, укључују способност формулисања питања у математичким терминима, или у терминима прикладним за рјешавање проблема, и да се математички резултат тумачи у контексту из којег је проблем настао, као и способност ученика да буде свјестан свог знања и вјештине у одређеном домену, начина стицања и даљег развоја знања (Ibid).

Концепт компетенције обухвата и разматрање значајних циљева и садржаја учења који треба да подстакну лични развој ученика и да их позиционирају у домену знања и вјештина, на начин који омогућава најбољу припрему ученика за ефикасно функционисање у друштву. У том погледу, оцјењивање се врши на основу исхода учења а не поређењем са другим ученицима, чиме се свакоме омогућује да достигне свој максимум. Овако, наставници користе оцјењивање да утврде шта ученици могу да ураде. Сврха оцјењивања је да се помогне ученицима да боље уче, умјесто да уче само да би добили бољу оцјену (Глишић, Илић & Јадријевић Младар, 2013). Такође, за наставу и тестирање је важно нагласити, како Грино наводи (према Lesh & Lamon, 1992), да се когнитивни циљеви не своде једноставно на опште циљеве поступака (правила независна од садржаја). Да би когнитивни циљеви били наведени у облику који је прецизан из тачке гледишта оцјењивања, и инструктивно исправан и смислен са становишта наставника и ученика, „оцјењивање мора да иде даље“ од тестирања степена информација које ученик показује у датој ситуацији. Потребно је оцијенити „природу“ образаца информација и идентификовати тачне и нетачне претпоставке, које су урађене о основним правилима (Lesh & Lamon, 1992). Најзад, водећи рачуна о унутрашњим спознајама ученика, наставници математике морају препознати да оцјењивање није скуп циљева, већ само средство за прикупљање информација које се односе на скуп циљева, али које се разликују од њих (Goldin, 1992). Тако сврха оцјењивања, према Бодину (Bodin, 1993), јесте да организује (или да испита) ситуације на такав начин да омогући прикупљање информација које, након обраде, могу открити нешто што је доследно у вези са проблемом, карактеристикама личног или колективног знања, у смислу повезаности за специфичне математичке домене.

Према томе, главна сврха оцјењивања је приказати поуздане информације о нивоу знања, чиме се упућује на дијалектичку везу између наше перцепције о томе шта је знање и могућности за његово оцјењивање. Тако, у Црној Гори, према Правилнику о начину оцјењивања ученика у основној школи (Правилник, 2019), праћење знања и постигнућа ученика подразумијева континуирана запажања на различитим нивоима о:

- познавању чињеница, дефиниција и поступака;
- разумијевању и закључивању (способност учења, анализирања, упоређивања, повезивања и закључивања);
- примјени и трансформацији знања (способност рјешавања проблема, креативно и критичко мишљење);
- комуникацијским вјештинама (слушање, читање, писање, говорење);
- социјалним односима (сарадња и тимски рад);
- психомоторним способностима (цртање, свирање, играње, израда модела/мапа и сл.);
- односу ученика према раду и обавезама у школи (иницијативност, одговорност, самоконтрола и сл.).

За наставу математике циљ оцјењивања је да се добију информације о:

- структури математичког знања ученика;
- степену и квалитету организованости дотадашњег математичког искуства у свијести ученика;

- промјени, у погледу обима и квалитета математичких знања ученика, током школске године.

Осим тога, циљ оцјењивања је да се ученику укаже на оно што наставник сматра важним у оквирима материје која се обрађује у математици (Милинковић, 1998).

Да би се одговорило на нове циљеве наставе математике, алтернативни програми оцјењивања се траже, креирају и усавршавају. Традиционални приступ оцјењивања „одоздо према горе“ почиње са увођењем и развојем нових циљева, а затим се наставља са креирањем њима одговарајућих нових тестова и извјештаја спроведеног тестирања. Са друге стране, понекад се предлаже приступ оцјењивања „одозго према доље“ односно истицање питања приоритета којима се наставници морају бавити, те који су неопходни извјештаји наставника, као и које су врсте информација и извори података прикладни за такве извјештаје (постављање питања, процедуре бодовања, технике оцјењивања) (Lesh & Lamon, 1992). Осим усклађивања наведених приступа оцјењивања, „одоздо према горе“ и „одозго према доље“, потребно је ријешити питања која укључују:

- нивое наставних циљева, укључујући дубљи и виши ниво разумијевања когнитивних циљева;
- нивое и врсте активности рјешавања проблема, у распону од јасно дефинисаних проблема из чисте математике до сложенијих и отворених пројеката из стварног живота, у којима су доступни реално вријеме, алати и ресурси;
- разматрање нових инструмената оцјењивања, укључујући не само иновативне врсте тестова, већ и портфолио ученика, запажања наставника у учионици, клинички интервју један на један и инструкције засноване на примјени рачунара;
- развијање нове врсте процедура за тумачења одговора, укључујући и оне које превазилазе додјељивање бројчаних или словних оцјена, да би се идентификовали профили способности и потребе појединачних ученика;
- генерисање нове врсте извјештаја о напретку учења који су једноставни, а опет нијесу поједностављени, и који интегришу информације из различитих извора, затим, фокусирају се на обрасце и добијене податке, и, информишу о различитим питањима за доношење даљих одлука у планирању наставе (Ibid).

Основу за нови поглед вредновања у настави математике представља јасна дефиниција онога шта се оцјењује. Циљ је садржаје из математике, као научне дисциплине, прилагодити могућностима учења ученика, од проблема из чисте математике до рјешавања проблема стварних животних ситуација, и познавати способности ученика које доприносе успјеху, када се математички концепти и алати користе у новим ситуацијама рјешавања проблема. Ова питања се крећу од креирања програма математике до дијагностичке анализе напретка учења за појединачне ученике, са нагласком на праведност и валидност (Ibid). Ово је велики изазов, односно оцијенити све нивое и облике математичког знања, укључујући опште математичко знање, као и специфичне информације и уска знања „како–да“. Тиме добијамо структурирано оцјењивање, које узима у обзир различите нивое математичког знања. Штавише, можемо разликовати нека достигнућа ученика, напреднија од других, односно приказати различите облике информација добијених оцјењивањем (Wheeler, 1993). Тада имамо да се резултати оцјењивања употребљавају да повећају образовне могућности и оно постаје значајно и корисно за унапређивање укупног квалитета наставе и учења (Спасић, 2013). Са друге стране, Стривен и сарадници (према Balan, 2012:21) сматрају да перцепција ученика о сврси оцјењивања утиче на њихова постигнућа. Непримјерено оцјењивање има тенденцију да подстиче површне приступе учења, док иновативне методе оцјењивања ученицима омогућавају дубински приступ учењу (Ibid).

У оцјењивању математичких знања, главни проблем је како „продуктивно“ оцијенити и како користити добијене резултате. То прије свега јер, у свакодневној наставној пракси, постоји несклад између компетенција које ученици имају потребу да развију и шта се стварно оцјењује, што може усмјерити учење ученика у погрешном смјеру. Тако, професионално оцјењивање наставника Тесаро (према Grapin & Sayac, 2017) посматра као акт разлучивања и као способност да се изгради разумљивост феномена који се оцјењује, узимајући у обзир епистемолошку, техничку, социјалну, етичку и парадигматичну димензију праксе оцјењивања у настави. То, како истиче Чевалад (Ibid), даје ваљан закључак наставника о математичким знањима ученика појединачно и збирно, из података прикупљених током различитих епизода евалуације, и, истовремено, омогућава да се међусобно артикулишу различите фазе процеса учења. Још један начин којим би се могло испитати како оцјењивање служи за побољшање учења математике јесте кроз промјене перформанси током времена. Међутим, оцјењивање које се користи да би се приказала ова промјена је критично. Поставља се питање, да ли користити оцјењивање за које постоје историјски докази, чак и ако та оцјена не може да обухвати наставне садржаје који се сматрају најважнијим за учење математике? Или треба користити оцјењивање које одражава нове циљеве, али за које не постоје историјски докази који потврђују његову примјену? Проблем примјене првог начина оцјењивања јесте у томе што оно компромитује принцип садржаја. Стога се за краћи временски период предлаже ограничена употреба оцјењивања, за које постоје историјски докази, и да се спроведу мјере које на систематски начин боље одражавају нове циљеве (National Research Council, 1993). Према томе оцјењивање може побољшати учење ученика на различите начине. Оно подржава учење ученика у мјери у којој се ангажују чак и они ученици са ограниченим математичким способностима у рјешавању проблема. Ова подршка често укључује активности о којима ученици имају одређено знање и интересовање и које мотивишу ангажовање ученика. Међутим, ако је оцјењивање изван могућности ученика, чије знање заостаје за циљевима реформе, они нијесу у могућности да покажу оно што знају, и такво оцјењивање може имати негативне ефекте на учење ових ученика. У сваком случају, учешће ученика у задацима провјере знања требало би да се оцијени на основу различитих врста доказа, укључујући извјештаје наставника и извјештаје ученика (Ibid).

Све наведено упућује да је у будућности потребно проучити однос наставника према начину оцјењивања и испитати праксу оцјењивања наставника из математике. На примјер, у једном таквом пројекту, као истраживачи и предавачи, Грапа и Сајак (Grapin & Sayac, 2017) су спровели истраживање вредновања за учење и помоћ ученицима да боље уче математику. Резултати овог истраживања указују да модификације наставних планова и програма, као и институција, подстичу наставнике математике на вредновање компетенција, а не само знања. Слично овоме, како Блек и Вилиам (Black & Wiliam, 1998) наводе, потребно је вредновање математичких постигнућа ученика са акцентом на даљи развој знања, при чему се јавља неизоставна потреба за професионалним унапређивањем праксе оцјењивања наставника. Пружање стручних знања, у оцјењивању математичких постигнућа ученика, наставницима помаже да прикупе што више информација о знању ученика, њиховом разумијевању и вјештинама рјешавања постављених задатака. На основу ових сазнања настава математике се прилагођава потребама ученика, што би заузврат требало да доведе до развоја математичких знања ученика. Дакле, професионално оцјењивање наставника је однос математичког и дидактичког знања, као и вјештине оцјењивања. Оно зависи од појединачних фактора, задатог математичког курикулума, математичких знања ученика и способности рјешавања задатака, увјерења ученика о учењу и оцјењивању, као и од професионалних и личних искустава наставника у креирању задатака и од примијењених техника оцјењивања.

Један од најважнијих фактора који доприноси квалитету оцјењивања јесте стандардизована процедура развоја процеса оцјењивања. Она обухвата све фазе процеса: планирање, дефинисање критеријума оцјењивања и одговарајућих метода и развој задатака за

оцјењивање (Глишић, Илић & Јадријевић Младар, 2013). С обзиром да смо, као полазиште планирања оцјењивања, описали сврху вредновања и истицање исхода за вредновање математичких знања, тако у наредном дијелу приказујемо врсте вредновања, одређивање критеријума, затим технике вредновања и конкретно развој задатака за вредновање математичких знања.

3.1. Врсте вредновања

У протеклих неколико деценија резултати вредновања ученичких постигнућа добијају све већу пажњу за побољшање учења (умјесто пуког давања оцјене на основу резултата оцјењивања) и за дијагностификовање тешкоћа учења (утврђивање разлога због којих су неки ученици неуспјешни у учењу). Говори се о двије опште сврхе оцјењивања, „оцјењивање наученог"−коначних ефеката учења или сумативно оцјењивање и „оцјењивање за учење" или формативно оцјењивање (Спасић, 2013).

Сумативно вредновање одређује стандард постигнућа који је постигнут у одређеном тренутку и изводи се најчешће на крају одређеног образовног периода, на крају одређене наставне цјелине, полугођа или године (Kyriacou, 1995; Nimac, 2010). Резултат сумативне функције вредновања је у форми коначне одлуке, често приказан бројем или словом, о постигнућима ученика у усвајању циљева учења, који припадају одређеном програму математике (Jones, 2012; Глишић, Илић & Јадријевић Младар, 2013). Тиме се сумативним оцјењивањем на систематски начин мјери и евидентира укупно постигнуће (Swan, 1993). Такође, оно је значајно јер се њиме доносе одлуке о давању (или ускраћивању) приступа на следећи ступањ образовања. Његови резултати се често користе у сврху селекције и стога је неопходно осигурати објективност резултата, тј. захтијева механизме квалитета у виду јасних процедура и стандарда знања. Технике које се најчешће, у основној школи, користе за прикупљање података су стандардне писмене и усмене провјере знања и тестови (стандардизовани мјерни инструменти) (Nimac, 2010; Глишић, Илић & Јадријевић Младар, 2013). Управо овај вид вредновања доминира у традиционалним школама, што резултира кампањским учењем, оријентацијом на оцјену умјесто на знање и одговарајућим приступом учења и селекцији дјеце, умјесто да их подстиче на квалитетнији рад (Nimac, 2010).

Много мање присутно у настави математике је формативно оцјењивање. Формативно оцјењивање Блек и Вилиам (Black & Wiliam, 1998) дефинишу као све оне активности наставника и/или њихових ученика које пружају повратне информације за модификацију наставног материјала и активности подучавања и учења. Исто, они указују да је оцјењивање формативно у оној мјери у којој доказе о постигнућима ученика наставници, ученици или њихови вршњаци тумаче и користе за доношење одлука у следећем кораку наставе (према Chanudet, 2017). Осим тога, на основу функције у оцјењивању, термин формативно оцјењивање користи се у различитим значењима или користи алтернативне изразе као што су повратне информације, саморегулисано учење или учење уз помоћ вршњака (Ibid). Формативно оцјењивање може се посматрати и као основни вид подршке учитеља за ангажовање и развој знања ученика (Шпијуновић & Маричић, 2015). Од учитеља се очекује да оцјеном из математике не изрази само ниво знања, умијећа, навика и способности којима ученик располаже, већ и да ученику укаже на мјере које треба предузети и кораке које треба учинити, да би се стање у том погледу мијењало на боље, и ученику омогућило да постигне успјех адекватан његовим способностима (Ibid). Тако циљ овог оцјењивања није усмјерен првенствено на описивање нивоа знања или на поређење резултата и циљева, већ на поређење резултата са различитим структурама знања које ученици морају развити да би постигли постављене циљеве. Усмјерено ка разумијевању и репрезентацији математичких знања, намјера је да се „заостане" од циљева и акценат стави на комплексна знања и вјештине које

ученици имају, а које им или омогућавају, отежавају или спречавају да постигну одређени циљ (Johansson, 1993). Никвест (према Wiliam, 2011) је развио типологије формативних оцјена: (1) слабија формативна оцјена, ученици добијају само знање о својој оцјени или оцјену, често описану као „знање о резултату“; (2) умјерена формативна оцјена, ученицима се дају информације о тачним резултатима, неким објашњењима и неким специфичним предлозима за побољшање; (3) снажна формативна оцјена, ученицима се дају информације о тачним резултатима, неким објашњењима и специфичним активностима које треба предузети у циљу побољшања.

Формативна функција оцјењивања може да се користи као показатељ напредовања ученика у току образовања. Наставник је усредсређен на начин учења, прикупља информације о постигнућима и на основу њих модификује наставу и активности у које је ученик укључен. На основу извођења задатака, наставник утврђује до ког нивоа је ученик у могућности да прикаже неки концепт или ниво знања (Глишић, Илић & Јадријевић Младар, 2013). То значи да је за оцјењивање нивоа математичког знања ученика од суштинског значаја конструисање задатака за оцјењивање, о чему ће бити више ријечи у поглављима *Критеријуми вредновања* и *Врсте задатака за вредновање*.

За ефикасно праћење развоја математичког знања ученика основна претпоставка јесте да ученик разумије који исход треба да постигне и који су критеријуми успјеха. Када наставник утврди гдје се ученик „налази“ у процесу учења, у могућности је да пружи одговарајућу повратну информацију, како би му помогао да достигне договорени циљ (Глишић, Илић & Јадријевић Младар, 2013). Наиме, оцјењивање дјелује подстицајно када ученици знају шта добро раде, а шта слабије и како могу исправити недостатке или празнине у знању, односно када знају шта се од њих очекује, шта су научили, шта треба боље научити и на који начин, тј. како ће то постићи. У том смислу концептуализацију формативног оцјењивања, Томсон, Блек и Вилиам (према Andersson, 2017) описују као једну велику идеју и пет кључних стратегија (Табела 2). Матрица приказује три процеса (хоризонтално) и три категорије учесника (вертикално) којима се конструишу 5 кључних стратегија (КС) формативног оцјењивања.

Табела 2. Однос између кључних стратегија (КС), наставних процеса и учесника у формативном оцјењивању (према Andersson, 2017:3421).

	Шта ученик може да постигне?	Гдје је ученик сада?	Како да то оствари?
Наставник	КС1 Разјаснити циљеве учења и критеријуме успјеха	КС2 Увођење ефектних дискусија и других задатака у процесу учења који доказују разумијевање ученика	КС3 Обезбјеђивање повратне информације која „води ученике напријед“
Вршњак	Схвата и размјењује циљеве учења и критеријуме успјеха	КС4 Активирати ученике, као инструктивне ресурсе једне за друге	
Ученик	Схвата циљеве учења и критеријуме успјеха	КС5 Активирати ученике као носиоце свог учења	

При овоме, важно је да ученици на вријеме добију повратну информацију о нивоу знања да би се неразумијевање отклонило, а незнање не би нагомилало. Исто тако, потребно је утврдити могућности и потребе појединца тако да ученици савладају наставни програм у складу са властитим способностима. Осим тога, наставници морају знати и колико је дјелотворан начин учења да би га унаприједили, тј. учење се темељи на ономе шта ученици

већ знају и шта могу научити, а не на очекивањима одраслих (Nimac, 2010). Технике за прикупљање података формативног вредновања су извођење практичних радова, посматрање и биљежење ученикових рада током наставе, интервју између ученика и учитеља, портфолио ученика, као и стандардне технике које се користе за сумативно вредновање. Доказано је да честа и квалитетна формативна вредновања имају за последицу квалитетнију наставу, већу мотивацију за учење и боља постигнућа ученика (Ibid).

Поред тога, формативна функција оцјењивања може да нас информише о квалитету рада наставника, ефикасности метода које примењује, наставним материјалима али и о самом програму образовања. Такође, контекст у коме се формативно оцјењивање може користити је ситуација када треба утврдити посједује ли ученик одређене предуслове, односно потребна знања, за прелазак на следећи ниво знања у оквиру програма математичког образовања. Разлог за употребу формативног оцјењивања као предуслова је то што желимо да будемо сигурни у погледу могућег даљег успјеха, или то што даље образовање или оцјењивање захтијевају одређени ниво квалитета (Глишић, Илић & Јадријевић Младар, 2013). Формативно оцјењивање је ефикасно само када се обавља у различитим контекстима, тј. када је ученику дата прилика да више пута покаже своје знање, вјештине и ставове и када је тај процес пропраћен благовременим повратним информацијама. Оцјена се онда формира на основу довољног броја информација и доказа (посматрањем извођења, одговори ученика). Када су ове претпоставке испуњене може се рећи да је оцјењивање стварно у функцији учења (Ibid).

За разлику од формативног оцјењивања, неформално оцјењивање је теже идентификовати, али се може пратити у многим приликама током наставе, кроз интеракције између наставника и ученика, на примјер, биљежењем одговора ученика (Pilet & Horoks, 2017). Осим тога, различити аспекти размишљања ученика откривају различите перспективе, не само за наставника него и за учење ученика. На примјер, наставници постепено мијењају начин пружања повратних информација ученицима. Умјесто давања само бројчаних оцјена, наставници, како Евен (према Balan, 2012) истиче, прихватају и вреднују неуобичајене одговоре ученика. Слично, Блек (Ibid) указује на важност да наставници вреднују како ученици обрађују математичке проблеме, насупрот искључивог фокусирања на коначни одговор. Шире гледано, Бутлер (Ibid) разматра о математичком учењу ученика, при чему наставници преиспитају важност пружања потпуних објашњења о интензитету и начинима побољшања учења ученика. Дакле, суштински значај оцјењивања са формативном сврхом је да подржи учење ученика. У том погледу, требало би да понуди „нијансиране“ информације о постигнућима ученика у односу на предодређене циљеве и критеријуме знања. Ово је неопходно да би се на основу идентификованих „снага“ и „слабости“ математичких знања планирао даљи развој знања.

Поред формативне и сумативне провјере математичких знања наводи се и трећи тип оцјењивања, дијагностичко оцјењивање, за провјеру предзнања ученика. Наставник, који жели да побољша рад ученика, неопходно је да има „ближу карактеризацију добрих и лоших тачака“, јер љекару који жели да побољша здравље пацијента, потребна је одговарајућа дијагноза (Polya, 1973). Овдје дијагнозу користимо као технички појам у образовању, који значи „ближа карактеризација ученикових рада“ (Jones, 2012). Наставници дијагностичко оцјењивање користе прије учења нових наставних садржаја да би утврдили шта ученици знају и шта треба да науче, и на тај начин уоче и избјегну узроке неуспјеха у даљем планирању наставе. Дакле, дијагностичка функција оцјењивања се односи на оцјењивање које се обично спроводи на почетку процеса учења. Тако се дијагностичко оцјењивање преклапа са формативним оцјењивањем, с тим што, прецизно одређује потешкоће или проблеме у учењу. Одређеним тестовима се могу одредити поједини захтјеви усвајања математичких знања ученика и повезати са посебним образовним потребама (Kyriacou, 1995). Тиме оваква врста иницијалног тестирања служи да се установе вјештине, способности, интересовања, искуства, нивои постигнућа или потешкоће појединачног ученика или читавог одјељења. На основу

добијених резултата могуће је ефикасно планирати и организовати процес учења и индивидуализовати приступ учењу (Глишић, Илић & Јадријевић Младар, 2013). Другим ријечима, наставници изграђују „мост за превазилажење основних препрека“ у повезивању постојећег знања и знања које ученици треба да постигну. Провјеравањем предзнања ученика, у току наставног процеса, анализира се тренутно постигнуће ученика и планирају даљи поступци за превазилажење узрока због којих ученици садржаје слабо познају, разумију и примјењују или их не познају, не разумију и не умију да их примијене. Према томе, заједничко за резултате дијагностичке провјере знања ученика и планираних нових наставних садржаја је проналажење инструкција за њихово међусобно усклађивање у наставној пракси.

Било за сумативне или формативне сврхе, провјера знања има дијагностичку функцију. У ствари, требало би да представља основу најбољег могућег рјешења (избор задатака, организација ситуација на часу) за развој знања ученика. Тако формативно оцјењивање укључује дијагностичку провјеру знања, за идентификовање проблема и неразумијевање ученика у учењу (Swan, 1993). Дијагностичко оцјењивање усмјерено је на проналажење грешака, потешкоћа и мањкавости у раду ученика и пружа информације и савјете како би се рад у будућности побољшао (Kyriacou, 1995). Такво оцјењивање претходи и усмјерава наставу, тј. осмишљено је углавном за побољшање успјешног учења ученика (Swan, 1993). Уз то, дијагностичко оцјењивање мора узети у обзир разлике између ученика, тј. мора бити разнолико, ако не и индивидуализовано. Илузија о праведности оцјењивања која се састоји у томе да се током цијеле године на исти начин третирају ученици, чији ниво знања није исти, је препрека правом формативном оцјењивању (Bodin, 1993). Слично, израженост сумативног оцјењивања, како Вестон (према Kyriacou, 1995) наводи, не помаже ученицима да схвате које проблеме имају и како их могу ријешити, и ученици постају пасивни примаоци оцјењивачких поступака. Дата коначна оцјена резултата, бројчана или словна, при чему су карактеристике и присутни проблеми овладавања математичким знањима скривени, умањује информативни садржај сумативног оцјењивања.

Дакле, формативно и сумативно оцјењивање су поступци који подразумијевају систематско прикупљање информација или доказа који се односе на процес учења појединца. Суштинска разлика између ове двије врсте оцјењивања лежи у тренутку када се спроводи оцјењивање. Ако се оцјењивање врши у одређеним тренуцима у току реализације програма, како би се прикупиле информације о напредовању ученика у односу на програмом прописане исходе учења и пружила одговарајућа повратна информација, тада је ријеч о формативном оцјењивању. Сумативно оцјењивање се врши по завршетку програма или неког његовог дијела, у оквиру кога су интегрисани исходи. За квалитет оцјењивања важно је осигурати равнотежу између захтјева формативног и сумативног оцјењивања. Континуирано прикупљање информација о напретку и постигнућима ученика даје могућност наставнику да преиспитује своју праксу, креира процес учења на бази сарадње, подршке и пружања смјерница. Тада ученик стиче самопоуздање у погледу својих могућности и свијест о начинима на које најефикасније учи. То директно утиче на ученикову посвећеност у учењу и на даљи развој математичких знања. Тада оцјењивање није фрустрација ни за ученике ни за наставнике већ изазов (Глишић, Илић & Јадријевић Младар, 2013).

Дијагностичко, формативно и сумативно оцјењивање коегзистирају заједно у вредновању математичких знања. Иста активност оцјењивања може послужити у дијагностичке, сумативне и формативне сврхе, односно подаци које је наставник прикупио могу се користити за оцјењивање знања ученика али и за побољшање процеса учења.

3.2. Критеријуми вредновања

У снажном контрасту са конвенционалним сумативним оцјењивањем, гдје циљеви и критеријуми успјеха не морају увијек бити познати ученицима, транспарентни циљеви и критеријуми оцјењивања могу помоћи ученицима да се фокусирају на оно што се оцјењује. Појашњавањем критеријума и циљева учења, ученици имају прилику да стекну перцепцију различитих квалитета у свом раду и раду других (Balan, 2012). Тако, да би се резултати оцјењивања користили у формативне сврхе, потребно је помјерање од референтне норме оцјењивања према оцјењивању заснованом на критеријумима. Критеријуми вредновања математичких знања се обично заснивају на хијерархијски уређеним исходима учења. За последицу, умјесто рангирања ученика, имамо доказе о одређеним вјештинама и способностима учења, односно оцјену у облику профила постигнућа, тј. нивоа математичких знања (Swan, 1993).

При оцјењивању знања ученика треба имати у виду двије компоненте: обим (квантитет) и ниво (квалитет) знања (Малиновић & Малиновић Јовановић, 2002). Оцјењивањем обима знања исказује се количина знања у широком распону: од обавезног минимума елементарних знања па до дозвољеног максимума у оквиру предвиђеног програма. Дакле, утврђивање обима знања је, у ствари, утврђивање фонда знања којим ученик располаже. При оцјењивању нивоа знања по квалитету, оцјеном се исказује трајност, тачност, разумијевање, свјесност и употребљивост знања. Према квалитету, најчешће се разликују следећи нивои знања: (1) ниво препознавања (препознавање података, правила без могућности да се запишу или искажу); (2) ниво репродукције (репродуковање научених садржаја без разумијевања суштине садржаја); (3) ниво оперативног знања (примјена научених садржаја у рјешавању различитих практичних задатака); (4) ниво креативног (стваралачког) знања (примјена стечених знања у сасвим новим ситуацијама, рјешавање проблемских задатака и превођење проблемских ситуација у проблеме). Приликом оцјењивања знања ученика треба имати у виду чињеницу да су квалитет и квантитет знања, односно наведени нивои међусобно повезани и условљени, односно сваки виши ниво подразумијева претходни ниво и одређени обим знања (Ibid).

Слично, у ТИМСС истраживању основу за процјењивање знања ученика чине област и когнитивни домен. Другим ријечима, овим истраживањем, испитивање образовних постигнућа ученика је организовано у односу на двије димензије–димензију садржаја и когнитивну димензију (Станојевић & Милинковић, 2013). Димензија садржаја се односи на математичке садржаје, односно на обухваћене области математике и на теме у оквиру њих. Когнитивна димензија се односи на сазнајне захтјеве у датим задацима, у оквиру сваке области садржаја. Ријеч је о когнитивном домену, тј. сазнајним вјештинама и операцијама које се очекују од ученика приликом рјешавања задатака из одређене области садржаја. У ТИМСС истраживању су издвојена три когнитивна домена: (1) знање (познавање чињеница, појмова и процедура), (2) примјена знања, (3) закључивање (рјешавање сложених проблема) (Ibid). Према Малис и Мартин (према Марушић Јаблановић, 2017) когнитивни домен знање укључује познавање чињеница, концепата и процедура. Овим задацима од ученика се захтијева да се сјети, препозна, израчуна, измјери. Примјена подразумијева способност ученика да примјењује знање и разумијевање концепата како би се ријешио задати проблем. Такође, захтијева одређивање, примјену стратегија и генерисање одређених репрезентација. Домен резоновање подразумијева превазилажење рутинских проблема и сналажење у непознатим ситуацијама. Задацима из домена резоновања се захтијева анализа, синтеза, евалуација, долажење до закључка, генерализација и објашњавање, тј. аргументовање (Ibid). Дакле, рјешавање задатака у ТИМСС тесту захтијева мисаоне процесе различитог нивоа сложености: од познавања чињеница и примјене знања у рјешавању проблема, до разумијевања појмова и закључивања при рјешавању сложених проблема у непознатим ситуацијама, тзв. нерутинских проблема (Станојевић & Милинковић, 2013). Иако домен знање представља основ за постигнуће у оквиру друга два когнитивна домена, веома је значајно пратити постигнуће

ученика и у примјени и резоновању, јер је сврха стицања знања управо да буде примијењено, преиспитивано и интегрисано у шира знања. Задаци из домена примјене и резоновања указују на начине на које ученици користе стечена знања, превазилажењем датог и они пружају прилику ученицима са вишим когнитивним способностима да вјежбају и искажу своје способности (Марушић Јаблановић, 2017). Тиме ученик може да примијени математичка знања и когнитивне операције у различитим, релативно сложеним ситуацијама и да објасни свој начин расуђивања. На примјер, ови ученици иду даље од рјешавања рутинских проблема, умију да на основу интерпретације и приказивања података ријеше проблем који обухвата непознате ситуације, сложене контексте, као и проблеме са више „корака“ у рјешавању (Ibid).

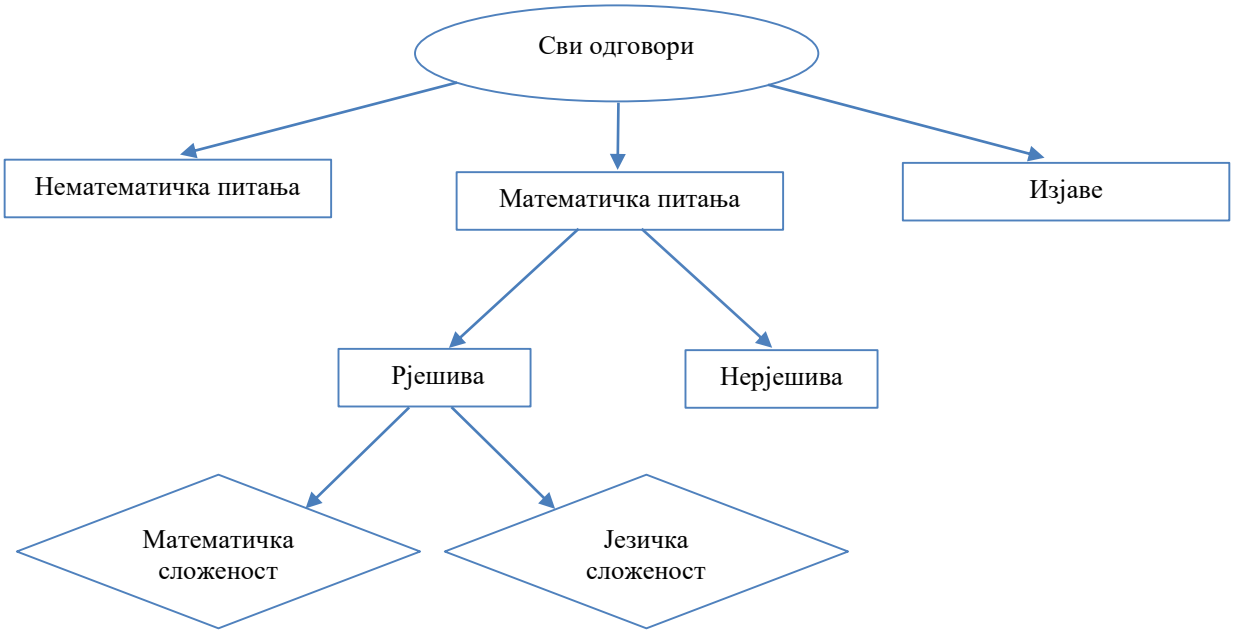
Према томе, одређивање критеријума оцјењивања спада у значајне проблеме наставе математике, јер не постоје прописана правила којима се нормира рад ученика. Такође, оцјењивање писаних радова је посебно питање (Малиновић & Малиновић Јовановић, 2002). Критеријуми за оцјењивање у писменим провјерама знања (писмени, контролни задаци, тестови) могу бити различити. Поред квалитета и квантитета, приликом оцјењивања треба узети у обзир и уредност у раду, тачност, поступак, више начина у изради једног задатка, тежину задатка, елегантност рјешења итд. (Дејић & Егерић, 2003). Како би се у резултат оцјењивања, тј. оцјену, укључиле све компоненте, пожељно је бодовање писмених провјера знања. На тај начин бодују се и дјелимично урађени задаци, односно задатке за које је потребан нижи ниво знања, потребно је бодовати са мањим бројем бодова, а сложеније са више бодова. Зависно од освојених бодова даје се и оцјена. Не постоји јединствени критеријум исказивања броја бодова преко оцјене. Препоручљиво је да се тај критеријум одреди у односу на општи успјех одјељења који се добија послије сређивања резултата писменог провјеравања. Једна од скала за претварање бодова у оцјене могла би да изгледа:

до 40 % освојених бодова	оцјена: недовољан
41%–55%	довољан (2)
56%–70%	добар (3)
71%–85%	врло добар (4)
86%–100%	одличан (5).

Дакле, критеријум за оцјењивање мора да је јасан и за ученике и за учитеља. У вези са критеријумом одређују се норме за сваку оцјену. Мада је тешко одредити коначну и завршну норму, навешћемо неке опште норме оцјењивања у настави математике. На нивоу оцјене довољан (2) налазе се ученици чији квантитет знања не прелази ниво препознавања и репродукције (дефиниција, правила, формула итд.). Ученици схватају програмске садржаје, могу да их излажу и објашњавају уз помоћ питања учитеља, могу да рјешавају најједноставније задатке, али нијесу довољно самостални у примјени стечених знања. Добар (3) добија ученик који самостално рјешава једноставније проблеме и практичне задатке, није увијек ажуран у испуњавању постављених захтјева. Ова оцјена захтијева ниво разумијевања. Врло добар (4) може добити ученик који је усвојио и савладао програм, успјешно повезује раније усвојене и нове програмске садржаје, оспособљен је за примјену стечених знања у рјешавању задатака. Оцјену четири добијају ученици који се налазе на нивоу примјене знања. Ученик који има одличну оцјену налази се на нивоу стваралачког рјешавања проблема. Постављене задатке рјешава на више начина, самостално може да саставља задатке и поставља проблеме. На овом нивоу долази до изражаја велика способност апстраховања, генерализације, интуитивно и продуктивно мишљење. Негативне оцјене се дају онда када ученици посједују нешто знања, али не разумију градиво нити умију да га изразе усмено и писмено.

Анализу одговора о проблемима које су ученици састављали, на примјер, Балка (према Silver, 1994) је усмјерио на три аспекта: флуентност, флексибилност и оригиналност. Флуентност се односи на број постављених проблема, флексибилност на број „различитих категорија“ у постављању проблема и оригиналност на то колико је риједак одговор у скупу свих одговора. Ова аналитичка шема уско је паралелна оној која се користи у многим приступима процјене креативности. Стојанова (Stoyanova, 1997) у процјени квалитета проблема који постављају ученици узима у обзир кључне карактеристике постављеног проблема, као што је математички језик, тачност, оригиналност и степен тежине.

У свом истраживању о вредновању постављања проблема ученика, Силвер и Кај (Silver & Cai, 2005) предлажу три критеријума и то: квантитет (број урађених одговора), оригиналност (креативни, неуобичајени одговор) и комплексност (језичка и математичка комплексност). То објашњавају са три нивоа аналитичке шеме (Слика 10):



Слика 10. Шема за вредновање комплексности постављања проблема ученика (Silver & Cai, 2005:133).

Шема укратко описује да вредновање постављеног проблема ученика наставник започиње класификацијом свих одговора, јер неки ученици постављају проблем који не испуњавају очекивања и који се не могу подвргнути класификацији у погледу комплексности. Одговори ученика који не одговарају опису проблема и остала нематематичка питања наставник ставља по страни и пажњу усредсређује на математичке проблеме. Даље, у низу постављених проблема наставник идентификује оне који се не могу ријешити и на крају оцјењује математички рјешиве проблеме у односу на њихову математичку и језичку комплексност (Ibid).

Од посебног значаја за овај рад је критеријум математичке комплексности. Она се може категоризовати као ниска, умјерена и висока. Ниски ниво сложености у представљању проблема може се ријешити препознавањем чињеница, односно рјешавањем у једном кораку. Проблеми са умјереном сложеношћу захтијевају више флексибилног мишљења и избора између алтернатива, укључујући размишљање, стратегије рјешавања проблема, примјену теорија или вишеструких рјешења. Проблеми високе сложености постављају захтјеве за размишљање, анализирање, генерализовање, синтезу или повезивање вишеструких рјешења (Kwek, 2015).

Међутим, постоје два главна проблема везана за критеријуме оцјењивања. Прво, да би били смислени, критеријуми морају бити специфични и детаљни. Тенденција је да критеријуми фрагментирају наставни план и програм. Најмањи захтјеви за оцјењивањем су када се појединачни елементи наставног плана и програма оцјењују изоловано. Комплексни математички задаци, међутим, укључују примјену различитих концепата и вјештина у сложеним ситуацијама. Ниво тежине таквих задатака није директно повезан са нивоима појединачних компоненти програма, тако да оцјењивање сложених задатака представља изазов и умијеће у постављању и тумачењу добијених резултата. Друго, детаљна хијерархија критеријума, умјесто пружања оквира за процјену постигнућа, често се погрешно тумачи као дефинисање редоследа усвајања математичких појмова у области која се оцјењује. Овим, критеријуми, заправо, служе да дефинишу наставни план и програм и прописују његову реализацију. Тако оцјењивање, умјесто пуког узорковања и евидентирања постигнућа, постаје метод контроле курикулума. Да бисмо илустровали проблем ниског постигнућа, претпоставимо, на примјер, да је настао постављањем виског критеријума оцјењивања у одређеној области наставних садржаја математике. Разлог за ово можда није у томе што се тиче инхерентно тешког концепта, већ једноставно због чињенице да је овај концепт занемарен у претходним наставним праксама (Swan, 1993). У том погледу, једно од могућих рјешења за отклањање наведених недостатака у одређивању критеријума вредновања, јесте да ниво развијености математичких знања у рјешавању проблема одређујемо на основу три критеријума процјене и то: „метода и израда“, „математичко образложење“ и „презентација и математички језик“ (Balan, 2012).

Основна претпоставка за ефикасно оцјењивање и праћење развоја математичких знања ученика јесте да ученици разумију циљ свог рада и да схвате шта се од њих очекује, који исход треба да постигну, што значи да ученици морају разумјети критеријуме оцјењивања. Истовремено, упознавање ученика са критеријумима и стављање у ситуацију самопроцјене или процјене знања својих вршњака, омогућава ефикаснији процес учења и лакшу адаптацију ученика на оцјењивање (Глишић, Илић & Јадријевић Младар, 2013). Критеријуми, дати у форми кључних области наставних садржаја математике и индикатора знања, играју главну улогу у испуњавању захтјева валидности и објективности оцјењивања. Поред тога, у оквиру области математичког садржаја, инструмент, тј. задатак оцјењивања мора имати јасно означене критеријуме за сваки исход. Примјеном критеријума развијених стандардном процедуром оцјењивања за сваки исход, обезбјеђује се оцјењивање нивоа знања прописаних стандардом. Тиме се омогућава да оцјењивање буде што је могуће објективније. На примјер, за будућа истраживања у вредновању математичких знања предлажу се израда матрице критеријума оцјењивања кроз исходе учења и индикаторе знања на различитим нивоима, које ученик треба да оствари (Ibid). Овим, за последицу имамо да ученици знају шта се од њих очекује да знају, као и јасан контекст и услове у којима се спроводи оцјењивање.

Дакле, на основу наведених критеријума вредновања математичког постигнућа ученика, наставници и ученици имају прилику да анализирају исходе постављених задатака, идентификују и процијене квалитет својих активности, као и ниво математичких знања ученика у рјешавању задатака. Поред тога, задати критеријуми вредновања одређују примјену одговарајућих техника вредновања, као и креирање математичких задатака намијењених за оцјењивање. Стога, у наредном дијелу представљамо технике које нам могу помоћи да прикажемо и опишемо математичко постигнуће ученика у наставном процесу.

3.3. Аутентичне технике вредновања

Значајна компонента процеса систематског вредновања у настави математике од које зависи квалитет провјере цјелокупног знања јесте избор техника вредновања. Ефикасна настава захтијева сазнање о томе шта ученици знају, а шта не знају, како ученици приступају проблемима и како реагују на наставне активности. Иако информације о оцјењивању могу да прикажу „стварну слику“ знања у настави математике, наставници често немају на располагању најрелевантније технике за спровођење оцјењивања (Ginsburg et al., 1992).

Тако су током протекле деценије „традиционални” облици оцјењивања, као што су усмена и писмена провјера знања, допуњени широким спектром алтернативних приступа осмишљених како би се превазишли неки од недостатака традиционалних облика (Глишић, Илић & Јадријевић Младар, 2013). Кулм (према Rosli, Goldsby & Capraro, 2013) истиче да се традиционалним тестовима провјеравају само математичке вјештине и процедуре рачунања. Ово оцјењивање математичких знања усмјерено је на утврђивање тачног или нетачног резултата, али не и на испитивање разумијевања математичких садржаја. Све је више признато да методе које се најчешће користе за провјеру знања ученика из математике имају знатно изражен негативан утицај на смислено учење (Goldin, 1992). Стога је у настави математике неопходна употреба аутентичних техника и инструмената за оцјењивање вјештина рјешавања проблема и постављања проблема, као и нивоа развоја математичких знања (Rosli, Goldsby & Capraro, 2013). Ове алтернативне форме оцјењивања експлицитно се креирају како би одговориле на захтјеве да оцјењивање буде валидно и поуздано, као и да понуде аутентичнија искуства оцјењивања ученику, тј. ситуације из реалног радног окружења (Глишић, Илић & Јадријевић Младар, 2013). Наиме, потребне су аутентичне математичке активности које су смислене и важне саме по себи. То нијесу само активности важне у ситуацијама стварног живота, већ, у цјелини, захтијевају примјену таквих знања и способности ученика који одражавају постављене циљеве, у области која се изучава (Lesh & Lamon, 1992).

Да би приказао претпоставке о знањима из математике, Ромберг (Romberg, 1993) упоређује три начина вредновања математичких знања. Први приступ вредновања укључује стандардизовани тест, заснован на бихевиоризму, и претпоставља да ученик познаје изоловане дјелове знања. Такав тест тражи од ученика да одговори на више питања о одређеним областима математике. Добијени резултати се обрађују сабирањем броја тачних одговора како би се показао обим математичких знања која ученик посједује и укупне вриједности појединачног ученика се упоређују са другим ученицима. Други уобичајени облик организовања ситуација за провјеру знања, оцјењивање засновано на критеријумима, такође, заснива се на бихевиоризму. Међутим, од ученика се тражи да одговоре на одређене групе питања из одговарајућих области математике како би се могао оцијенити ниво усвајања појединачних области математике. Тиме се за сваког ученика добија „профил“ знања из одређених области математике. Проблем оба приступа је у томе што ниједан не даје информације о међусобним односима између усвојених области математике, односно о структури шеме усвојених знања. Такође, ниједан приступ не открива ништа о промјени те шеме. Трећи облик оцјењивања, аутентично оцјењивање знања, засновано на конструктивистичким схватањима, почиње сложеним задацима на којима се од ученика очекује да раде у одређеном временском периоду. Такође, њихови одговори нијесу само одговори, већ аргументи који описују претпоставке, стратегије и доказивања. Ово даје за сваког ученика „слику“ структуре шеме цјелокупног знања. Аутентично оцјењивање може приказати ниво постигнућа ученика у способности рјешавања нерутинских проблема, комуникацијским вјештинама, закључивању, као и способностима примјене математичких знања на различите повезане проблемске ситуације (Ibid). Према Кулму (према Rosli, Goldsby & Capraro, 2013), аутентично оцјењивање пружа бољи начин провјере математичких знања ученика кроз више различито формулисаних задатака и различите приступе. Тако, овим,

наставници могу да оцијене (не)разумијевање математичких концепата изван оквира традиционалних тестова (Ibid).

Технике вредновања знања у настави математике, које су Гинсбург и колеге (Ginsburg et al., 1992) описали укључују стандардне тестове, систем сонди и процедуре клиничког интервјуа. При том, наводе да постоји релативно мало стандардних тестова из математике који покушавају да „измјере“ сложеност разумијевања. Имамо да оцјењивањем и даље доминирају стандардни тестови усмјерени на учење напамет и механичку употребу процедура (Ginsburg, Jacobs & Lopez, 1993). Уопште, у наставној пракси, али и теорији, Милинковић (Милинковић, 1998) наводи да се тестови сматрају поузданим извором информација о знању ученика, било да се ради о стандардним тестовима, којима се врши класификација (рангирање) ученика у одјељењу или о тестовима који се заснивају на критеријумима, који утврђују знање ученика, поредећи његово достигнуће са унапријед утврђеним стандардом и којима се верификује класификација. Међутим, они су неадекватни за откривање онога што наставник највише треба да разумије да би планирао наставу: ученикове мисаоне процесе и стратегије, и способности учења математике (Ginsburg, Jacobs & Lopez, 1993).

Дакле, стандардни тест може открити да је ученик релативно „слаб“ у рачунању и релативно „јак“ у концептима. Тако стандардни тестови овог типа не дају много корисних информација о различитим стратегијама које ученици користе за рјешавање проблема, не откривају да ли је нетачан одговор само резултат погрешно схваћеног питања и пружају мало корисних информација о повезаности између различитих аспеката знања. Осим тога, већина тестова за оцјењивање математичког размишљања није заснована на теорији развоја математичког знања (Ginsburg et al., 1992). Када је ријеч о оцјењивању постигнућа ученика у рјешавању математичких задатака, уобичајени поступак наставника математике је идентификовање прелазних корака у оствареном рјешењу задатка (Reit, 2017). На основу те провјере поставља се шема која одређује услове које треба испунити за диференцирано бодовање тих прелазних корака. Стога постоји процедурална разлика између фаза идентификовања доступних аспеката рјешавања и шеме оцјењивања. Прво је услов за друго. Ријеч је о употреби такозваних мисаоних структура за идентификовање потешкоћа прелазних корака у рјешењима постављених задатака. У својим истраживањима Реит (Ibid) показује да постоји мјерљив утицај структуралних карактеристика постављеног задатка на „тежину“ његовог рјешавања, односно, долазимо до закључка да сложеност постављеног задатка, такође, у великој мјери, утиче на начин његовог оцјењивања.

Поред стандардизованих тестова најчешће се користе нестандардизовани, познати као низови задатака објективног типа. Те тестове, на основу свог искуства, креирају сами учитељи. Ови тестови нијесу посебно провјеравани и није им статистички одређен стандард. Бројчана оцјена се одређује на основу освојеног броја бодова (Дејић & Егерић, 2003). Наше је мишљење да је повремено коришћење тестова корисно, али они не одражавају све квалитете ученика и његове способности у области математике (Милинковић, 1998:5). Сходно томе, Гинсбург и Бароди (према Ginsburg et al., 1992) су развили тест који испитује различите аспекте неформалног и формалног математичког знања код дјеце од предшколског узраста до приближно трећег разреда – тест раних математичких способности или ТЕМА. Овим тестом представљају се проблеми који укључују конкретне објекте, као и написане проблеме. Поред наведеног, паралелно са тестом ТЕМА, за испитивање стратегија и концепата који леже у основи дјечјих одговора, посебно у случају уочавања грешака, Гинсбург (према Ginsburg et al., 1992) је приказао структурирану процедуру оцјењивања. У питању је организован систем сонди чија је сврха: (1), утврдити да ли је дијете разумјело задато питање; (2) идентификовати стратегије и процесе рјешавања проблема које дијете користи; (3) утврдити способности за учење, да ли дијете може да научи релевантно градиво са минимумом подучавања или је потребно садржајније подучавање. Сонде описаног типа могу бити корисна допуна сваком стандардизованом тесту из математике. Тако информације добијене помоћу сонди могу бити

први корак у добијању „детаљније слике“ о разумијевању математичких садржаја. Систематске сонде су, међутим, ограничене у флексибилности и квалитету информација. У том случају, клинички интервју је ефикаснија, али далеко „осјетљивија“ и комплекснија процедура вредновања.

Клинички интервју укључује флексибилно испитивање, креирано да открије основне карактеристике мишљења и разумијевања ученика. Метод клиничког интервјуа се назива и „флексибилно интервјуисање“, за које се вјерује да је најинформативнија и најтежа техника за оцјењивање математичког мишљења (Ginsburg, Jacobs & Lopez, 1993). Провјеравање знања током клиничког интервјуа зависи од одговора ученика и тиме они варирају у континуитету структуре, неки су више планирани од других. У зависности од претходних одговора, питања и задаци се преформулишу или изнова постављају. Стога је техника клиничког интервјуа нестандардизована (Ginsburg et al., 1992). Такође, током клиничког интервјуа често се захтијевају процедуре самоизвјештавања. Највише се користе у облику размишљања наглас и ретроспективних извештаја. Током рјешавања проблема обично се од ученика тражи да „размишља наглас” или „наглас прича”. Кроз ову вербализацију могу се добити значајне информације о процесима мишљења ученика (Ginsburg, Jacobs & Lopez, 1993). Из интервјуа можемо сазнати не само ниво размишљања, већ и важна увјерења ученика о властитим способностима учења математике (Ibid). Осим тога, за идентификовање проблема у учењу математике, прије него што постану озбиљни, користе се скрининг инструменти. За ту сврху вредновања, креирају се задаци којима се оцјењује (не)разумијевање процедура и, истовремено, пружа што је могуће више увида у процесе и стратегије које ученици користе (Ginsburg et al., 1992).

У многим аутентичним провјерама знања кључна компонента је рубрика постигнућа. Ако желимо да развијамо знања и способности учења математике, Бел, Буркхарт и Сван (Bell, Burkhardt & Swan, 1992a) предлажу креирање шеме оцјењивања помоћу које се приказују следећа знања и вјештине: (1) тумачење математичке репрезентације помоћу ријечи или слика, (2) превођење ријечи или слика у математичке репрезентације, (3) превођење између математичких репрезентација, (4) описивање функционалних односа помоћу ријечи или слика, (5) комбиновање информација представљених на различите начине и извођење закључака гдје је то прикладно, (6) коришћење математичких репрезентација за рјешавање проблема који произилазе из реалних ситуација и (7) описивање или објашњење коришћених метода и добијених резултата. У том погледу, аутори (Bell, Burkhardt & Swan, 1992b) описују општу рубрику бодовања за отворена питања. Овом рубриком прво је потребно сортирати радове у три групе: добри одговори (5 или 6 поена), адекватни одговори (3 или 4 поена) и неадекватни одговори (1 или 0 поена). Сваку од ове три групе одговора можемо поново сортирати у двије групе и додијелити им одређене вриједности поена. При том, за појединачна отворена/затворена питања, рубрика треба да буде креирана тако да одражава специфичне елементе тог проблема. Овдје, ради навођења примјера, наводимо општу рубрику којом су описани нивои компетенција рјешавања проблема. За прву групу одговора, *приказивање компетенција* укључени су следећи нивои одговора:

- Примјеран одговор (ниво 6) – ученик даје потпун одговор са јасним, кохерентним, недвосмисленим и елегантним објашњењем; укључује јасан и поједностављен дијаграм; показује разумијевање математичких концепата и процеса рјешавања отвореног проблема; идентификује све битне елементе проблема; може укључити примјере и противпримјере; представља адекватне аргументе.
- Компетентан одговор (ниво 5) – ученик даје прилично потпун одговор са јасним објашњењем; може укључити одговарајући дијаграм; показује разумијевање математичких концепата и процеса рјешавања проблема; идентификује најважније елементе проблема; представља поткрепљујуће аргументе.

Другу група одговора – *задовољавајући одговор* описују следећи нивои одговора:

- Мањи недостаци, али задовољавајући одговор (ниво 4) – ученик разумије и користи основне математичке концепте и рјешава проблем на задовољавајући начин, али објашњење може бити нејасно; аргументација може бити непотпуна; дијаграм може бити неприкладан или нејасан.
- Озбиљни недостаци, али скоро задовољавајући одговор (ниво 3) – ученик започиње проблем на одговарајући начин, али не успијева до краја да ријеши проблем или изоставља значајне дјелове проблема; не показује потпуно разумијевање математичких концепата и процеса рјешавања; прави велике грешке у рачунању; погрешно користити математичке термине; одговор садржи неодговарајућу стратегију за рјешавање проблема.

Трећа група одговора – *неадекватан одговор* се односи на следеће одговоре:

- Започето, али није успјешно завршено рјешавање проблема (ниво 2) – ученик започиње, али не успијева да ријеши проблем; објашњење није разумљиво; дијаграм је нејасан; не показује разумијевање проблемске ситуације; прави велике рачунске грешке.
- Није могуће тачно започети рјешавање проблема (ниво 1) – ученик не може тачно да започне рјешавање проблема; понавља дјелове проблема, али без покушаја рјешавања; не наводи информације које одговарају проблему; цртежи погрешно приказују проблемску ситуацију;.
- Без покушаја рјешавања проблема (ниво 0) (Ibid).

Дакле, процедуре бодовања засноване на рубрици користе се као мјера за оцјењивање математичких концепата, способности процеса рјешавања проблема и склоности ученика према математици, а не само за одређивање процента тачних одговора. Тиме рубрике могу оцјењивати вјештине мишљења, учениково разумијевање и могућности за примјену знања у математичким задацима (Hunjek, 2015). Рубрика може бити једнодимензионална или вишедимензионална табела критеријума постављених на неколико нивоа. Нивои критеријума, којима се мјери квалитет оствареног, варирају, од 1 до 4, од 0 до 3 или од 1 до 6. Скала од 1 до 4 најчешће се користи јер је довољно уска па не оптерећује ученике, а даје широк распон описа квалитета. Скала од 0 до 3 се користи када 0 приказује нетачан одговор или уопште да нема одговора. Шире скале, од 1 до 6 користе се када постоји прилика за шири распон нивоа одговора ученика. Постоје два типа рубрика: аналитичка и холистичка. Аналитичка рубрика подразумијева више критеријума и анализу нивоа остварености сваког од њих, тј. аналитичке рубрике су вишедимензионалне (Ibid). Веома често се користе у оцјењивању и оне укључују употребу скале за додјељивање бодова одређеним фазама процеса математичког рјешавања проблема (Jones, 2012). Холистичка рубрика описује за сваки ниво цјелокупно очекивано постигнуће ученика без аналитичке разраде, тј. оне су једнодимензионалне (Hunjek, 2015). Ефикасније и доследније су у оцјењивању, јер се фокусирају на цјелокупно рјешење задатка и за описивање постигнућа ученика дају један број. На примјер, рубрика са четири нивоа омогућава наставнику да брзо сортира радове. Они којима је потребна мала ревизија могу се ставити на једну хрпу, а они којима је потребна опсежнија ревизија на другу хрпу. Рубрика за оцјењивање активности рјешавања проблема обухвата следеће нивое: 4 (одличан) – потпуно рјешење, задатак је завршен и тачан; 3 (искусан) − значајно постигнуће, задатак је завршен, али може имати мањих грешака, или, може бити без грешака, али објашњење није потпуно јасно; 2 (маргиналан) − дјелимично постигнуће, задатак је започет, али није довршен или је погрешно довршен; 1 (незадовољавајући) – низак ниво постигнућа, одговор недостаје или је нетачан и није повезан са проблемом (Jones, 2012). Аналитичке рубрике се више користе за формативно вредновање јер су креиране као алат за приказивање развоја сазнајних вјештина

и операција рјешавања, док су холистичке рубрике сумативног карактера, те се најчешће користе за вредновање ученикових рада на крају процеса учења (Hunjek, 2015).

Поред наведених, Кулм (према Rosli, Goldsby & Capraro, 2013) наводи примјер анахолистике рубрике која је комбинација аналитичке и холистичке рубрике. Она је одговарајућа техника за вредновање рјешавања проблема и постављања проблема. Заснива се на неколико критеријума који обухватају свеукупна концептуална и процедурална знања ученика. При том, приступ оцјењивања рјешења математичког задатка се састоји од бодовања сваког постављеног критеријума да би укупан број бодова представљао индикатор постигнућа. Једна од таквих рубрика за бодовање је аналитичка скала за вредновање успјеха ученика у рјешавању проблема (Табела 3) коју су развили Чарлс, Лестер и Дафер (према Rosli, Goldsby & Capraro, 2013).

Табела 3. Аналитичка скала за бодовање коју су развили Чарлс, Лестер и Дафер (према Rosli, Goldsby & Capraro, 2013:57).

Разумијевање проблема	· 2	Потпуно разумијевање проблема
	· 1	Дио проблема погрешно схваћен или погрешно протумачен
	· 0	Потпуно неразумијевање проблема
Планирање рјешења	· 2	План доводи до исправног рјешења ако се правилно примијени
	· 1	Дјелимично тачан план заснован на томе да је дио проблема тачно схваћен
	· 0	Без покушаја или потпуно неприкладан план
Добијање одговора	· 2	Тачан одговор
	· 1	Грешка при преписивању; рачунска грешка; дјелимичан одговор за задатак са више одговора
	· 0	Без одговора или погрешан одговор на основу неодговарајућег плана

За јасније и прецизније оцјењивање математичких процеса при рјешавању проблемских задатака користе се холистичке рубрике. У широј примјени је тродимензионална холистичка рубрика са четири нивоа. Њене димензије су: математичко знање, стратешко знање и образложење.

- Димензија математичко занање одговара на питање *Зна ли ученик да ријеши задатак?* Подразумијева знање математичких концепата, принципа и поступака који воде тачном рјешавању проблемског задатка.
- Димензија стратешко знање одговара на питање *Како ученик планира да ријеши задатак?* Она укључује препознавање и примјену стратегија рјешавања проблемског задатка.
- Димензија образложење одговара на питање *Може ли ученик да објасни свој поступак рјешавања?* То представља писано образложење плана и фаза процеса рјешавања проблемског задатка, при чему је потребно аргументовано образложити сваку фазу рјешавања. Иако су важни, дужина одговора, правопис и граматика нијесу пресудни елементи ове димензије (Hunjek, 2015).

За квалитативно оцјењивање појединачних проблемских задатака Балан (Balan, 2012) предлаже употребу „мини рубрике“. Умјесто бодовања задатка, наставник биљежи да ли је

рјешење ученика приказано, образложењем које одговара за први ниво Г−прошао или за други ниво В−добро урађено. На овај начин ученик добија диференцирану оцјену о његовим способностима рјешавања проблема и о томе шта је потребно побољшати. На примјер задатак чије се рјешење оцјењује помоћу „мини рубрике“ (Слика 11):

Претпоставимо да је квадрат странице *a* cm пресјечен дуж дијагонала и од три дијела да је састављена пирамида. Нацртај слику и одреди висину.

Г1	В1 В5	М1	Рјешавање проблема
Г2	В2	М3	Образложење
Г3	В4	М1	Рачун
Г4	В3	М2 М4	Интерпретација

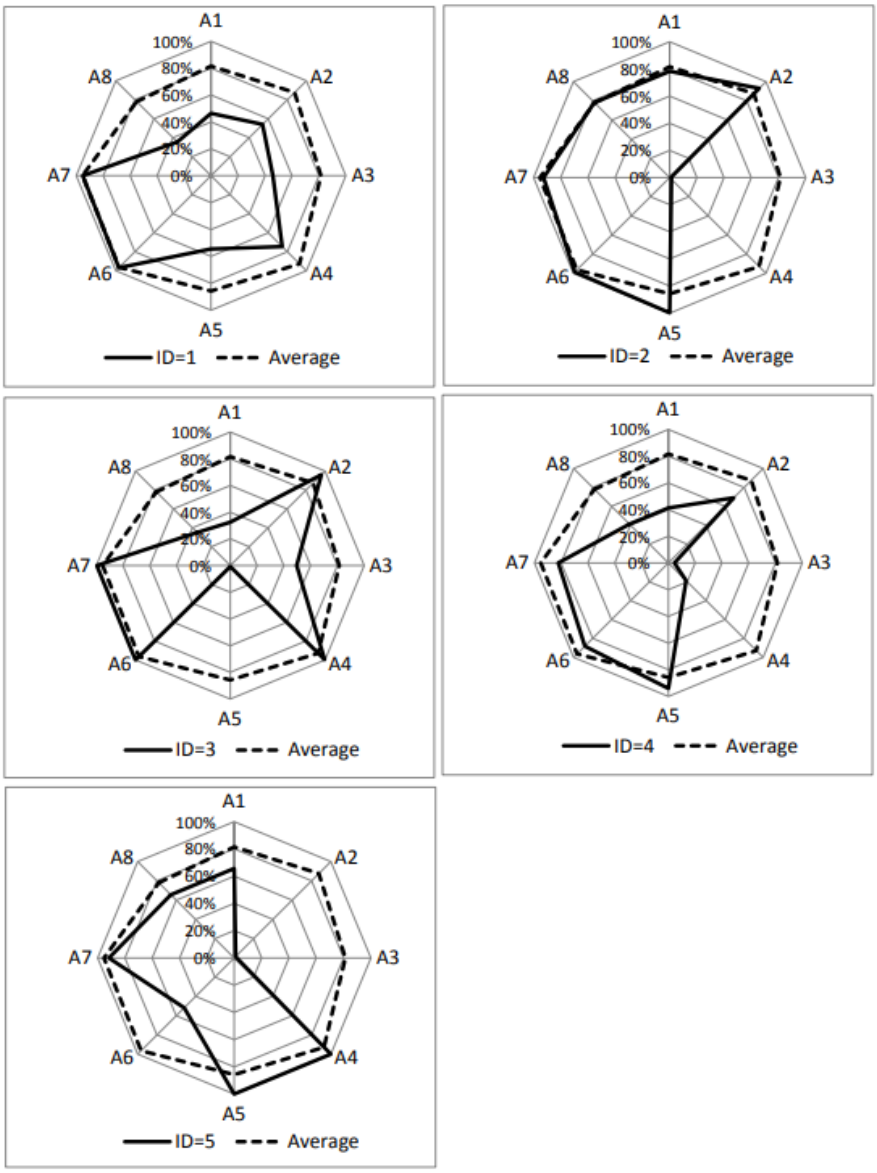
Слика 11. Примјер задатка који се оцјењује употребом „мини рубрике“ (Ibid:73).

Праћење постигнућа ученика употребом „мини рубрике“ добијају се информације о учинку појединачног ученика, односно о његовом успјеху, способностима рјешавања проблема, али, и, са којим дјеловима курикулума ученици имају потешкоћа и због чега им је потребна додатна пажња, за разлику од типичног начина оцјењивања, који показује једино информацију о укупном броју бодова, тј. оцјени. Исто, Балан (Ibid), предлаже бодовну табелу, као инструмент за оцјењивање квалитативног знања, у којој су јасно формулисани критеријуми садржаја којима ученици треба да овладају и сваки критеријум је описан са неколико стандарда знања. Овако се добијају „нијансиране информације“ о различитим компетенцијама које су ученици развили током рјешавања проблема. Ријеч је о информацијама које обухватају различите димензије процеса рјешавања проблема, и, као такве, могу се користити за анализу и извођење закључака о промјенама у математичким постигнућима ученика.

Дакле, бодовна табела пружа могућност да ученици прошире активности рјешавања проблема, не само давање одговора, већ да усмјере пажњу на разумијевање процеса рјешавања. У комбинацији са вршњачком процјеном и самопроцјеном бодовна табела помаже ученицима да схвате своје могућности, они постају нешто више самокритичнији и самосвјеснији. С тим у вези, за развој критичког мишљења и виших нивоа знања, Спасић (Спасић, 2013) наводи средства и технике формативне процјене, самопроцјену и вршњачку процјену. Самооцјењивање и самоевалуација су технике које ученици могу да користе у настојању да временом побољшају квалитет свог рада и учења. Вршњачком процјеном ученици оцјењују постигнуће вршњака, давањем оцјена или квалитативно, писменом или усменом повратном информацијом (Balan, 2012). Такође, Викермен (према Balan, 2012), показује да вршњачка процјена помаже ученицима да структурирају свој рад, као и да постају активнији, ангажованији и независнији ученици. Овим приступом инсистира се на укључивање ученика у рјешавање задатака и дискусије, односно на активностима којима примарни циљ није одговор већ размишљање о начину добијања одговора.

Поред наведених техника вредновања, наставници могу добити дијагностичке информације о нивоу знања за појединачне ученике примјеном когнитивно дијагностичке процјене. Овај вид вредновања знања представљају Сан и Сузуки (Sun & Suzuki, 2013) и осмишљен је тако да идентификује специфичне структуре знања и вјештине рјешавања задатака код ученика у основној школи. Осим тога, пружа ефикасне повратне информације, концептуализоване као информације добијене оцјењивањем различитих аспеката постигнућа.

Когнитивна дијагностичка процјена комбинује теорије знања са статистичким моделима који имају за циљ да прикажу овладавање такозваним „атрибутима“: „знање“, „когнитивни процеси“, и „вјештине“ или „стратегије“ ученика у одређеном домену. Кроз прецизно дијагностичко извјештавање о индивидуалним профилима овладавања атрибутима пружају се детаљније информације о томе да ли је или није, или у којој мјери је ученик савладао сваки из групе посебно дефинисаних атрибута. Ови атрибути су управо оно што утиче на постигнуће ученика и његово разумијевање и на шта наставници треба да обрате пажњу да би помогли овладавање наведеним атрибутима. Добијени индивидуални профили овладавања атрибутима показују разлике у нивоима постигнућа и за ученике који имају исте резултате теста. То се лако уочава радарским графиконима за вјероватноће овладавања атрибутима(А1 разумијевање појма разломка; А2 мијењање репрезентације разломка; А3 свођење на заједнички именилац; А4 свођење на најмањи именилац; А5 сабирање и одузимање разломака са истим имениоцем; А6 множење разломака; А7 дијељење разломака; А8 долажење до разломка на основу текста) приказане на слици (Слика 12). Јасно је да ученици чак и са потпуно истим резултатима теста имају различите профиле овладаности атрибутима.



Слика 12: Радарски графикони вјероватноће овладавања атрибута за пет ученика (Sun & Suzuki, 2013:608).

Ниво овладавања наведених атрибута, за сваког појединачног ученика, наставницима пружа детаљне информације о нивоу знања сваког ученика. На тој основи они планирају наставу тако да ученицима, појединачно, дају одговарајуће смјернице за будући рад. Поред тога, овом техником се могу приказати профили овладавања групним атрибутима, односно класификовати ученике у групе са различитим „типовима профила“. Категоризација ученика на основу нивоа знања чини јаснијим и лакшим разумијевање ситуације о цијелом одјељењу, односно разумијевање разреда у цјелини како би се наставни садржаји и активности прилагодили групној настави.

До данас, многи научници су користили неколико различитих оквира за процјену разумијевања у постављању проблема ученика. На примјер, у истраживању о оцјењивању постављања проблема ученика, Силвер и Кај (Silver & Cai, 2005) су предложили три критеријума који се односе на квантитет, оригиналност и комплексност постављених проблема. Ови критеријуми су били слични класификацији проблема, коју је предложио Балка (према Silver, 1994): флуентност, флексибилност и оригиналност. Међутим, у овим истраживањима није било посебних бодовања резултата за сваки од постављених проблема. Умјесто тога, за оцјењивање задатака уопште, ови истраживачи су користили дескриптивну статистику, као што су фреквенције и проценти. Они су само класификовали различите врсте проблема, постављених у сличне категорије, и немају холистичку рубрику бодовања. Тако да остаје још много неријешених питања за свеобухватније оцјењивање постављања проблема, које може ефикасно да „измјери“ опсег математичких способности ученика за самостално постављање проблема.

Милинковић (Милинковић, 2013) упућује да су технике праћења напретка ученика један од битних фактора успјешне реализације програма. Она наводи основне облике провјеравања: (1) писмено, (2) усмено и (3) практично. У аутентичне технике оцјењивања убраја различите активности као што су: (а) посматрање (самосталног рада ученика као и интеракције у току тимског рада); (б) праћење интеракције (тражећи потврду разумијевања и умијећа објашњавања вршњацима и учитељу) и (в) оцјена „продуката“ (резултата учешћа у квизовима, играма, такмичењима и сл.) (Ibid). Учитељи и наставници математике се у настави ослањају скоро искључиво на писмене провјере, понекад испитујући усмено, а не разматрајући могућност практичне провјере знања (Ibid). Исто, у настави математике се мало пажње поклања тимском раду, дискусијама у образлагању добијених рјешења и самим тим имамо и ријетко организовање квиза знања. Поред наведеног, у избору техника формативног вредновања, на примјер Џонс (Jones, 2012) посебно истиче важност задавања домаћих задатака, тако да ученици имају прилику да вјежбају нове вјештине и рјешавају проблеме о којима је потребно више времена да размисле.

Дакле, један од начина за сазнавање различитих аспеката размишљања ученика је укључивање ученика у задатке, дискусије и/или активности, у којима примарни циљ није одговор, већ размишљање шта стоји иза одговора, чиме се истовремено откривају различите перспективе које се односе не само на наставника него и на ученике (Balan, 2012). Кузи, Морсели и Сабена (Cusi, Morselli, & Sabena, 2017) сматрају да дискусија писмених одговора ученика, приказана уз помоћ информационих технологија, може послужити анализи ученичких постигнућа. Наставник прво прави избор писмених одговора ученика и има за циљ да истакне: (а) типичне грешке; (б) ефикасне начине рјешавања задатака; (в) упоређивање различитих начина образложења одговора. Анализом и упоређивањем различитих писмених одговора ученика долази се до појашњења критеријума успјеха. Они истичу да је могуће креирање анкете на лицу мјеста како би се провјерило разумијевање ученика или њихова свијест о ономе што су показали током активности или њихов став према активности (Ibid).

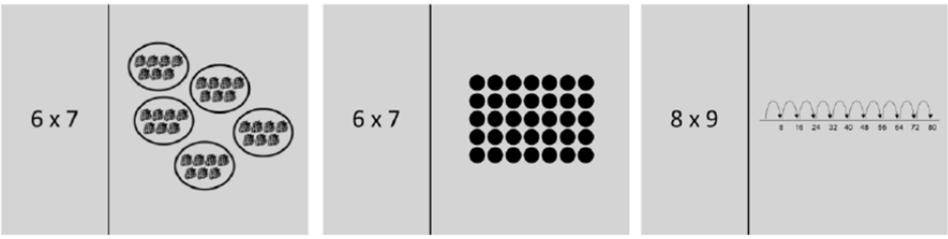
Преглед репрезентативне литературе о вредновању математичких постигнућа показује да стручњаци могу препознати примјере концептуалног разумијевања, али наилазе на

проблеме када осмишљавају свеобухватне, поуздане начине оцјењивања. Одабир инструмената за оцјењивање концептуалног разумијевања зависи од избора садржаја. И одсуство таквих инструмената за већину математичких тема представља препреку за овај вид оцјењивања. На примјер, Бисон (према Davies, 2017) истиче да је компаративна процјена валидна мјера појмовног разумијевања. Исто, Полит (Pollit, 2012) образлаже да примјеном компаративне процјене креатори тестова су много слободнији да користе било који формат задатка, за који мисле да ће извући најбоље доказе о особини коју испитују.

За проучавање „тешко доступних“ конструката у настави математике, као што су разумијевање и размишљање ученика, Бармби (Barmby, 2019) описује резултате следећих иновативних техника вредновања, примијењених у експерименталним условима ван редовне наставе. Контекст овог истраживања чини:

- Истраживање праћења очију,
- Компаративна процјена и
- Истраживање засновано на дизајну.

Истраживање које је изведено помоћу система праћења очију, Бармби (Ibid) спроводи са ученицима, узраста 9 и 10 година, на сјевероистоку Енглеске. Циљ ове студије био је забиљежити визуелну пажњу ученика у различитим репрезентацијама операције множења. Коришћене су три различите врсте визуелних репрезентација: „групе“ (скупови јагода), низови и бројевна права (Слика 13).



Слика 13. Дјецу су питали да ли се „слика“ подудара са прорачуном у сваком понуђеном случају (Ibid:18).

За прикупљање података коришћен је стоно монтирани видео−трагач за рефлексију рожњаче, који је повезан са системом за преносиви рачунар. Систем је прикупио и квантитативне и квалитативне податке. Квантитативни подаци које је прикупио трагач за очи и забиљежио софтвер били су вријеме које је ученик провео на сваком слајду репрезентације, и такође, пропорција времена на сваком подручју наведеном унутар сваке репрезентације. Поред тога, квалитативна анализа видео снимака, путање погледа сваког ученика током приказивања различитих репрезентација множења, показује колико перцепција визуелне репрезентације утиче на њено разумијевање и, коначно, на добијање одговора. Резултати показују да је један од разлога нетачног одговора за примјере са бројевном правом био тај што су ученици брзо одредили резултат на бројевној правој. За репрезентације скупа јагода, неки ученици су пребројали елементе једног скупа, а затим број скупова, други су пребројали сваки елемент свих скупова, док, у примјеру низа неки ученици су једноставно пребројали број редова и колона, други су пребројавали све елементе.

Други, посебно занимљив и поуздан иновативни метод за вредновање отворених одговора је компаративна процјена (Ibid). Овај приступ је користан у настави математике, гдје се умјесто тачних или нетачних одговора, могу оцијенити отворенији конструкти, као што су разумијевање ученика из математике или приступи рјешавању проблема. Упоредна процјена је поступак у којем наставници упоређују парове одговора ученика и одлучују који је бољи.

Након низа поређења парова, добијају се збирни подаци процјена за све ученике. Подаци се статистички обрађују и одговори се постављају на скалу релативног квалитета. Истраживања су показала да је поступак поуздан као и да је сваки рад прегледан два пута независно од стране два наставника, чиме се обезбјеђује објективније давање оцјене. Поред квантитативног бодовања, изводи се и квалитативна анализа одговора. Заправо, за анализу добијених одговора, својства сваког одговора су идентификована и комбинована у понуђеним карактеристикама одговора. Увид у дијагностичке информације и анализа односа понуђених одговора, наставницима може послужити за назнаку следећих корака у развоју учениковог разумијевања (Ibid). На примјер, у рјешавању задатака са разломцима:

1. Од једноцифреног броја А, изброј још 5 бројева. Број до којег си дошао је двоцифрени број БЦ. Које бројеве могу представљати слова А, Б и Ц?
2. За рачунање 38·42 пронађи три различита начина израчунавања. Покушај и буди прецизан са различитим начинима рачунања.
3. Нови ученик поред тебе не зна шта је множење. Како би му објаснио множење? Ако желиш можеш користити слике.
4. Имаш четири броја: 3, 4, 5 и 6. Коришћењем два броја, објасни како би добио најмањи могући разломак (на примјер, можеш да објасниш добијање $\frac{3}{5}$.) (Ibid:22),

резултујућа табела (Табела 4) приказује својства одговора за 10 ученика.

Табела 4. Анализа одговора о разломцима (Ibid:22).

Број описа	Нема повезаног одговора	Нетачан одговор	Дјелимично објашњење	Тачан одговор	Дато објашњење	Еквивалентни разломци	Алтернативне репрезентације	Примјена процента
#1	✓							
#2	✓							
#3		✓						
#4		✓						
#5		✓	✓					
#6				✓	✓			
#7		✓				✓		
#8				✓			✓	
#9				✓			✓	
#10				✓				✓

Бисон и сарадници (Bisson et al., 2016) вјерују да компаративна процјена има пресудан утицај у креирању и потврђивању инструмената вредновања. Они у истраживању о разумијевању алгебре, на млађем школском узрасту, заснованом на компаративној процјени, показују изводљивост отворених питања за концептуално разумијевање алгебре. Даље, доказују основни принцип компаративне процјене, којим се добијају поуздани исходи процјене, иако је процес заснован на „субјективним“ процјенама. Наиме, услов поузданости, у смислу да процјена исхода ученика не зависи од онога ко је процијенио одговор ученика, може се мјерити ангажовањем оцјењивача који независно вреднују „објекте“, који се упоређују (Ibid).

У истраживању заснованом на дизајну, Бармби (Barmby, 2019) описује прилагођавање праксе и теорије у свијетлу онога што функционише у контексту. Главни циљ овог истраживања био је да се у настави математике осмисле ефикасне интервенције у професионалном развоју наставника за рјешавање проблема. Резултати истраживања показују да су ученици, током шестомјесечног периода интервенције, остварили статистички значајан

напредак у оцјени из математике и постигли веће оцјене у рјешавању проблема. Поред тога, и за наставнике су идентификовани следеће користи од интервенције:

- Већи фокус на „разумијевање проблема“;
- Већи фокус на заједничко учење;
- Већи фокус на размишљање о приступима ученика.

Такође, Бармби (Ibid) истиче да резултати овог процеса вредновања нијесу само измјерени утицаји интервенције, већ и информације о процесу интервенције, и начини како се оне могу уврстити у принципе креирања за наредни ток наставног процеса.

Значајно питање у тумачењу добијених резултата о нивоу математичких знања јесте анализа увјерења ученика о учењу, односно прикупљање информација о томе шта води ученика да реагује на одређени начин поучавања (Милинковић, 1998). То показује да су потребне методе за процјену приступа ученика према математици као наставном предмету. Исто, према Гинсбургу и колегама (Ginsburg et al., 1992) важно је знати какав однос ученик има према наставном предмету, како би се боље разумјела његова постигнућа и, конкретно, процијенило да ли и које стратегије ученик користи у рјешавању проблема.

Дакле, према наведеном, вредновање појединачног знања из конструктивистичке перспективе изграђивања знања и начина на који се оно мијења укључиће развој аутентичних стратегија вредновања. То захтијева формирање шеме о основним математичким доменима, областима математике, те развијање задатака за одговоре на дјелове сваког домена, као и на повезане математичке домене. Поред тога, развој таквих стратегија ће укључивати нове начине утврђивања ваљаности и поузданости вредновања, као и нове начине извјештавања о резултатима. Овим аутентичним процјенама се може одредити степен до којег је сваки ученик постигао у својој способности рјешавања нерутинских проблема, начина комуникације, закључивања и примјене математичких концепата на различите повезане проблемске ситуације (Romberg, 1993).

Главно питање у коришћењу алтернативних процјена тиче се закључака који се могу извући из њих. У којој се мјери резултати ученика на конкретном скупу задатака могу генерализовати на друге задатке? Одговор се проналази у потреби за широким спектром задатака којима би се „измјерили“ аспекти математичког знања. Такође, поставља се питање: Да ли алтернативно оцјењивање мјери одређени скуп вјештина и способности од значаја у оквиру домена? Ово, посебно, може представљати изазов у математици, пошто оцјењивање настоји да испуни шире циљеве. Посебно, како истраживачи користе различите формате оцјењивања и, при том, постављају задатке који захтијевају објашњење, доказивање и писани извјештај, остављају нејасним у којој мјери резултат ученика више одражава математичко знање него језичке и комуникационе вјештине. При том, поставља се питање како постићи конзистентност добијених резултата оцјењивања. То је могуће високим нивоима генерализације задатка како би се из остварених резултата на одређеном скупу задатака могли извести широки закључци о математичком развоју или компетенцији ученика. Стога се предлаже креирање широког спектра задатака за мјерење многих аспеката способности и нивоа знања који чине математичку компетенцију (National Research Council, 1993). Дакле, актуелно интересовање за проширење обима задатака за оцјењивање из математике одражава циљ математичког образовања, тј. да се ученици укључе у математичко размишљање: креативно, мотивисано, асоцијативно мишљење, о чему детаљније описујемо у наредном поглављу *Врсте задатака у вредновању*.

Такође, дубље разумијевање математичких знања није могуће „мјерити“ појединачном методом и инструментом оцјењивања, без обзира на то колико је тај поступак добро осмишљен. Иако су развијени нови облици оцјењивања, класичне форме провјере знања не би требало да буду одбачене и занемарене, посебно ако су показале своју сврсисходност у пракси.

Тиме се подржава интегрисање различитих метода оцјењивања, при чему новији облици оцјењивања могу да се користе у комбинацији са класичним методама и техникама (Глишић, Илић & Јадријевић Младар, 2013). При томе, процедуре оцјењивања у настави морају укључити технике које наставници могу да користе у уобичајеним условима како би добили информације о нивоу математичког знања ученика. Овим техникама оцјењивања наставници треба да одреде методе рјешавања проблема ученика, те да идентификују (не)разумијевање концепата и проблема, које је у основи учениковог рада и, уопште, да стекну увид у различите процесе мишљења које ученици користе у учењу математике (Ginsburg et al., 1992). С друге стране, њихово коришћење, такође, значајно утиче на ученике и трансформише начин на који се настава изводи. Такође, методе оцјењивања помажу ученицима да развију метакогнитивне вјештине које се користе за праћење, провјеру и процјену њиховог постигнућа (Ginsburg, Jacobs & Lopez, 1993).

Међутим, комплексно осмишљене али примјенљиве технике оцјењивања су још увијек недовољно развијене за оцјењивање разумијевања математичких садржаја у процесу рјешавања проблема, посебно за постављање проблема ученика. Са постављањем циљева учења који превазилазе пуку брзину и тачност рачунања, претпоставља се да би добро креиран систем за дескриптивно оцјењивање разумијевања математичких садржаја могао бити користан ресурс. Тиме наставна пракса интеграцијом традиционалног и аутентичног оцјењивања треба да развија технике оцјењивања, како би се холистички оцијенило знање ученика. Такође, будуће студије би требало да истражују сложену везу између рјешавања проблема и постављања проблема, те да на основу ових активности, у цјелини, пронађу аутентичне начине вредновања.

3.4. Врсте задатака у вредновању

Задаци оцјењивања у традиционалне сврхе служили су, скоро искључиво, за доследно „рангирање“ ученика у групи која се оцјењује. С друге стране, принципи садржаја, учења и праведности оцјењивања препознају образовну вриједност задатака оцјењивања. Како проширени дијапазон закључака о нивоу математичких знања треба да се донесе на основу резултата оцјењивања, односно изведу докази из оцијењених задатака, то се све више шири поглед на вриједности задатака оцјењивања (National Research Council, 1993). Задаци за оцјењивање се посматрају као индикатори нивоа знања ученика (Bodin, 1993). Тако, Бел, Буркхарт и Сван (Bell, Burkhardt & Swan, 1992c) указују да је од суштинске важности да оцјена математичких знања буде избалансирана не само у оквиру циљева курикулума и математичких садржаја, већ и у оквиру типова задатака који се оцјењују.

Да би оцјена из математике била усмјерена на развој и напредовање ученика, сваки задатак и свака математичка активност на конкретном часу морају имати свој циљ. Тако су, на примјер, другачији задаци којима је циљ развијање упорности и радних навика од задатака којима је циљ развијање логичког, стваралачког или критичког мишљења. Код сваког од тих задатака оцјена из математике треба да буде одраз циља са којим је задатак постављен, а не само нивоа знања испољен у његовом рјешавању (Шпијуновић & Маричић, 2015). За успјешну евалуацију математичких постигнућа ученика од посебног значаја је база добро изабраних задатака (уз покривеност садржаја) и њихова дистрибуција према нивоима знања, у односу на индивидуалне могућности ученика (Милинковић & Пикула, 2015).

Од одговарајућих математичких садржаја (задатака) за оцјењивање зависи квалитет процјене дубине разумијевања материје којом ученик треба да овлада. Кључно питање је да ли задаци оцјењивања заиста од ученика траже да користе интелектуалне процесе математичких способности: закључивање, рјешавање проблема, комуникацију, успостављање веза, итд. Тиме се валидност задатака оцјењивања процјењује ако у великој мјери одражавају

опсег математичких активности које људи обављају у стварном животу (National Research Council, 1993). Исто тако, низ комплексних задатака који процјењују шири спектар вјештина и знања знатно шире и боље приказује активности учења од било ког аналитичког описа (Bell, Burkhardt & Swan, 1992a). Постављањем кратких, затворених, стереотипних питања подстичу се имитативне вјежбе на сличним задацима (Ibid). Тако настаје алгоритамско „сљепило“ односно примјена индивидуалних и изолованих знања, на примјер на дугим низовима сабирања, као и вјежбање напамет са алгоритамским стандардним правилима, што доводи, како Шоенфелд (према Streefland, 1992) описује, до феномена – „бескрајни ток неповезаног учења”. Ова рјешења свједоче о ригидном ставу да се нека радња, вођена правилима, мора извршити над бројевима у задатку. При том, наставници, уопште, постављају стандардизовани формат питања и задатака за оцјењивање. Ученицима се понуде дефиниције које треба запамтити, занемарујући чињеницу да значење дефиниције произилази из њеног контекста, тј. није неуобичајена наставна пракса да ученици више одговарају на питања која су дата у формату теста него у „природнијим“ контекстима (Izard, 1993). Међутим, овим задацима не добијамо одговор на оцјењивање стратегије размишљања. Стога, оваква рјешења упућују на значај идентификације математичког контекста као важне математичке активности у креирању задатака оцјењивања (Streefland, 1992).

Често се претпоставља да се тестови који мјере вјештине ниског нивоа, рачунске алгоритме и рутинско рјешавања проблема, могу побољшати новим инструментима оцјењивања, који садрже софистициранije, нерутинске проблеме (Goldin, 1992). Ријеч је о увођењу „отворених“ математичких задатака за процјену дубине разумијевања одређеног концепта. Овим иновативним задацима оцјењивања ученицима се постављају већи когнитивни захтјеви. Веће су могућности за изазивање специфичног типа одговора на постављене алтернативне задатке, те су и процјене шире и захтјевније. На примјер, пројекат QUASAR (Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning – Квантитативно разумијевање: развијање постигнућа и закључивања ученика) је развио шему за класификацију задатака која укључује четири димензије: (1) когнитивне процесе (разумијевање и представљање проблема, уочавање математичких односа, организовање информација, доказивање процедура, итд.); (2) математички садржај (области које су обухваћене наставним планом и програмом); (3) начин представљања (ријечи, табеле, графикони, симболи, итд.); и (4) садржај задатка (реалан или нереалан). Овом класификацијом задатака у четири димензије, QUASAR истраживачи могу идентификовати сложеност математичких постигнућа високог нивоа (National Research Council, 1993).

У контексту оцјењивања постављеног задатка, Боекатс (према Black & Wiliam, 1998) запажа да, ученици користе три извора информација за формирање менталног приказа задатка: (1) тренутна перцепција задатка и физички, социјални и поучни контекст унутар којег је изграђен; (2) активирано знање специфично за домен и (мета) когнитивно стратегије повезане са задатком; и (3) мотивациона увјерења, укључујући могућности, интересовање и увјерења везана за домен. То значи да приликом постављања задатака за оцјењивање потребно је, како Фукс (према Black & Wiliam,1998) наводи, ускладити избор задатака и повратне информације, помоћу којих се може објаснити веза између разумијевања математичких садржаја и интеракције ученика са постављеним захтјевима задатака, и то, на начин да се овај вид провјере знања може креирати и интерпретирати. То захтијева велики напор који укључује сарадњу психометричара, когнитивних стручњака и експерата предмета.

Креирање задатака за оцјењивање, Полит (Pollitt, 2012) заснива на три једноставна принципа:

(1) прикупљање доказа о знањима која се оцјењују;

(2) прецизно формулисање постављених задатака;

(3) поуздано квантификовање доказа о нивоима знањима.

Приликом креирања задатака за оцјењивање, Лестер (Lester, 2013) упућује на следећа својства задатка: синтаксу, садржај, контекст, структуру и процес. Карактеристике синтаксе указују на распоред и односе између ријечи и симбола у задатку. Садржајне карактеристике се баве математичким значењима у проблему и то су двије важне категорије садржаја: математички садржај (нпр. геометрија, вјероватноћа) и језички садржај (нпр. изрази који имају посебна математичка значења, као што је на примјер „мање од“). Карактеристике контекста су нематематичка значења у исказу задатка, које описују проблем. Односе се на језичко формулисање и формат информација датих у проблему. Карактеристике структуре могу се описати као логичко−математичка својства задатка и одређују приказ који је изабран за проблем. Процесне карактеристике представљају интеракцију између задатка и ученика, односно при одабиру задатака за оцјењивање значајно је испитати карактеристике процеса рјешавања задатака. На примјер, један ученик може изабрати да задатак представља у смислу система једначина, док други ученик може исти проблем представљати у смислу неке врсте погађања (Ibid).

Поред наведеног, Бел, Буркхарт и Сван (Bell, Burkhardt & Swan, 1992a) наводе да је за постављање задатака оцјењивања потребно:

- приказати неколико примјера задатака (опсег варијације унутар групе задатака);
- одговор ученика узети као модел према којем се изграђује одговарајућа шема оцјењивања;
- описати шему оцјењивања, начина на који су бодови додијељени за вредновање сложености нивоа постигнућа.

Такође, потребно је указати на димензије у састављању уравнотеженог скупа задатака. То су:

- Дужина задатка. Рјешавање широког избора различитих типова задатака, од брзог менталног прорачуна до проширеног практичног проблема у коме се користе, наизмјенично, различите области математике.
- Аутономија. За разлику од рјешавања задатака кроз имитирање и запамћивање сличних задатака, ученицима је потребно да користе своје вјештине, као и флексибилно и аутономно размишљање, јер се стварни животни проблеми не представљају у стандардном облику.
- Непознатост. Неки задаци ће бити потпуно познати и стога рутински, а други морају бити мање познати да би се развиле способности примјене и проширивања математичких знања.
- Практичност. Неки задаци ће укључивати практичну примјену математичких знања, док ће други бити чисто математички. Сваки је полазиште другог.
- Контекст. Примјена математике покрива веома широк спектар практичног контекста и задаци оцјењивања треба да садрже посебно оне контексте који се односе на искуство и интересовања ученика.
- Математички садржај. Задаци треба да садрже читав низ стратегија, концепата и вјештина из прописаног наставног плана и програма (Ibid).

Приликом креирања и евалуације задатка оцјењивања, Сван (Swan, 1993) наводи шест димензија: (1) постигнућа која се оцјењују (чињенице и вјештине; концептуалне структуре; опште стратегије за рјешавање непознатих проблема); (2) одговарајући метод оцјењивања („сврсисходно“ – задатак се поставља са циљем примјене одређеног аспекта математике и „случајно“ – оцјењивање се дешава када наставник уочи да се релевантно знање показује у нормалном току наставе); (3) степен „отворености“ задатка (задаци који од ученика захтијевају да праве изборе, закључују, образлажу, при чему је већи акценат стављен на закључивање и

комуницирање ученика у нерутинским ситуацијама; задаци који дозвољавају низ прихватљивих одговора); (4) потребан степен аутономије и флексибилности („тежина“ задатка повезана је са комплексним захтјевима математике која је укључена и тражи од ученика висок степен аутономије и флексибилности рјешавања); (5) обим и кохерентност задатка (обим задатка обухвата опсег различитих, тј. од једноставних, краћих до комплексних, дужих задатака; кохерентност представља степен до којег је задатак подијељен на мање, краће задатке); (6) Контекст у коме је задатак постављен (чисти математички задаци; апликације које илуструју примјену математичких концепата; задаци из стварног живота чија су рјешења често од стварне практичне вриједности).

Дакле, задаци оцјењивања треба да буду осмишљени тако да одражавају обим и квалитет знања којима ученик располаже. То су задаци различитих „стилова“ (писмени, усмени и практични), „дужине“, контекста, степена „отворености“, укључујући и оне који подстичу аутономију и флексибилност у размишљању, као и примјену математичких процедура и концепата са различитим приступима рјешавања. Посебно, степен „отворености“ задатака омогућава да се кроз формулисање одговора, односно образложење начина на који се дошло до одговора, математички искаже размишљање и закључивање ученика.

На примјер, према Кохену, Фавлеру и Кулму (према Rosli, Goldsby & Capraro, 2013) наставници могу да генеришу нове математичке задатке промјеном начина постављања задатка. На примјер, рутински задатак „Израчунај 2,4 · 5,3“, наставници могу преформулисати у низ задатака као што су:

(1) Објасните како је 2,4 · 5,3 = 12,72?

(2) На основу израза 2,4 · 5,3 саставите текстуални проблем.

(3) Прикажите 2,4 · 5,3 користећи сликовни приказ.

(4) Колика је разлика између 2,4 · 5,5 и 2,4 · 5,3? (Ibid:54).

Трансформацијом наведеног задатка можемо оцијенити концептуално разумијевање, на примјер, помјерањем децималног зареза: С обзиром да је 2,4 · 5,3 = 12,72, објасните како можете пронаћи производ 0,24 · 0,53 без поновног рачунања (Ibid).

За објективно оцјењивање нивоа концептуалних знања из математике Бодин (Bodin, 1993) предлаже типологију задатака за оцјењивање. Концепт се може оцијенити на основу неколико постављених нивоа, без намјере да се сваки поставља у хијерархију, која објашњава ниво знања које дати задатак може имати у математичком контексту, било на нивоу примијењене или чисте математике. Укратко описано, ова типологија оцјењивања математичког концепта укључује:

- Ниво репрезентације (менталне слике и физичке слике концепта). Открива значење које ученик даје концепту, независно од стратегије рјешавања питања у којима се концепт појављује.
- Ниво комуникације. У многим случајевима, концепт се користи само за описивање или кодирање информација.
- Ниво објекта. Задатак се односи на сам математички објекат без икаквог конкретног повезивања са другим математичким објектом.
- Ниво алата. Под алатом се подразумијева функционисање концепта у рјешавању различитих проблема.

Поменути различити нивои оцјењивања математичког концепта пружају „алате“ за конструисање задатака оцјењивања, као и за интерпретацију добијених резултата оцјењивања (Ibid). Међутим, информације које даје дата провјера знања ће варирати у зависности од функције која јој се приписује, о чему је више ријечи било у поглављу *Врсте вредновања*.

Избором одговарајућих садржаја (задатака), као што је већ истакнуто, може се развијати критичко мишљење у почетној настави математике (Maričić, Špijunović & Lazić, 2016). Аутори су понудили примјере задатака за изражавање критичког мишљења:

- Формулисање проблема (способност ученика да сагледа математички проблем и да га формулише на основу проблемске ситуације; откривање математичке симболике и трансформација те симболике помоћу ријечи; идентификација нијанси у формулацији проблема и употреба прецизног говорног и математичког језика);
- Преформулисање проблема (лингвистичко преформулисање математичког задатка; извођење закључака на основу идентификације веза и односа у садржају задатка, са објашњеним јасним аргументима; идентификовање односа међу терминима задатка и усмјеравање стратегије рјешавања у супротном смјеру);
- Евалуација (евалуација информација; евалуација рјешења; процјена мишљења наставника; заснива се на пажљивом уочавању односа у садржају задатка, раздвајању датог и траженог, важног и неважног, утврђивању вишка података у задатку, препознавању сврхе информације, као и на постављању питања која помажу да се утврди суштина задатка);
- осјетљивост на проблеме (оцјењивање реалности ситуације у проблему и добијеног рјешења; идентификација и откривање скривених и имплицитних информација у формулацији, уздржавање од брзих закључака, осјетљивост на откривање начина рјешавања проблема; способност да се идентификују недоследности и противрјечности у формулацији и захтјевима проблема, идентификација сувишних и непотпуних резултирајућих података који произилазе из реалности дате ситуације и откривање „замки“ у формулацији проблема) (Ibid).

Адекватност садржаја (задатака) подразумијева садржај чије рјешавање захтијева изражене вјештине критичког мишљења, тј. формулисање проблема, преформулисање проблема, евалуацију и осјетљивост на проблеме. Ученици имају прилику да прикажу дубље и критичко размишљање, уочене везе и односе у садржају задатка и начин разумијевања његове суштине. Такође, овим задацима могу се извући закључци о способностима: аргументације добијеног рјешења, реверзибилног мишљења и преформулисања проблема.

Милинковић (Милинковић,1998) истиче да постављени задаци оцјењивања често не одражавају стварна знања којима је ученик овладао. На примјер, ако је у задатку понуђена слика нацртаног троугла са означеним мјерним бројевима дужина тих страница и постављен захтјев израчунавања обима троугла, јасно је да ће ученик који је усвојио појам обима троугла сигурно ријешити овај задатак, сабирањем записа три броја. Чињеница је, међутим, да ће значајан број ученика, који тај појам нијесу усвојили, претпоставити да се од њих очекује да наведене бројеве саберу. На тај начин ће и једни и други тачно ријешити задатак, али дати задатак неће дати праву слику знања. Тачно ријешен задатак не гарантује да ученик заиста разумије материју. Реалнију слику о усвојености појма обима троугла пружиће нешто комплекснији задатак, у којем се од ученика тражи да на основу познатог обима троугла нацрта два различита троугла (дужине страница троугла изражавају се природним бројевима). Овим, ученици имају прилику да испитају све тројке дужи које задовољавају услове задатка, помоћу којих се могу конструисати (нацртати) троуглови. Налажење свих таквих тројки свједочи о способностима ученика за уочавање свих комбинаторних могућности, што је значајно подстицати и његовати кроз наставу математике. Тиме богатство могућности и слобода избора у креирању задатака за оцјењивање подстиче заинтересоване ученике, са израженим способностима за креативан рад у области математике, да покажу своје комбинаторне способности, маштовитост, способност исправног закључивања (Ibid).

Према томе, процјена способности математичког разумијевања ученика зависи од задатака који се постављају ученицима. Ако се од њих затражи да попуњавају радни лист за

радним листом како би увјежбавали одређену вјештину или технику, научиће боље извођење те вјештине, али можда неће моћи да се сјете или примијене ту вјештину у другим ситуацијама. Исто, ако ученици проводе вријеме гледајући свог учитеља како ради математику, а затим га опонашају користећи исте технике, они ће научити само те технике (Jones, 2012). Међутим, ако ученици добију задатке у којима се од њих тражи да истражују, пишу и размишљају о значењу задатака и како да их повежу са оним што знају, они ће највјероватније градити нова разумијевања и повезати их са постојећим оквиром знања (Ibid). Тако, на примјер, када је ријеч о типу задатака ТИМСС истраживања, они обухватају двије врсте задатка: задатке вишеструког избора и задатке отвореног типа. У задацима вишеструког избора ученицима су увијек понуђена четири одговора од којих је увијек само један тачан, а три представљају дистракторе. Задаци отвореног типа захтијевају од ученика да сами формулишу одговор, односно, дописивање одговора и/ или образложење начина на који је ученик дошао до одговора (Станојевић & Милинковић, 2013; Марушић Јаблановић, 2017).

Слично, у избору задатака Пешикан (Пешикан, 2015) као главни критеријум истиче њихову аутентичност, релевантност и смисленост. Рјешавањем аутентичног задатка ученици ће овладати знањима која ће им бити потребна и ван школе. Неко ове задатке сматра релевантним задацима јер припремају ученика да се снађе у неким будућим животним ситуацијама. Релевантност задатка се дефинише као степен у коме он одговара потребама и/или интересовањима ученика. Неки задатак може бити аутентичан (тражи компетенције за стварну животну ситуацију), али није релевантан са становишта учења одређеног предмета. Смислени задаци су они које ученици разумију, који од ученика траже да интегришу нова знања у своје постојеће когнитивне структуре или схеме и омогућавају трансфер знања на нове ситуације (Ibid).

Поред потребе за поступцима оцјењивања којима се, употребом задатака за оцјењивање, прикупљају репрезентативни докази математичког постигнућа, посебно у погледу свих значајних циљева курикулума, важна претпоставка оцјењивања јесте спремност ученика да учествују у рјешавању задатака. Резултати ученика који немају мотивацију да рјешавају такве задатке неће показати ваљану мјеру постигнућа. Задаци оцјењивања треба да буду „привлачни“ и задовољство постизања успјеха на таквим задацима важно је у подстицању ученика за учење математике (Izard, 1993). Такође, избор задатака за оцјењивање треба да буде репрезентативан. То подразумијева да задаци укључују проблеме у одговарајућим контекстима, са више рјешења, и различитим стратегијама рјешавања, гдје постоје стварне проблемске ситуације и гдје се може приказати сложеност математичког мишљења (Izard, 1993; Swan, 1993). Да би се осигурало да оцјењивање има позитивно образовно искуство, и свим ученицима пружила прилика да покажу ниво знања, разумијевања и умијећа, предлаже се развој вишеслојног система диференцираних задатака. Задаци могу бити креирани, са различитим когнитивним нивоима, тако да се сваки ученик суочи са низом одговарајућих изазова, од којих је значајан дио достижан (Swan, 1993). Овај избор задатака оцјењивања неопходно је да задовољи захтјев да оцјењивање мора бити практично, поуздано и валидно (Izard, 1993).

Дакле, оцјењивање је основа за планирање наставе тако да сваки ученик научи математику најбоље што може, односно наставницима помаже да оцијене шта ученици знају, како мисле и шта могу да ураде. Вријеме утрошено на квалитетно оцјењивање у настави математике је добро утрошено вријеме јер такво оцјењивање директно доприноси процесу учења (National Research Council, 1993). Основа за нови поглед вредновања у настави математике, усмјерена на развој концептуалних знања, представља јасну дефиницију онога што се оцјењује (Lesh & Lemon, 1992). Међутим, традиционални начини оцјењивања нијесу прилагођени за вредновање концептуалног знања у контексту стварног живота (Izard, 1993). Стога, постоји много изазова за унапређење праксе оцјењивања у настави математике. У свијетлу наведених изазова потребне су реформе курикулума математике које ће обухватити

интеграцију наставе и оцјењивања, и превазићи употребу тестова вишеструког избора (ради увођења проблемских задатака реалног контекста). Овим се стварају могућности да ученици приказују аргументоване одговоре, као и да наставници бројчано (словно) оцјењивање допуњују вишедимензионалним профилима оцјењивања обима и квалитета математичких знања. Не само да се пружају повратне информације о томе колико су ученици овладали постављеним циљевима већ се, сходно томе, унапређује пракса оцјењивања наставника. Међутим, наставницима је тешко да усвоје нову праксу оцјењивања, чак и ону која нуди иновативна искуства учења, усмјерена на вјештине вишег нивоа, ако не могу да процијене како ће стечене вјештине идентификовати код ученика (Bell, Burkhardt & Swan, 1992a). Стога, Грапа и Сајак (Grapin & Sayac, 2017) предлажу обуку наставника за оцјењивање. У том погледу, наставници треба да понуде широк спектар задатака, али, такође, и интерпретирају грешке у рјешењима ученика, са прилагођеним упутствима за њено савладавање. Претходно наведено упућује да је, у питању избора ефикасних задатака, ученицима потребно представити више проблема који мотивишу, имају контекст који им значи и нуде низ стратегија рјешавања.

Осим широког избора задатака за оцјењивање, различите аутеничне технике оцјењивања пружају аутентично оцјењивање математичких знања ученика. Процедуре вредновања остварују своју функцију једнако добро и имају мањи негативан ефекат када се користе различите технике и када се испитују слична математичка знања више пута на различите начине. Редунданција и плурализам, иако нијесу довољни, неопходне су карактеристике добро осмишљеног система оцјењивања (Wheeler, 1993). Ово је велики изазов, односно, структурирање провјере знања која укључује различите нивое математичког знања, штавише, да можемо разликовати нека постигнућа ученика, напреднија од других, односно, пружити различите типове информација добијених оцјењивањем (Ibid). Такво аутентично оцјењивање је важан катализатор промјена у настави математике, али образовна заједница још увијек нерадо прихвата и прилагођава нови метод оцјењивања (Rosli, Goldsby & Capraro, 2013). Али у мјери у којој оцјењивање покушава да „измјери“ занимљиве аспекте размишљања и учења, оно може унаприједити наставу математике (Ginsburg, Jacobs & Lopez, 1993).

Оцјењивање у настави математике, такође, треба вредновати, тј. колико добро одражава принцип учења, са посебном пажњом на два циља која принцип настоји да промовише, односно, побољшано учење и бољу наставу и његов коначан резултат – висококвалитетан образовни систем (National Research Council, 1993).

4. Развој алгебарског мишљења у почетној настави математике

Алгебра и алгебарско мишљење сматрају се основним елементима општег математичког образовања које се протеже кроз цијело школовање. Сама ријеч алгебра има арапски коријен „ал–џабр“ и све до модерних времена представљала је онај дио математике који се односи на рјешавање једначина (Марјановић, 1996а). Најчешће издвајана и навођена је Усискинова (према Зељић, 2014) анализа алгебре која у основи предмета изучавања алгебре подразумијева специфично значење и употребу слова. Из ове анализе су проистекла четири основна приступа изучавања алгебре: (1) генерализована аритметика (својства бројевних система), (2) студија поступака (проучавање поступака који се користе у рјешавању једначина и неједначина), (3) учење о односима међу квантитетима (проучавање функција и односа, било да су представљени бројчано, симболички или графички) и (4) студија структура (структурисање система бројева и почиње да се изучава у основној школи). Алгебра је критична прекретница школске математике и пресудна за даље учење математике, као и за могућности будућег образовања. Стога је алгебра средиште реформских напора у настави математике, с тим што се многи наставници математике залажу да алгебарско резоновање треба интегрисати на свим нивоима математичког образовања (Knuth et al., 2011). Наиме,

алгебра је концептуализована много шире тако да се истиче помјерање од учења правила симболичких манипулација ка развоју алгебарског мишљења (Jacobs et al., 2007).

Према Киеран (Kieran, 2004) алгебарско мишљење у нижим разредима основне школе укључује развој мишљења у оквиру активности за које се словно–симболичка алгебра може користити као средство, али које није искључиво везано за алгебру, и којим ученици могу, без било какве словно–симболичке алгебре, да учествују у активностима попут анализе односа између величина, уочавања структуре, испитивања промјена, уопштавања, рјешавања проблема, моделовања, доказивања и предвиђања (Ibid:149). По Шоенфелду (Schoenfeld, 2008) алгебарско мишљење подразумијева приступ различитим облицима репрезентација, укључујући симболичко приказивање, те могућност флексибилног преласка са једне репрезентације на другу, када једна или друга репрезентација пружају веће могућности за рјешавање задатка, затим могућности да смислено дјелују на симболе, према релевантним синтаксичким правилима. Укратко, алгебарско мишљење се везује за смислену употребу симбола, било да се значење једноставно води синтаксичким правилима система симбола који се користи или је значење повезано са својствима ситуације, која је представљена симболима или је повезана са другим приказима (Ibid).

За алгебарско мишљење наводе се двије кључне карактеристике (Lins & Kaput, 2004, Kaput, 2008). Прва, укључује активности намјерног уопштавања и изражавања општости. Друга, обично као засебан подухват, представља синтаксички и семантички вођене активности са симболима, унутар организованих система симбола. Наведене карактеристике алгебарског мишљења наставницима помажу да уоче облике алгебарског мишљења ученика и услове који их могу унаприједити. Међу таквим условима су, на примјер, потреба за већом интеграцијом различитих математичких тема, како би се промовисао развој алгебарских облика мишљања, што би дало бољу способност рјешавања проблема ученика. Друго разматрање је препознавање да алгебарско мишљање „оснажује ученике“, пружајући „алате“ који омогућавају изражавање одређених врста општости, што је, наравно, дуго времена било тачно, али овај пут на „оснаживање“ много млађих ученика него иначе.

Алгебарско мишљење у основној школи се манифестује на више начина. Капут (према Jacobs et al., 2007) идентификује пет међусобно повезаних облика алгебарског мишљења:

•генерализовање аритметичких образаца и правила, односно генерализована аритметика;

• синтаксички вођено манипулисање симболима;

• испитивање структуре и апстаховани систем из прорачуна и односа;

• испитивање функција, релација и заједничких варијација; и

• моделовање.

Чињеница је да су наведени облици алгебарског мишљења веома корисни за наставу, посебно наставницима у идентификовању математичких појмова који су повезани са постојећим мишљењем ученика и тиме имају непосредну валидност за наставнике (Jacobs et al., 2007). Ово преплитање мишљења ученика и математичких појмова је карактеристична прилика да наставници уче пратећи мишљење ученика. Анализа мишљења ученика је увијек заснована на структурираном систему математичких појмова, и ово, такође, наставницима помаже да истакну како су ови појмови структурирани, затим да увиде начине учења, као и постављање задатака и интеракције за развој мишљења ученика у посебним математичким доменима (Ibid).

Међутим, примећено је да многи ученици наилазе на озбиљне препреке у алгебарском рјешавању проблема, као и у формалном алгебарском систему (Wang, 2015). Исто, изграђивање знања у апстрактној алгебри уопште је главни проблем ученика. На примјер, ученици, уопште, често имају проблем са доказивањем теорема из алгебре. Обично смо склони да то оправдавамо исказом „теорема је сложена“. Али, да ли је заиста теорема толико сложена? Теорема и њен доказ у основи се тичу одређених односа, који постоје између одређених математичких објеката. Односи су прилично једноставни и вјерујемо да су основни проблеми на које ученици наилазе не толико у сложености теореме, колико у апстрактној природи математичких објеката који су у њој укључени (Leron & Dubinsky, 1995). Као одговор на растућу забринутост због неадекватног разумијевања и припреме ученика за алгебру, недавна истраживања су започела реформу алгебре у контексту математике за основну школу. У том смислу, циљ реформи математичког образовања јесте да боље припреми све ученике за успјех у алгебри, тако да „природа преалгебарских математичких искустава ученика“ поставља темеље за формално изучавање алгебре. Велики дио овог темеља може се поставити у периоду који повезује аритметичко и рано алгебарско мишљење ученика и њихов развој све више сложенијих, апстрактнијих алгебарских расуђивања (Knuth et al., 2011).

Налази међународних студија показују да су ученици четвртог разреда способни да користе алгебарске приступе рјешавања проблема (Cai, 1998). Ово откриће указује на то да је за ученике нижег школског узраста могуће развијање алгебарског мишљења. Исто, студије показују позитивне налазе учења алгебарских једначина са варијацијама у Кини. Природно, могли би се запитати како се ефикасно уче алгебарске једначине у Кини. У том смислу, Ли, Пенг и Сонг (Li, Peng & Song, 2011) дају детаљну анализу о ефектима наставе са варијацијама за развој алгебарског мишљења у основној школи. За учење алгебре са варијацијама, ученици, да би стекли смисао и везе концепата, с једне стране, морају да разумију концепт из више перспектива (од конкретног до апстрактног, од специфичног до општег), истичући суштину математичких појмова и разумијевање конотације појма алгебре. Конкретно, они указују да разумијевање алгебарских структура и њихова примјена у варијацијама питања или конструкцији варијанти питања, као средство, може да помогне ученицима да разумију алгебарски начин мишљења и да развијају математичко размишљање, без обзира на то како наставник мијења садржај и проблем. То, такође, показује да би, за боље вођење наставе алгебре са варијацијама, лекције требале бити добро структуриране са пажљиво одабраним варијацијама (Ibid).

Линс и Капут (Lins & Kaput, 2004) сматрају да је рани почетак образовања из алгебре могућ и од велике важности за математичко образовање, јер пружа посебну прилику за развој одређене врсте општости у размишљању ученика. Све у свему, широко присутно схватање да дјеца могу више да раде у математици него што се раније вјеровало доводи до усвајања амбициознијих циљева у почетној настави математике и до развоја нових приступа алгебре. То не значи уобичајено подучавање школске алгебре на млађем школском узрасту, већ упознавање са новим алгебарским начинима размишљања. Заправо, ствара се основа за разумијевање раног развоја алгебарског мишљења и ширих погледа алгебарског образовања у коме се то може догодити.

Такође, у истраживању Карахера и колега (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008) показало се да многи ученици на нижем школском узрасту показују склоност ка алгебри, само када им се пруже услови који их подстичу на математичка уопштавања и када се користе одређеним приказима, графиконима и алгебарским записима, који се обично уводе много касније. Њихов приступ наглашава помак од размишљања о односима међу одређеним бројевима и мјерама ка размишљању о релацијама између скупова бројева и мјера, од израчунавања нумеричких одговора до описивања и представљања односа међу промењљивим. Наиме, истраживање је показало изненађујући развој у закључивању ученика током 18 мјесеци. На почетку трећег разреда, ученици су садржај о неодређеним количинама

тумачили као једну причу о одређеним људима и количинама. Овај садржај, од средине четвртог разреда већина ученика тумачи помоћу више могућих прича које укључују промјенљиве величине у инваријантном функционалном односу. Осим тога, многи ученици су користили алгебарске записе да би приказали варијације и непромјенљивост у причама (Ibid:267–268).

Слично, Мејсон (Mason, 2008) одражава оптимистично гледиште о томе да ученици долазе у школу са природним способностима генерализације и способностима да изразе општост, и да је развој алгебарског мишљења великим дијелом питање искоришћавања тих природних способности у дидактичке сврхе. Кључна ствар је да ће дјеца заиста више постићи ако им понудимо приступ одговарајућим техникама за изражавање алгебре. Он наводи примјере дјеце која се баве раним алгебарским размишљањем, који своје генерализације не изражавају формалним симболичким записима, већ примјеном дијаграма и контекстима прича, којима обухватају радње операција.

Истицање алгебарског мишљења у нижим разредима основне школе посебно је заинтересовало пажњу Френка и колега (Franke, Carpenter & Battey, 2008) и то, посебно, за начине на који ученици релационо размишљају, користећи основна својства аритметике. За њих, усредсређивање на алгебарско мишљење није премјештање алгебре из старијих разреда у ниже разреде, нити потпуна заступљеност алгебре. Умјесто тога, они указују на ширење аритметике на начине који граде алгебарско закључивање. Наиме, њихов рад је усмјерен на развој алгебарског мишљења, ученика основношколског узраста, односно на способностима уопштавања, примјени, репрезентацијама и доказивању уопштавања о основним својствима аритметике. Осим тога, основни циљ свих истраживања алгебарског мишљења, уопште, усмјерен је на помагање наставницима да разумију и укључе своје ученике у релационо мишљење. За релационо мишљење наводи се да није учење скупа рачунских трикова или меморисање скупа математичких својстава, већ да се односи на резоновање, разумијевање зашто су могуће одређене трансформације, односно подразумијева схватање односа између операција и њихових основних својстава. Међутим, многи ученици немају прилику да се баве овом врстом мишљења у основној школи. Они не разумију како се основна својства рачунских операција са бројевима примјењују у њиховим прорачунима и, као последицу тога, не препознају да се аритметика и алгебра заснивају на истим основним концептима. Тако, традиционални рачунски алгоритми, креирани су за ефикасност, док су трансформације укључене у прорачуне, углавном, скривене у запису алгоритама. Као последицу тога имамо да многи ученици завршавају основну и средњу школу, имајући врло мало могућности да раде било шта осим да слиједе рутинске, прецизно одређене редоследе процедура (Carpenter et al., 2005). Поред тога, наставници, такође, не виде ову везу и не користе структуру бројевног система, што знатно отежава учење аритметике (Franke, Carpenter & Battey, 2008).

Шифтер и његове колеге (Schifter et al., 2008), у својим истраживањима, наводе да се уопштавањем развијају „навике ума“ ученика, којим се уче да гледају даље од активности и траже нешто више, неки шири математички контекст за примјену усвојених знања. Изричитим изношењем уопштавања, а затим проналажењем примјера и противпримјера, они више размишљају о принципима њиховог рада са бројевима и операцијама. Заправо, уопштавања помажу ученицима да сагледају везе између бројева, као и између операција, чиме се стално шире границе и концепти са којима ученици раде.

Исто, Зељић (Зељић, 2014) показује како је рани развој алгебарског образовања могућ и да је тај вид образовања од изузетног значаја за математичко образовање, јер пружа специфичну прилику за развијање одређене врсте уопштавања у начину размишљања ученика.

Поред наведеног, учење алгебре почело је да укључује идеју за увођење и навикавање на одређене аспекте алгебарске активности. Стога, Киеран (Kieran, 2004) наводи активности које су посебно значајне за развој алгебарског мишљења:

1. релације, а не само израчунавање нумеричког одговора;
2. рачунске операције;
3. репрезентације и рјешавање проблема, а не само добијање рјешења;
4. операције са бројевима и словима, а не само са конкретним бројевима (ово укључује: слова која могу бити непознате, промјенљиве или параметри; прихватање словних израза као одговора; упоређивање израза за еквиваленцију на основу својстава, а не на основу нумеричког одговора);
5. разумијевање знака једнакости.

У односу на активности којима се типично баве ученици, Киеран (Ibid) школску алгебру посматра кроз три главне категорије: генеративне, трансформативне и глобалне (мета–ниво). Према овом моделу, генеративне активности алгебре укључују формирање израза и једначина као објеката алгебре. Типични примјери укључују: једначине које садрже непознату и представљају проблемске ситуације, изразе општости који произилазе из геометријских образаца или нумеричке секвенце, изразе правила која регулишу нумеричке односе. Трансформационе алгебарске активности („засноване на правилима“) укључују, на примјер, прикупљање сличних појмова, факторизацију, проширивање, замјену, додавање и множење полиномских израза, рјешавање једначина, поједностављивање израза, рад са еквивалентним изразима и једначинама итд. На крају, ту су и математичке активности на глобалном, мета–нивоу. Укључују рјешавање проблема, моделовање, уочавање структуре, проучавање промјена, уопштавање, анализирање односа, доказивање и предвиђање активности којима би се могло бавити без употребе било какве алгебре.

Дакле, да би се ученици боље припремили за успјех у алгебри, односно за формално изучавање алгебре, неопходна су „пре–алгебарска“ математичка знања, заснована на аритметици. Другим ријечима, умјесто усвајања алгебарских знања у оквиру уско дефинисаног опсега разреда, испитује се могућност стварања новог свијета алгебре, од самог почетка математичког образовања. Приступ који користимо у овом поглављу јесте подстицање развоја алгебарског мишљења, а не подучавање и учење одређених садржаја алгебре. У наредном дијелу приказујемо да рани почетак образовања из алгебре није само могућ, већ је неопходан. Фокусираћемо се на различите облике који такви рани модели могу имати и на кључне претпоставке на којима се заснивају. Акценат стављамо на алгебаризацији аритметике, односно, на питање математичке једнакости, те на изграђивању основних својстава броја и рачунских операција и на концепту промјенљиве.

4.1. Аритметика као основа за рану алгебру

Традиционална аритметика се готово искључиво бавила извођењем операција са датим бројевима ради постизања нумеричког рјешења. Према теорији значења крајња сврха аритметичких упутстава је развој способности мишљења у квантитативним ситуацијама. Међутим, за развој мишљења није довољна само способност извођења механичких операција са бројевима. Дјеца морају да анализирају реалне ситуације или да опишу квантитативне ситуације. Многа истраживања Бровнелова (према Hiebert et al., 1997) усредсређена су на учење са значењем, за које је навео следећих 10 разлога:

1.пружа сигурност памћења;

2.омогућава технике за ефикасан развој аритметичких вјештина;

3.повећава вјероватноћу за примјену аритметичких концепата;

4.доприноси лакоћи примјене знања;

5.смањује вријеме за утврђивање садржаја;

6.спречава математички апсурдне одговоре;

7.подстиче учење рјешавањем проблема умјесто механичког памћења и вјежбања;

8.пружа свестраност приступа, који омогућавају да се замијене подједнако ефикасни поступци који се обично користе, али који, у то вријеме, нијесу доступни;

9.ствара релативно независна знања за суочавање са новим квантитативним ситуацијама;

10.представља тему на начин који је чини вриједном запажања.

С друге стране, у алгебри је фокус на односима, односно, њена потреба је да дефинише односе између непознатих и познатих података у проблему (Wang, 2015). Будући да се у алгебри размишља на суштински другачији начин, ученици приказују неразумијевање алгебарских садржаја уколико, претходно, рјешавање аритметичких исказа не третирају на алгебарски начин (Kaput, Blanton & Moreno, 2008). У прилог томе, истраживања показују да примјена традиционалне аритметике у старијим разредима ученицима ствара проблеме у раду са симболичким изразима, једначинама и другим проблемима алгебре (McNeil et al., 2019).

Попут претходних истраживања, истраживање Карпентера и колега (Carpenter et al., 2005) показује да у наставном програму постоји озбиљан дисконтинуитет између аритметике коју ученици уче у нижим разредима и алгебре коју треба да науче у старијим разредима. Поставља се питање како аритметичке појмове и вјештине ученици могу боље ускладити са појмовима и вјештинама за учење алгебре. Умјесто да се фокусирамо искључиво на поступке за израчунавање одговора, успостављањем односа и примјеном основних својстава аритметичких операција, учење и подучавање аритметике може бити усклађено са знањем које подржава учење алгебре и истовремено да унапређује учење аритметике (Carpenter et al., 2005). Наиме, истраживачима све више привлачи пажњу питање: „Шта се може учинити у нижим разредима да би се ученици припремили за алгебру?“ Даље, питање се може преформулисати питањима: „Који су начини размишљања, начини резоновања и суштинска схватања која потичу из аритметике и кључна су за алгебру? Које су основне везе између аритметике и алгебре?“ Заправо, овим питањима долазимо до концепције припреме за аспекте формалне алгебре у нижим разредима. Тако, овдје Расел и колеге (Russell, Schifter & Bastable, 2011) инсистирају на аспектима аритметике који се односе на два главна циља: (1) омогућити ученицима да на основама аритметике „напредују“ ка алгебри и (2) развој разумијевања

аритметичких операција и вјештине рачунања. Они наводе хипотезу да математичке активности које повезују аритметику и алгебру развијају способност рачунања свих ученика, посебно оних који слабије разумију поступке рачунања, укључујући и оне који се истичу у математици, тј. који се заинтригирају изазовним питањима математичких односа (Ibid). Посматрано са тачке примјене аритметичких способности, на које се обично гледа као на основу на којој се темељи алгебра, инсистира се на развоју алгебарског мишљења, то јест на примјени способности уопштавања. У следећем примјеру, који је само један од многих, пажња је усмјерена на спонтане способности ученика, а што се може искористити за подршку све софистицираније алгебарског мишљења (Mason, 2008). При том, важно је укључити ученике у задатак који је усмјерен на већи циљ. На примјер, за покушај прављења низа, Хевит (према Mason, 2008) наводи да умјесто рјешавања преко туђег сценарија, ученик увјежбава радњу на одређеним примјерима, по могућности вршећи сопствени избор, и, истовремено, ствара релевантне примјере за себе. Поента је у томе да рјешавање задатка буде довољно изазовно, тако да се пажња скрене са физичког рада на оно у чему је кључно сазнање.

Слично, Бут (Booth, 1984; према Wang, 2015) сматра да је школска алгебра уопштена аритметика, односно да општи искази у алгебри представљају аритметичка правила и операције. Тако, претходна искуства ученика у коришћењу симбола у аритметици утичу на разумијевање њиховог значења у формалним симболима алгебре. Конкретно, Бут (Booth, 1988) је истакао да су ученици у аритметици научени да дају одговоре једним податком, па им одговор као што је 3 + 5 није био прихватљив. Дакле, мало је вјероватно да ће ученици разумјети да запис $a + b$ представља укупан број елемената у два скупа који имају a, односно b елемената, што би даље значило да ученици не разумију $a + b$ као математички објекат у алгебри. На примјер, Грино (према Wang, 2015) је спровео студију са почетницима алгебре како би испитао схватање структуре односа у проблемима. Открио је да ученицима недостаје структурно разумијевање алгебре. Растављање алгебарских израза ученици изводе сасвим случајно, на примјер:

4 (6 x– 3y) + 5x је поједностављено једном као 4 (6x – 3y +5x), а други пут као

4 (6x + 5x) – 3y (Ibid:149).

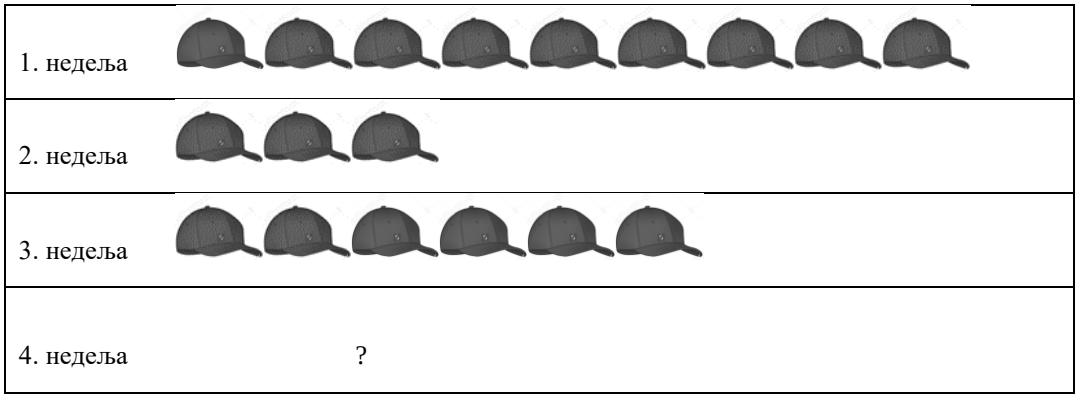
Према томе, стварање генерализација на основу аритметичког и квантитативног резоновања многи наставници и истраживачи узимају као примарни пут за учење алгебре (Kaput, 2008). То укључује уопштавање аритметичких операција и њихових својстава и резоновање о општим односима и њиховим облицима (нпр. својства нуле, комутативност, инверзни односи итд.). Осим тога, ово укључује изграђивање синтаксичког аспекта алгебре из аритметичке структуре, тј. изграђивање основе концепта да се један израз може замијенити еквивалентним. Аритметички изрази се тумаче на нови начин, тј. тумаче се својства израза, а не само вриједности коначних рјешења, добијених израчунавањем. Такође, укључује генерализације о одређеним својствима броја или односа, на примјер, збир два непарна броја је паран број, својства збира три узастопна броја, проналажење и изражавање правилности сабирања и множења, испитивање зашто множење са 10 или 100 има ефекат додавања нула помноженом броју итд. Трећа основна активност у овом дијелу је експлицитно изражавање стратегија рачунања, како конвенционалних тако и оних до којих су ученици дошли, као што су стратегије замјене, у којима једну вриједност додајемо, а затим одузимамо од укупног броја, како бисмо олакшали рачунање. Исто, чињеницу да је сабирање комутативно користимо за поједностављивање израчунавања, на пример 3 плус 18 као 18 плус 3, или комутативност множења користимо да бисмо олакшали множење. Тачније, наша активност може се назвати алгебарском када изричито наводимо ова својства и испитујемо њихову општост, а не када их прећутно користимо (Kaput, 2008). У том погледу, на примјер, у уџбеницима можемо наћи да се за развој алгебарских појмова постављају задаци „скривеног одговора“ у облику:

$\square$ + 3 = 8 и 5 + ___= 8 (Mason, 2008).

Али, ове задатке, ученици не виде, увијек, као нешто што има везе са непознатом, већ као аритметичке задатке. Осим тога, ако се аритметика посматра у односу на методе учења, занимљиво је да су ученици све вријеме подвргнути одређеним прорачунима. Стога, да бисмо се увјерили да ученици развијају способности рачунања, потребно им је понудити одређене примјере аритметике са алгебарским захтјевима.

Истраживања Карахера и колега (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008) показала су да ученици на млађем узрасту изводе математичке генерализације и изражавају их алгебарским записима уколико није постојао огроман концептуални скок од аритметике до алгебре. У супротном они не би могли да постигну такав напредак у тако кратком периоду. Ови подаци показују да заиста постоји велики скок од размишљања у смислу одређених бројева и случајева до размишљања о функционалним односима. У прилог томе, међународно истраживање рјешавања проблема, спроведено међу америчким и кинеским ученицима шестог разреда, показује очигледне разлике у стратегијама рјешавања проблема иако су ученици имали сличне просјечне бодове (Cai, 1998). Знатно већи проценат кинеских ученика користило је алгебарске приступе док је више америчких ученика користило стратегију мјерења. Ниједан кинески ученик није користио стратегију мјерења. Отприлике половина ученика из сваке земље користила је аритметички приступ. На примјер, проблем средње вриједности (Слика 14) ученицима пружа прилику за алгебарским закључивањем:

Анђела продаје капе за Математички клуб. Слика приказује број капа које је Анђела продала током првих недеља. Колико капа Анђела треба да прода у 4. недељи, тако да просјечан број продатих капа буде 7? Покажите како сте пронашли свој одговор.



Слика 14. Проблем средње вриједности, адаптирано према Кају (Cai, 1998:227).

Знатан број ученика из Сједињених Држава и Кине користио је аритметички приступ у којем су укупан број капа израчунали множењем просјечног броја капа са бројем недеља, односно $7 \cdot 4 = 28$. Потом су израчунали збир капа које су се продале током прве три недеље, $9 + 3 + 6 = 18$, и, затим, добијени збир одузели су од укупног броја капа, да би утврдили број продатих капа у 4. недељи, тј. $28 – 18 = 10$. У овом аритметичком приступу, одговор се добија радом уназад кроз низ инверзних операција, помоћу алгоритма за израчунавање средње вриједности. Супротно томе, у алгебарском приступу да би се директно описала проблемска ситуација, одговор се добија радећи унапријед, такође, користећи алгоритам средње вриједности. Поред тога, поједини ученици из Сједињених Држава ријешили су овај проблем додавањем или одузимањем капа да би „уједначили“ број продатих капа сваке недеље са просјечним бројем продатих капа. Резултати истраживања указују да је учесталост употребе алгебарских стратегија између ученика Сједињених Држава и Кине била запањујуће

различита. Ученици Сједињених Држава користили су чешће визуелне приступе него ученици из Кине, док су кинески ученици имали тенденцију да чешће користе алгебарске приступе. Исто, у истраживањима Ленга и Каја (према Cai, 1998) се показало да су јапански ученици четвртог разреда, у односу на њихове вршњаке из Сједињених Држава, користили углавном релативно софистицираније приказе рјешавања проблема. На примјер, у ситуацијама у којима су јапански ученици четвртог разреда користили множење, амерички ученици истог разреда су чешће користили сабирање.

Наведене разлике између употребе стратегија рјешавања проблема могу бити повезане са наставном праксом. Кинески наставници подстичу да се користе конкретни примјери у настави математике, који посредују у разумијевању математичких појмова. Релативно слабија примјена математичких израза и чешћа примјена конкретних визуелних приказа ученика Сједињених Држава указује да наставници из Сједињених Држава мање подстичу ученике на апстрактније представе и стратегије (Cai, 1998). Поред наведеног, у кинеским основним школама наставници непрекидно подстичу ученике на аритметичко и алгебарско рјешавање проблема. Такође, уџбеници и приручници за наставнике у Кини садрже примјере рјешавања проблема помоћу различитих стратегија и препоручују да се више времена посвети на поређење аритметичког и алгебарског приступа. Из тог разлога, циљеви за подучавање кинеских ученика у рјешавању аритметичких и алгебарских проблема су: (1) подстицање аритметичких и алгебарских репрезентација у стицању дубљег разумијевања квантитативних односа, (2) усмјеравање ученика у откривању сличности и разлика између аритметичког и алгебарског приступа рјешавања проблема и (3) развијање вјештине размишљања ученика и флексибилност коришћења одговарајућих приступа за рјешавање проблема (Ibid).

У основи наведених захтјева за алгебаризацију школске математике, како Киеран (према Knuth et al., 2011) наводи, је схватање да традиционално раздвајање аритметике и алгебре ученицима ускраћује могућности релационог мишљења у почетним разредима и отежава им учење алгебре у каснијим разредима. Алгебаризација школске математике, међутим, значи више од помјерања традиционалног наставног плана и програма алгебре у нижим разредима. То не значи напуштање учења аритметичких поступака. Процедурална флуидност и даље је основни циљ курикулума математике. Али, процедурална флуидност подразумијева више од рутинског израчунавања. Флуидност поступка укључује флексибилност у одабиру како и када користити процедуре. Управо то је оно што је укључено у релационо размишљање (Carpenter et al., 2005).

Идеје релационог мишљења добро се уклапају у аритметички курикулум, јер често олакшавају рачунање и пружају могућност да се експлицитно објасни већи дио аритметичког алгоритма (Franke, Carpenter & Battey, 2008). То није учење скупа рачунских „трикова“ или меморисање скупа математичких својстава, већ се односи на расуђивање, разумијевање зашто су могуће одређене трансформације, односно, подразумијева разумијевање основних својстава и односа између операција. Многи ученици немају прилику да се баве овом врстом размишљања у основној школи. Они не разумију како се основна својства бројевних операција примјењују у њиховим прорачунима, и, као последицу тога, имамо да не препознају да се аритметика и алгебра заснивају на истим основним концептима. Осим тога, ову везу не виде ни наставници, што ствара знатно отежано учење аритметике (Franke, Carpenter & Battey, 2008:339). Исто, Џејкобс и сарадници (Jacobs et al., 2007) сматрају да правилно поједностављивање рачунања није релационо мишљење. Наиме, релационо мишљење подразумијева флексибилне приступе рачунања у којима су изрази трансформисани на основу бар имплицитне примјене основних својстава операција са бројевима. То је помјерање од аритметичког фокуса – израчунавање за добијање рјешења, до алгебарског фокуса – испитивање односа за разумијевање добијеног рјешења. Тако, у традиционалној аритметици рачунске операције сабирања, одузимања, множења и дијељења су приказане као процеси у којима се за добијање једног броја управља прогресивним корацима у скупу бројева, што је

одговор на прорачун. С друге стране, релационо мишљење подразумијева схватање релација између бројева и основних својстава операција са бројевима. Према томе, ученици могу да примјењују релационо мишљење за поједностављивање рачунања, изграђивање и учење нових концепата, проширивање процедура на нове домене бројева и уопште стварају „осјећај“ за аритметику. Тиме се не повлачи оштра граница између једноставних аритметичких прорачуна и примјене релационог мишљења. На маргинама, разликујући шта је, а шта није релационо мишљење је комплексно питање, али одговорима ученика сазнајемо различите нивое софистицираности у примјени релационог мишљења. Дакле, релационо мишљење се разликује од примјене „скупа трикова“ или меморисања скупа математичких својстава. То је начин размишљања који није повезан са одређеним поступцима или комбинацијама бројева. Ученици који релационо идентификују бројевне односе и разумију трансформације схватају смисао одређеног проблема. Да би то извели, они морају да разумију барем имплицитне односе између бројева и основна својства која се могу користити за доказивање трансформације израза. Супротно овоме, ученици који немају могућности да истраже ове концепте често не успијевају да искористе структуру бројевног система тако да учење аритметике и алгебре постаје теже него што би то требало бити (Ibid:263).

За успјешан прелаз са аритметике на алгебру, према Сфарду (према Wang, 2015) потребно је савладати очигледну препреку коју означава као когнитивна празнина. Когнитивне празнине углавном су когнитивни захтјеви, дилема „производ–процес“ (да ли се истиче добијање рјешења или процес рјешавања) и операције са непознатом. Дилема „производ–процес“ и операција са непознатом потичу из заједничке чињенице – слово које представља непознату, што је такође саставни дио алгебре. Према томе, могло би се закључити да когнитивна празнина произилази из саме природе алгебре (Wang, 2015). Кај и Моиер (Cai & Moyer, 2008; према Wang, 2015) предлажу рјешења за прелазак са аритметике на алгебру из кинеског и сингапурског учења и то: 1) повезивање реципрочних операција за рјешавање једначина у кинеском учењу; 2) рјешавање сликовних једначина илустрованих у сингапурском учењу; и 3) примјена аритметичког и алгебарског приступа за рјешавање проблема у настави кинеског учења. Овим рјешењима они истичу да је за повезивање аритметике са алгебром, прво, из кинеског наставног програма, потребно преузети својства повезаности рачунских операција за изграђивање концепта промјенљиве. То служи за полазиште разумијевања рјешавања једначина. Друго рјешење, такође за разумијевање рјешавања једначина, проналазе у адекватно структурисаним репрезантацијама једначина, из сингапурског учења. Треће, у настави кинеског учења, истичу значај аритметичког и алгебарског приступа за разумијевање рјешавања проблема. Дакле, и овдје имамо да темељно изграђивање аритметичких садржаја представља основу за разумијевање усвајања алгебарских садржаја, те да је за развој алгебарског мишљења неопходно подстицати ученике на аритметичко и алгебарско рјешавање проблема.

Марјановић и Кадијевић (Marjanovic & Kadijevich, 2001) истичу пет тема кроз које аритметика може бити повезана са алгебром: први кораци сабирања и одузимања, инваријантно изражавање аритметичких правила, једначине, неједначине и откривање правила. Већ у почетној настави математике, када се изводе активности на низу бројева $\{1,...,10\}$ (и/или реакције на ситуације у природном окружењу или са њиховим сликовним репрезентацијама које се односе на сабирање и одузимање) ученици користе знакове плус и минус за састављање једноставних аритметичких израза. Они, такође, користе знак једнакости када састављени израз треба изједначити са бројем. Тако, овдје формиране вјештине са аритметичким изразима, односно примјена правила замјене сабирака, те правила асоцијативности сабирака, као и метод одузимања преко десет, доводе до темељног разумијевања ових поступака, који се лако преносе на алгебру. Прво, аутори наводе процедурално извођење аритметичких операција, примјер по примјер, без знања да се реторички или симболички објасне примијењена аритметичка правила. При том, од великог

значаја је инваријантни начин процедуралног изражавања аритметичких правила, на примјер: $8 + (2 + 4) = (8 + 2) + 4$; $3 \cdot (5 + 2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2$. Слично, за изражавање непромјенљивости аритметичких правила, они предлажу употребу држача мјеста, на примјер:
$7 \cdot (5 + 2) = 7 \cdot$___ + ___ $\cdot 2$, $7 \cdot (7 + 1)=$___$\cdot 7 + 7 \cdot$___, итд. (Ibid).

Дакле, када се код ученика створи осјећај да се у одређеним односима укључена група бројева може замијенити било којом другом, касније, ова правила се лако изражавају употребом симбола, замјењујући одређене бројеве словима. При том, претпоставља се да су ученици усвојили употребу слова у улози промјенљиве.

Такође, први експлицитан корак увођења једначина заслужује пажљиву разраду, односно „*x*“ треба „гледати“ као држач мјеста, а једначина, као на примјер $17 – x = 8$, се рјешава постављањем одговарајућег питања, као што је „Који број одузет од 17 даје 8“? Међутим, овај начин рјешавања једначина је прилично ограничен на скуп мањих бројева (до 20). Други начин заснива се на међузависности аритметичких операција (Ibid). Осим тога, имајући у виду симетрично својство односа једнакости, углавном, као на питање начина на који се користи синтаксички апарат, ученике треба систематски обучавати да у таквим ситуацијама повезују, на примјер, свих осам једнакости: $a + b = c$, $b + a = c$, $c – a = b$, $c – b = a$, $c = a + b$, $c = b + a$, $b = c – a$, $a = c – b$. Тако, ученици једначину $17 – x = 8$ записују као $x = 17 – 8$ и лако рјешавају ову и сличне типове једначина, помоћу којих се комбинују четири рачунске операције (Ibid). Према томе, када је у питању улога једначина у повезивању аритметике са алгебром, аутори наводе да непознато „*x*“ има, прво, улогу за фиксни, али скривени број. Затим „*x*“ узима различите вриједности и тако, полако, постаје промјенљива у скупу природних бројева.

Пошто је „*x*“ у неједначини већ у улози промјенљиве, таква употреба слова је један од најбољих начина за повезивање аритметике са алгебром. У случају мањих бројева, за „метод“ рјешавања неједначина користи се табеларни списак вриједности *x*, када *x* иде од броја до броја. У случају већих бројева, аутори се залажу за примјену правила: збир се повећава када се повећава сабирак, разлика се повећава када се повећава умањеник, разлика се смањује када се повећава умањилац и тако даље, укључујући њихове варијације добијене помоћу замјене „повећава“ са „смањује“ (Ibid).

Откривање непознатог правила и његово уопштавање ученике подстиче на активан рад са промјенљивом. Када су правила ограничена на изразе форме $an \pm b$, многим ученицима четвртог разреда ова врста задатака је занимљива и лака. Истовремено, они спонтано користећи слободну промјенљиву „*n*“ траже да запишу одоварајуће правило (Ibid). У откривању правила, ученицима могу помоћи адекватно изабране структурисане слике, које представљају бројевне моделе. Овим садржајима подстиче се разумијевање зависних односа између вриједности које су у основи математичких функција, па имају важну улогу у разумијевању генерализација и развијању идеје алгебарских операција код ученика (Зељић, 2014).

Расел и сарадници (Russell, Schifter & Bastable, 2011) наводе четири математичке активности за ученике од 2. до 6. разреда које представљају „мост“ између аритметике и алгебре. То су:

- разумијевање својстава операција,
- уопштавање и доказивање,
- проширивање бројевног система и
- примјена записа са разумијевањем.

Анализа сваке активности наставницима пружа увид у могућности ученика у контексту аритметике. Такође, наведене активности стварају боље разумијевање аритметичких операција и развијају основна знања ученика за изучавање алгебре (Ibid).

Ови радови указују да проучавање аритметике, односно алгебаризација основних математичких знања, како са бројевима тако и са операцијама, од ученика тражи одређени степен генерализације, па је стога примјена те општости у алгебри користан начин за стварање нових генерализација. Тиме је основна сврха ране алгебре да ученицима омогући смислено учење математике и стварање таквих знања са којима ће се касније сусрести у учењу алгебре (Ibid). Општи консензус заједнице математичког образовања јесте да се традиционална почетна настава аритметике допуни са експлицитним лекцијама за подучавање релационог мишљења или са добро осмишљеном процедуралном праксом која укључује различито постављање проблема (McNeil et al., 2019). Наш циљ је да укажемо на начине развоја аритметичког мишљења ученика, који се експлицитно ослањају на знања о рачунским операцијама. Тако, ученици уче аритметику са разумијевањем, што може пружити основ за континуирано учење алгебре (Jacobs et al., 2007). Овдје се опредјељујемо за развој релационог разумијевања и то кроз: посматрање једнакости као показатеља релације, успостављање експлицитних општих односа, посебно оних који се заснивају на основним својствима броја и рачунских операција и разматрање концепта промјенљиве.

4.2. Појам једнакости

На значај правилног увођења једнакости у настави математике указује Гатегно (Gattegno, 2010:129) истичући: „Можемо видјети да је идентитет врло рестриктивна врста односа који се тиче стварне истовјетности, да једнакост упућује на атрибут који се не мијења, и да се еквивалентност односи на шири однос, гдје се неко слаже да је у одређене сврхе могуће једну ставку замијенити другом. Еквиваленција, која је најопсежнији однос, биће и најфлексибилнија, па према томе и најкориснија. У пољу свакодневног искуства када кажемо „он је с моје десне стране“ еквивалентно је исказу „ја сам с његове лијеве стране“, и „ја сам виши од њe“ еквивалентно је са „она је нижа од мене“. Дакле, сви знамо да кажемо само једну од еквивалентних реченица и да никада не користимо обје истовремено, и да једна изјава подразумијева другу.“ Ова ментална динамика припада и математици, јер помоћу језика описујемо све активности, укључујући и математичке. Ако кажемо да је 4 + 1 исто што и 5, или обрнуто, не можемо бити тачни, умјесто тога 4 + 1 и 5 су два описа за дати скуп. Коришћење језика на овај начин у настави математике даће нам већу прецизност и истовремено већу слободу (Ibid).

Свеукупно присуство симбола једнакости у математици, на свим нивоима, наглашава његову важну улогу, уопште, у математици, а посебно у алгебри (Knuth et al., 2011). Киеран (према Carpenter et al., 2005) истиче да препознавање знака једнакости за приказивање односа је пресудно за учење алгебре. Она обиљежје развијања релационог разумијевања знака једнакости узима за основу транзиције процедуралне перспективе операција и односа на структурну перспективу и, истовремено, за основу стварања и представљања генерализација (према Franke et al., 2008). Киеран (према Knuth et al., 2011) тврди да је „један од захтјева за генерисање и адекватно тумачење структурних представа као што су, на примјер, једначине јесте концепција симетричног и транзитивног карактера знака једнакости, која се назива и „еквиваленција лијево–десно “ знака једнакости “. Флексибилност примјене знака једнакости за изражавање релација ученицима пружа кључна знања за учење аритметике (Carpenter et al., 2005). Стога је схватање да знак једнакости представља однос лијеве и десне стране једнакости пресудно мјерило у разумијевању математичких односа, што је више од саме примјене знака једнакости (Ibid). Међутим, симбол знака једнакости, који се користи за изражавање

еквиваленције, ученик не тумачи увијек у смислу еквиваленције. Заправо, већина ученика, уопште, не схватају тако лако или брзо значење еквиваленције (Kieran, 1981).

Резултати истраживања показују да ученици на свим нивоима образовања веома често погрешно тумаче знак једнакости. Наиме, постоји обиље литературе која указује да ученици знак једнакости не гледају као на симбол еквиваленције, тј. симбол који означава однос између двије величине, већ као одговор за изражавање резултата аритметичке операције. Тако, Киеран (према Franke et al., 2008) тврди да ученици основне школе углавном схватају да знак једнакости значи срачунати вриједност која му претходи. Такође, Киеран (Kieran, 2004) наводи да ученици знак једнакости третирају као сепаратор између проблема и рјешења или према знаку једнакости се односе као према смјеру слијева удесно. Исто, Џејкобс и сарадници (Jacobs et al., 2007) наводе да многи ученици на знак једнакости гледају као на симбол за израчунавање израза који му претходи, а број након овог знака је одговор на задато рачунавање.

Развијање погледа на знак једнакости пресудно је за учење алгебре, а недостатак таквог разумијевања главни је камен спотицања ученика када прелазе са аритметике на алгебру (Kieran, 1981). На примјер, трансформација једначина, кључна компонента за школску алгебру у старијим разредима, захтијева разумијевање да додавање истог броја објема странама оставља однос два израза непромијењеним. По Киеран (према Jacobs et al., 2007), ако ученици не схватају знак једнакости као индикатор релације, ови видови трансформације имају мало смисла и могу се научити само као запамћена правила. У том погледу, у предавачком експерименту са дванаестогодишњацима и тринаестогодишњацима, ученици који су почетници у алгебри, Киеран (Kieran,1981) је испитала разумијевање знака једнакости. Експеримент је осмишљен да прошири разумијевање знака једнакости. Испитаници су прво питани шта за њих значи знак једнакости, а затим је тражен конкретан примјер који показује примјену тог знака. Значајно, већина њих описала је знак једнакости у контексту одговора и ограничила се на примјере који укључују операцију на лијевој страни симбола и резултат на десној, на примјер, $3 + 4 = 7$. Следеће наставне сесије биле су усредсређене на проширивање употребе знака једнакости и укључивање вишеструких операција на обје стране. То је учињено тако што су ученици конструисали аритметичке једнакости, најприје са једном операцијом на обје стране једнакости, на примјер, $2 \cdot 6 = 4 \cdot 3$ (иста операција) и затим $2 \cdot 6 = 10 + 2$ (различите операције) (Ibid:321). Потом су конструисали једнакости са двије операције на свакој страни, а онда и са вишеструким операцијама на обје стране једнакости, на примјер, $7 \cdot 2 + 3 – 2 = 5 \cdot 2 – 1 + 6$.

Ове једнакости назване су „аритметичким идентитетима“ како би се запамтио термин „једначина“ и користио за једнакости са словима. Упркос почетном инсистирању једног субјекта да напише $4 + 3 = 6 + 1$ као $4 + 3 = 7$, а другог на уметању „одговора“ између обје стране, тј. $5 \cdot 3 = 15 = 10 + 5$, већина је углавном прихватала једнакости које садрже вишеструке операције са обје стране знака једнакости. То тврђење ученици су доказали чињеницом да су обје стране једнаке јер имају једнаку бројевну вриједност. Поређења која су испитаници на крају способни да прикажу између лијеве и десне стране знака једнакости сугеришу да се на овом нивоу симбол једнакости посматрао више као релациони симбол него као „сигнал учини нешто“. Тада десна страна није морала да садржи одговор, већ прије неки израз који има исту вриједност као лијева страна. Стога се проширење појма знака једнакости, у оквиру аритметичких једнакости, прије увођења алгебарских једначина, сматра неопходним у конструкцији знања за нетривијалне једначине које имају вишеструке операције на обје стране једнакости. Без проширења употребе знака једнакости, ученик у рјешавању алгебарских једначина схвата да је резултат увијек на десној страни предзнака једнакости. Тако, у домену математичких знања ученика могу се уклопити једначине попут $3x + 5 = 26$, али не и $3x + 5 = 2x + 12$ (Ibid).

Исто, Карпентер и колеге (Carpenter et al., 2005) истичу разлике ученика у схватању знака једнакости, које су јасно илустроване њиховим одговорима. На примјер, у једнакости 8 + 4 = __+ 5, један од одговора ученика је да треба уписати 12. Други одговор је да се саберу сви бројеви и упише 17. Само неколико ученика препознаје да знак једнакости представља однос, тако да изрази са обје стране знака једнакости представљају исти број (Ibid). Колинс (према Kieran, 1981), такође, наводи доказе о проблемима ученика у разумијевању приступа „два имена за исти број". Он је открио да ученици основношколског узраста, између 6 и 10 година, сматрају да два елемента повезана операцијом треба да буду замијењена трећим елементом. Сасвим јасно, они не могу да разумију једначине као што су 4 + 5 = 3 + 6. Ученици, прво, више „виде" јединствени резултат него значење операција са бројевима, односно 4 + 5 = 3 + 6 мора бити написано као 4 + 5 = 9. Касније, између 10 и 13 година, ученици схватају исход јединственим, мање се ослањају на „вијђење" јединствености у резултатима операција, али су и даље везани за емпиријске доказе. Послије отприлике 13.године, Колинс (Ibid) истиче да ученици закључују изван физичких модела и користе специфичне случајеве за формирање адекватних генерализација.

Када су у питању изрази као што је x + 3, ученици, оријентисани на рачунање, су збуњени (Kieran, 2004). Не разумију значење наведеног израза. Они мисле да треба нешто да ураде, али нијесу сигурни шта би то могло бити. Уз ово, важно је нагласити како ученици преиспитују процесе рјешавања проблема са наведеним типом израза. На примјер, у рјешавању проблема као што је „Када се 3 дода петострукој вриједности одређеног броја, збир је 38. Пронађи тај број. ", ученици који користе аритметику одузеће 3 од 38, а затим ће подијелити са 5, односно рјешење добијају у обрнутом редоследу, како су наведене операције у проблему. Насупрот томе, на часовима алгебре потребно је директно представити односе у ситуацији користећи наведене операције: 5x + 3 = 38 (Ibid).

Поред наведеног, МекНеил и колеге (McNeil et al., 2019) истичу да помагање ученицима у изграђивању формалног разумијевања математичке еквиваленције олакшава концептуално разумијевање аритметике, повећава постигнућа у математици и подстиче развој знања у алгебри. Међутим, њихова истраживања указују да иако ученици развијају вјештине рачунања, након што се додатно увјежбају са традиционалним рачунским задацима, они не показују одговарајућа побољшања разумијевања математичке еквиваленције. Осим тога, налази ових студија показују да је слабо разумијевање знака једнакости током основношколског узраста. Уско познавање традиционалне аритметике ствара проблеме разумијевања математичке еквиваленције, тј. знака једнакости. Насупрот томе, формално разумијевање математичке еквиваленције повећава концептуално разумијевање аритметике и ствара везе између аритметичких операција и алгебре. Према Сфарду и Линчевском (према McNeil et al., 2019) правилно формално разумијевање математичке еквиваленције, по дефиницији, укључује „напредовање" изван оперативног, процесно оријентисаног разумијевања аритметичких израза, ка структурном, објектно оријентисаном разумијевању, тако да је структурно разумијевање математичких израза пресудно за разумијевање алгебре.

Ученици са формалним разумијевањем математичке еквиваленције препознају значај улоге знака једнакости у проблему и, према томе, могу приступити новим проблемима тако што ће прво пронаћи једнакост и прије израчунавања идентификовати везу коју тај знак изражава (Jacobs et al., 2007; McNeil et al.,2019). Формално разумијевање математичке еквиваленције, такође, везује се за „гледање" аритметичких израза и једначина у цјелини и, унутар ње, уочавање бројевних односа (Jacobs et al., 2007). Ученици који прво уочавају везу између бројева прије извођења операција са њима већа је вјероватноћа да ће временом бити успјешни у математици, јер више времена посвећују разумијевању рјешавања проблема умјесто увјежбавања рачунања. Ритл–Џонсон и колеге (према McNeil et al., 2019) истичу да уколико се ученици посвете тачном идентификовању релевантних карактеристика нових проблема, већа је вјероватноћа да извуку одговарајуће концептуалне информације и примијене

тачну стратегију рјешавања. Дакле, можемо рећи да формално разумијевање математичке еквиваленције подстиче пажљиво рјешавање проблема. Стога, МекНеил и сарадници (McNeil et al., 2019) предлажу будућа истраживања за испитивање посредничких односа између разумијевања математичке еквиваленције и математичких постигнућа. Они наводе, типична, два посредника: дубље, концептуално разумијевање аритметике и пажљив приступ математичком рјешавању проблема. Додатно, предлажу испитивање да ли разумијевање математичке еквиваленције у основној школи предвиђа успјех у алгебри (Ibid).

Сходно наведеном, начин на који ученици разумију знак једнакости наставницима пружа педагошку и математичку основу за планирање наставног процеса. Математички, основа релационог схватања знака једнакости неопходна је за друге примјене релационог разумијевања, на примјер као што је поједностављивање рачунања и стварање генерализација. Педагошки, ми смо пронашли да тумачење знака једнакости даје добру почетну тачку за развој наставне праксе, односно за развој алгебарског мишљења. Штавише, тачно/нетачно постављене бројевне једнакости ученицима пружају корисне начине за разматрање знака једнакости док се наставницима ствара увид у: стечене концепције ученика и креирање „путева“ за измјену тих концепција. Продуктивне дискусије о знаку једнакости и алгебарском резоновању, у основи, захтијевају посебан тип постављања проблема, у којем су кључни примјери упоређивања и навођење супротних примјера (Jacobs et al., 2007).

Такође, „релациони поглед“ на знак једнакости је од суштинске важности за разумијевање трансформација у процесу рјешавања једначина јер одржава однос еквиваленције. Схватање да су трансформисане једначине еквивалентне није експлицитно фокус типичне наставе и за већину ученика је несхватљиво (Knuth et al., 2011). Такво разумијевање знака једнакости, односно његова (погрешна) концепција, вјероватно неће бити проблематична у основној школи, јер се од ученика обично тражи да ријеше једначине облика $a + b = 1$. Али, тиме се ученици не припремају за алгебру и алгебарски начин размишљања. У алгебри, ученици морају на знак једнакости гледати као на релацијски симбол – „исти као“, а не као на оперативни симбол – „уради нешто“. Релационо разумијевање знака једнакости постаје посебно важно када се ученици сусрећу и уче рјешавање алгебарских једначина са операцијама на обје стране једнакости, на примјер $3x – 5 = 2x + 1$. Такви резултати сугеришу да је разумијевање еквиваленције кључни аспект закључивања и развоја знања из алгебре. Сходно томе, припрема ученика за евентуални успјех у алгебри зависи од напора да се побољша њихово разумијевање математичке еквиваленције и значења знака једнакости.

Ипак, еквиваленција је концепт који се традиционално уводи током раног основног образовања ученика. Међутим, овом концепту је мало експлицитне пажње посвећено у каснијим разредима. Овим се може, великим дијелом, објаснити зашто многи ученици и даље показују неадекватно разумијевање значења знака једнакости у средњој школи, па чак и на факултету (према Knuth et al., 2011). Стога, сматрамо да је на раном школском узрасту ученицима неопходно помоћи у изграђивању релационог разумијевања знака једнакости прије него што се учврсти оперативно значење овог знака. У прилог томе, дискусија о знаку једнакости ствара основу за много сложенија питања, као што су на примјер примјена својстава рачунских операција или операција са бројевима за поједностављивање рачунања и генерализацију.

4.3. Својства броја и рачунских операција

Када ученици користе својства бројева или рачунских операција, они изричито изражавају своје математичко размишљање. Тако, ученици имају више имплицитног знања о својствима аритметичких операција али која се у настави уопште не постављају експлицитним предметом дискусије, на начине који пружају могућности за систематско укључивање и детаљно приказивање њиховог размишљања (Franke, Carpenter & Battey, 2008). Чак и међу ученицима који разумију својства рачунских операција, у контексту аритметике, јављају се проблеми када их примјењују у новом контексту алгебре. Они правилно користе меморисане процедуре, али не разумију зашто их користе или како се оне заснивају на својствима операција (Russell, Schifter & Bastable, 2011). Слично овоме, Џејкобс и колеге (Jacobs et al., 2007) наводе да су ученици у традиционалној настави често несвјесни основних својстава операција са бројевима, не разумију како се ова својства примјењују у њиховим прорачунима, те да не препознају да се аритметика и алгебра заснивају на истим фундаменталним концептима (Ibid). Тачније, они наводе да се концепти и вјештине које ученици стичу у оквиру аритметике истовремено могу ускладити са концептима и вјештинама које су неопходне за учење алгебре. Сходно томе, питања која овдје постављамо су: Како ученици разумију својства броја и рачунских операција? Какве приказе и аргументе користе? Који су основни начини испитивања ових својстава?

У истраживањима Џејкобса и сарадника (Ibid) су испитани приступи рачунања, који подразумијевају схватање основних знања о броју и својстава рачунских операција са бројевима. На примјер, ученици који релационо схватају знак једнакости једначину:

57 + 36 = □ + 34 рјешавају директно израчунавањем. Они израчунају 57 + 36 = 93 и затим одређују који број додат броју 34 даје број 93. Алтернативно, они могу да размотре однос између 36 и 34, уочавајући да је 34 за 2 мање од 36, и закључују да број у квадрату мора бити за 2 већи од 57. У оба случаја ученици се придржавају релационог схватања знака једнакости. Међутим, друга стратегија показује ниво релационог разумијевања у којем ученици, за поједностављивање рачунања, користе релације између бројева. Идентификовање када треба користити ове односе може промијенити заморне прорачуне, као што су: 5 · 499 и 1488+ 375 – 373, у релативно тривијалне, 5 · 500 – 5 и 1488 + 2. Крајњи циљ није да ученици знају поједностављивање прорачуна, мијењањем 499 у 500 или одузимање 373 од 375. Умјесто тога, препознавање зашто су ови приступи рачунања оправдани подразумијева схватање важних знања о броју и основних својстава операција са бројевима (Ibid). При томе, фокусирање на релационо разумијевање веома се разликује од учења скупа „рачунских трикова“. Иако, на примјер, знамо да се одузимањем 56 од 56 у задатку 87 + 56 – 56 = __ може поједноставити израчунавање, ово специфично знање није главни циљ. Разумијевање зашто је то могуће, подразумијева схватање односа сабирања и одузимања и примјену основних својстава сабирања и одузимања. Тако, да би се сложени прорачуни свели на једноставније, основа алгоритма рачунања садржи примјену основних својстава броја и рачунских операција (Carpenter et al., 2005).

Поред наведеног, Џејкобс и сарадници (Jacobs et al., 2007) указују да ученици имају више интуитивно знање о основним бројевним односима, али, углавном, ти односи нијесу експлицитно, систематски, испитани или изражени помоћу уопштавања. Штавише, Карпентер и колеге (према Jacobs et al., 2007) истичу да ученици основне школе могу својим ријечима да изразе генерализације и да их прикажу помоћу промјенљивих, на примјер: s+0 = s, p+r = r+p. Међутим, без разумијевања генерализације ученици не могу усвојити основна својства операција са бројевима. Тако су традиционални рачунски алгоритми засновани на овим својствима, али многи креирани алгоритми, због ефикасности и трансформација потребних у прорачунима, су обично скривени. Као последицу тога имамо да више ученика заврши

основну и средњу школу имајући мало могућности да се „помјери“ од израчунавања прецизираног низа поступака (Jacobs et al., 2007).

Франке, Карпентер и Бати (Franke, Carpenter & Battey, 2008) наводе примјере који наставницима могу послужити за испитивање својстава броја и рачунских операција. Један од начина је постављање тачних–нетачних бројевних једнакости, као што је 16 + 9 = 9 + 16, праћено питањем да ли је једнакост тачна без обзира на бројеве који се користе. Ово ученицима пружа прилику да експлицитно изнесу своје знање о комутативности и наведу разлоге о томе како знају да је то тачно и када је тачно. Комутативност код множења ученик показује, на примјер, ротирањем правоугаоника (димензија 3cm и 4cm), односно да се површина правоугаоник не мијења ако је правоугаоник ротиран, и тако 3 · 4 и 4 · 3 представљају исти број. Дакле, иако основцима недостаје нотација (симболички запис), која би представљала уопштавање бројева, они могу да користе аргументе који представљају опште облике доказивања (Ibid).

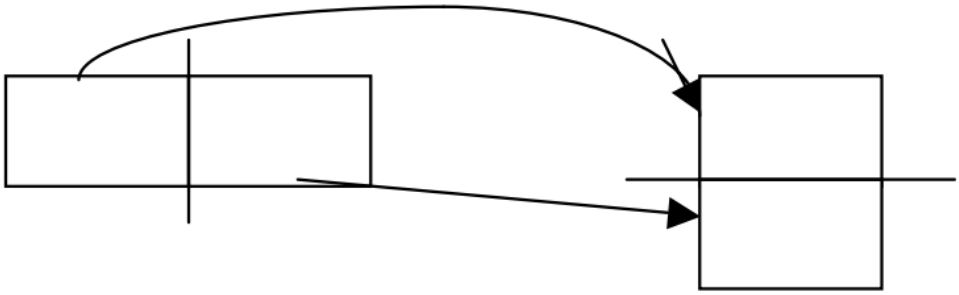
У покушајима да одговоре на питања попут: „Шта значи рећи ученику четвртог разреда да она или он „разумије својства комутативности, асоцијативности и дистрибутивности?“, Шифтер и колеге (Schifter et al., 2008) износе да ученици приликом учења о сабирању, одузимању, множењу и дијељењу, развијајући разумијевање ситуација које се моделују помоћу операција, користећи различите приказе, и, изводећи ефикасно рачунање, они, заправо, посматрају и коментаришу правилности у бројевном систему. Примјећујемо, на примјер, да прорачуни 72 – 38 и 74 – 40 дају исти резултат или да се узастопни одговори низа проблема 10 + 1, 10 + 2, 10 + 3, ...повећавају за 1. По њиховом мишљењу, такве правилности, које природно произлазе из активности ученика, постају основа не само за истраживање генерализација о броју и операцијама, већ и за праксу формулисања, тестирања и доказивања таквих генерализација (Ibid). Исто, Осборн и Кросвајт (према Schifter et al., 2008) су показали нови акценат на операцијама, који је у великој мјери био средство за пружање систематског, логичког образложења за алгебарске операције. Тако је навођење једнакости $7a + 2a = 9a$ не због чињенице, на примјер, да 7 јабука заједно са 2 јабуке износи 9 јабука, већ због дистрибутивног својства множења према сабирању.

У контексту дискусије својства комутативности, на примјер, за парове сабирака који чине 10, ученици трећег разреда су написали: 0 + 10, 1 + 9, 2 + 8, 3 + 7, 4 + 6 и 5 + 5, а затим закључили да могу замијенити сабирке. Они, такође, долазе до закључка: „иако се редослед сабирака замијенио, сабирци су остали исти, као и вриједност збира“ (Schifter et al., 2008:419). У оквиру ове класе проблема ученици проналазе оно што остаје константно унутар разлика: Иако се број објеката може мијењати од једног до другог проблема, имамо да кад год је рјешење x објеката типа 1 и y објекта типа 2, исто је као и рјешење y објеката типа 1 и x објеката типа 2. Сама чињеница да су овој појави ученици дали име „супротности“ указује да су формулисали генерализацију. На први поглед изгледа да су ученици открили $x + y = y + x$. За разумијевање својства сабирања, према Шифтеру и колегама (Ibid), ученици користе своје искуство сталности збира у физичком свијету. Такође, ученици рачунањем уочавају еквивалентност два израза. Док уче како да идентификују шта остаје исто међу стварима које се мијењају, ученици схватају да је приликом утврђивања једнакости важна вриједност броја, а не мјесто броја у изразу.

За разлику од адитивне комутативности, асоцијативност настаје груписањем и прегруписавањем сабирака, што је једноставно карактеристика проширења комутативног закона сабирања, тј. када се даје више сабирака они се могу додавати у било ком редоследу. Са становишта ученика, својства комутативности и асоцијативности сабирања нијесу одвојена, већ укључују исто питање: „Да ли је важан редослед додавања сабирака?“ Како се повећава број сабирака, ученици поново разматрају ово питање. Посебно у погледу множења, основцима нижег узраста ријетко се постављају проблеми са више чинилаца и зато немају прилику да уоче шта се дешава када се чиниоци прегрупишу. Описивање асоцијативног закона

множења не настаје из груписања и прегруписавања чиниоца, већ у преуређивању визуелних приказаних вриједности. У овом тренутку не инсистира се на експлицитном усвајању асоцијативног својства множења, већ се у старијим разредима ученици упознају са његовим формалним алгебарским записом, којем дају одређено значење (Ibid).

Поред тога, важно је истаћи интересовања ученика за сродна тврђења која слиједе из асоцијативног својства множења. На примјер, неки ученици схватају да када у изразу множења један чинилац удвоструче и други преполове, производ остаје непромијењен. Или, ако правоугаоник (Слика 15) пресијечемо напола (дужину смањимо 2 пута) и добијени правоугаоник преуредимо (ширину увећамо 2 пута), и даље имамо исту површину (Ibid).



Слика 15. Удвостручавањем једног и половљењем другог чиниоца производ се не мијења (Ibid:427).

Дакле, докази ученика се ослањају на њихове специфичне репрезентације јер су им оне најприступачније. Према томе, на нижем школском узрасту, ученици повезују правилности операција са њиховим основним својствима. Док испитују уопштавања која произилазе из њиховог рада, они продубљују своје разумијевање рачунских операција и користе визуелне приказе различитих односа рачунских операција. Када се ученици ослањају на емпиријске примјере, они не сматрају све случајеве неопходним за извођење уопштавања. Општим аргументима покушавају да покажу да је тврдња тачна за све релевантне случајеве, док им наивни уопштени аргументи служе као претпоставка да је дато математичко тврђење само по себи разумљиво, на примјер: „Када броју додамо нулу, увијек се добија исти број.“ Али, ученици би требало да дају уопштене аргументе за своја тврђења која се заснивају на скупу прихваћених претпоставки (Franke, Carpenter & Battey, 2008).

У случају разумијевања дистрибутивности, Шифтер и колеге (Schifter et al., 2008) наводе да ученици знају растављање једног чиниоца, а затим да сваки његов растављени „дио“ помноже са другим чиниоцем тако да укупни производи представљају одговор на почетни проблем. Иако немају назив за правило, они лако рачунају и објашњавају: $12 \cdot 6$ можете израчунати рјешавањем $(6 \cdot 6) + (6 \cdot 6)$, јер „то је шест група од шест и још шест група од шест, тако да је то и даље 12 шестица.“ Њихово разумијевање да проблеми множења подразумевају одређивање укупног броја у датом броју група фиксне вриједности пружа им могућност закључивања да, без обзира на начин груписања група, укупна вриједност остаје непромијењена. Дакле, ученици формулишу опште правило написано симболима: $(x + y)\, z = (xz) + (yz)$. Односно, чини се да је сазнање ученика о непромјенљивости цјелокупне вриједности основа закључивања и да су они близу формирања дистрибутивног закона множења према сабирању. Исто, Џејкобс и колеге (Jacobs et al., 2007) указују да ученици могу бити имплицитно свјесни својства дистрибутивности, којег користе као основу за процедуру множења вишецифрених бројева. Такође, Капут, Блантон и Морено (Kaput, Blanton & Moreno, 2008) истичу да се наведене радње својства дистрибутивности, засноване на аритметици, могу представити директно у смислу структуре система, као што је дистрибутивни закон множења према сабирању, у уобичајеним бројевним системима, који омогућава замјену: $a \cdot (b + c)$ са $a \cdot b + a \cdot c$ или обрнуто. Па ипак, када се ученици сусретну са оним што је из формалне

математичке перспективе исти концепт, али стављен у други контекст, они то не препознају. Заправо, како ученици развијају способности израчунавања и коришћења бројевног система, они не размишљају о примјени принципа. Умјесто тога, они развијају вишезначна „локална“ значења операција, постају успјешни у разним приказима и уче извођење и доказивање општих тврђења о бројевима и операцијама. Истовремено, они развијају своја знања о својствима одређених бројева (Schifter et al., 2008). У свијетлу овога, „разумијевање дистрибутивности“, за ученика трећег разреда, могли бисмо дефинисати као растављање једног чиниоца да би се извршило и успјешно објаснило множење.

Карпентер и сарадници (Carpenter et al., 2005) испитују примјене својства дистрибутивности, код ученика трећег разреда основне школе. Претходно, од првог до трећег разреда, ученици су имали прилику да развијају релационо разумијевање, при чему је од ученика тражено да објасне своје размишљање. Аутори наводе примјер у којем је, од дјевојчице Кели, током средине трећег разреда, тражено да израчуна производ $4 \cdot 7$. Кели је била прилично типичан примјер ученика коме треба више помоћи у учењу, али који учи са разумијевањем. Тако, за израчунавање производа бројева 4 и 7, Кели је користила својство дистрибутивности. Она је знала је да су двије седмице 14 и да би добила четири седмице сабрала је 14 и 14. Одговор 28 је добијен врло брзо. При том, како би се Кели подстакла да размисли о својству дистрибутивности, постављано је више проблема у контекстима, тако да се рјешење добија разбијањем задатог производа бројева на производе који су познати. То је Кели и објаснила, тј. како је задати проблем повезан са претходним и како је за израчунавање $4 \cdot 7$ користила проблеме које је већ ријешила.

Даље, Карпентер и сарадници (Ibid) испитују разумијевање својства дистрибутивности са већим бројевима и у различитим контекстима. Испитивање је спроведено путем интервјуа пред крај трећег разреда. Чињеница да ученик правилно примјењује својство дистрибутивности у једној ситуацији, не значи да ученик разумије како се то својство примјењује у другој ситуацији, те су због тога аутори поставили прилично различите проблеме. Разговор са учеником је започет тако што су постављени производи са мањим бројевима, са којима је ученик могао да рачуна ($8 \cdot 4$ и $8 \cdot 6$). Одговори ученика показују примјену својства дистрибутивности, тј. $8 \cdot 4 = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 16 + 16 = 32$ и $8 \cdot 6 = 6 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 36 + 12 = 48$. Потом, да би се испитало разумијевање овог својства, постављено је неколико тачних, нетачних бројевних израза, који су, такође, уско повезани са конкретним бројевима који су коришћени. Како је ученик лако одредио истинитост бројевне једнакости, а како је њено доказивање, $8 \cdot 6 = (6 \cdot 6) + (2 \cdot 6)$, било уско повезано са конкретним бројевима који су коришћени, постављен је проблем са већим бројевима, у којем је тражено да се одреди вриједност слова j како би једнакост била тачна: $(7 \cdot 156) + (9 \cdot 156) = (j \cdot 156)$. У овом случају, ученик је разумио својство дистрибутивности, јер уочава да вриједност у свакој групи остаје непромијењена, а да је потребно одредити број група. Следеће, испитано је да ли се својство дистрибутивности може проширити на ситуације када је број група исти, али се вриједност у свакој групи разликује, тј. постављен је проблем: Која је вриједност m да би једнакост била тачна: $52 \cdot 11 = (52 \cdot 10) + m$? (Ibid). Такође, рјешавањем овог проблема, ученик је доказао да већ почиње да уопштава разумијевање својства дистрибутивности. Заправо, рјешавање проблема у примјерима $(7 \cdot 156) + (9 \cdot 156) = (j \cdot 156)$ и $(52 \cdot 11) = (52 \cdot 10) + m$ није везано за примјену конкретних бројева, што потврђује да ученици широког спектра способности могу да размишљају о односима који укључују својство дистрибутивности и да упутства која су усредсређена на релационо разумијевање могу подстаћи развој основних аритметичких појмова и вјештина.

Међутим, како изгледа када ученици у учењу алгебре немају довољно знања о својствима операција? Шта се дешава када се у први план истиче брзина рачунања и меморисање алгоритама? Многи наставници алгебре примећују да ученици понављају исте грешке, на пример:

$- 3 + - 5 = 8$

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$

$2 (xy) = (2x) (2y)$ (Russell, Schifter & Bastable, 2011:45).

Ове грешке могу бити трајне, чак и поред сталног исправљања. Претпоставља се да ученици који гријеше у обрасцима симбола, заправо, виде њихову сличност са другим, тачним правилима. У случају - 3 + - 5 = 8 ученици се ослањају на памћење поступака рачунања. Они, за неформално изражено правило „два негатива броја дају позитиван број“ не познају начине провјеравања, односно, да се ово правило примјењује на множење два негативна броја, али не и на збир та два броја. Ученици који праве другу грешку, $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, погрешно разумију експонент, као број који се понаша као фактор, тако да се $(a + b)^2$ тумачи на исти начин на који би протумачили 2 $(a + b)$. У трећем, горе наведеном примјеру, ученици примјењују правило да „множе све унутар заграда са бројем изван заграда“, што би важило за 2 (x + у), али не и за 2 (xy) (Ibid). Стога је важно да наставници анализом наведених грешака могу уочити начине на који ученици изграђују својства операција. То је од суштинског значаја јер се током нижих разреда отварају могућности ученика у испитивању општих својстава рачунских операција. Тако Расел, Шифтер и Бастебл (Ibid) наводе два аспекта оваквог уопштавања:

- изграђивање одређених општих тврдњи на основу правилности које ученици примјећују у својствима бројева и операција;
- развијање математичких аргумената како би се доказао општи захтјев извођења уопшатавања на класи бројева.

Дакле, ученици овог узраста не познају начине формалног доказивања. Оно што им стоји на располагању су прикази операција – цртежи, модели или контексти прича, који се могу користити за представљање одређених бројевних израза, али се такође могу проширити тако што се моделују и доказују опште тврдње. Да би користили приказе за математичке аргументе, ученици морају развити ефикасне слике операција, тј. слике које оличавају њихова својства (Ibid). Како ученици стекну искуство у изграђивању, представљању и доказивању генерализација у контексту броја и операција, они користе слике, моделе, дијаграме или контекст прича, који представљају концепт операција и могу да их примијене на класу примјера (Ibid).

Као што се види истраживање ових аспеката аритметике, разумијевање својстава рачунских операција, уопштавање и доказивање, проширивање бројевног система и коришћење симболичког записа са разумијевањем, ученицима пружа начин да преиспитају и проширују основна схватања о својствима броја и рачунских операција, и самим тим подстичу развој алгебарског мишљења ученика.

4.4. Увођење промјенљиве у почетну наставу математике

У настави математике, ученици нижег школског узраста, најчешће, изводе закључке на основу активности са бројевима. Увођење симбола и прелазак на употребу алгебарских записа нуди нове начине сагледавања математичких односа, повезивање нових симбола са оним што они представљају, као и учење нових правила. Из тог разлога, иако се чини да је лако прећи на употребу симбола, искуства наставника и ученика, у одређеним случајевима почетне наставе математике, показују да треба бити опрезан са раним увођењем алгебарских записа. Штавише, Чајклин (према Wang, 2015) упућује на доказе да, посматрано из когнитивне перспективе, ученици показују неразумијевање у прецизирању односа међу промјенљивим. Радови, Вагнера (према Lins & Kaput, 2004), о интерпретацији промјенљивих, и, Венге (Ibid), о читању алгебарских израза, показују недостатак и површну „природу“ компетенције ученика у операцијама са алгебарским симболима и њиховој интерпретацији. Осим тога, од суштинске важности за развој алгебарског мишљења ученика је разумијевање концепта еквиваленције и промјенљиве, о којима већина почетника алгебре нема довољно знања (Knuth et al., 2011).

Стога, употреба словних симбола представља тежак изазов за ученике и није изненађујуће да концепт промјенљиве добија значајну пажњу у учењу и коришћењу алгебре. На пример, у често цитираној Куцмановој студији (према Knuth et al., 2011) показало се да је већина ученика узраста 13, 14 и 15 година словне симболе сматрала објектима (тј. словни симбол се тумачи као ознака за неки предмет или као сам предмет). Мање ученика симболе је разумјело као непознату (тј. словни симбол се тумачи као непознати број са фиксном вриједношћу), а још мање као уопштене бројеве (тј. словни симбол представља више вриједности) или као промјенљиву (тј. словни симбол истовремено представља низ бројева). Даље, његова студија указује да се неразумијевање словних симбола одражава на приступе симболизовања односа у рјешавању проблема. Слично овоме, имамо да и поред упознавања са упутствима основне алгебре, ученици често не разумију употребу слова која представљају непознату. На примјер, у наставном експерименту, Херсковикс и Линчевски (према Wang, 2015) показали су да, чак и након упознавања са концептом површине, неки ученици не препознају $8 \cdot a$ као површину одређеног правоугаоника осим ако није написана формула за површину „$S = 8 \cdot a$”.

Група радова усредсређена је на упознавање ученика са важним концептом промјенљиве. У питању је увођење концепта промјенљиве много прије него што се ученици упознају са формалним алгебарском записом, тј. проналажење алгебарског у аритметици, што може послужити као основа за развијање алгебарског мишљења ученика. Сасвим недавно, Балачеф (Balacheff, 2001) предлаже разлику између симболичке аритметике и алгебре: Свијет рјешавања ученика садржаће симболичке приказе (можемо их назвати и алгебарским), као и средства за њихово манипулисање, али контролне структуре – све кроз процес рјешавања – и даље ће се односити на спољашњи референтни свијет везан за ситуацију исказа проблема. Алгебра није ту, али умјесто ње види се функционисање симболичке аритметике. У том погледу, Фуџи и Стивенс (према Lins & Kaput, 2004:58) предлажу појам квази–промјенљивих, а то су бројеви у оквиру „бројевног израза или једнакости који указују на основни математички однос који остаје тачан без обзира на бројеве који се користе“. Примјер за такве бројевне једнакости је: $78 – 49 + 49 = 78$, гдје се за бројеве 78 и 49 може рећи да се понашају као квази–промјенљиве, указујући на однос да број, на примјер 78, остаје непромијењен уколико му је нешто, на примјер 49, одузето и онда поново то, тј. 49, додато. Намјера није да се ученици упознају са изразима попут $a – b + b = a$, већ да ученици разумију да овај израз припада типу бројевних једнакости која је тачна, без обзира на то који се број одузме и поново дода.

Према Карпентеру и колегама (Carpenter et al., 2005), суштина аритметике не подразумијева једнакост бесмислених процедура и неминовно учење алгебре са разумијевањем. Напротив, и аритметички алгоритми и поступци рјешавања алгебарских

једначина могу се подучавати напамет или са разумијевањем. На пример, размотримо задатак сабирања 40 + 50, односно сабирање 4 десетице са 5 десетица. Рачунање се заснива на истим принципима као и сабирање $4y + 5y$. У оба случаја, својство дистрибутивности је основа за сабирање 4 и 5. Ове рачунске операције се могу представити као:

$40 + 50 = 4 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = (4 + 5) \cdot 10 = 9 \cdot 10$ и

$4y + 5y = (4 + 5)y = 9y$ (Ibid).

Разматрањем питања једначине у оквиру аритметике, као на доминантан стил задатка, показало се да ученици, уопште, једначине рјешавају механички, аритметички, избјегавајући, или заобилазећи било какво алгебарско размишљање, односно разумијевање откривања непознате (Mason, 2008). На примјер, уобичајени циљ постављања низа задатака, познат као повезаност бројева до 10, као што је: 4 + 6 = ?, 3 + 7 = ?, 2 + 8 = ?, 1 + 9 = ? јесте да ученици аутоматизују ове парове. Али, постоји много важнија генерализација: $(x + d) + (y - d) = x + y$, која се очекује да је ученици усвоје касније, приликом одузимања. Овдје, значајна педагошка питања која се постављају су да ли су ове генерализације имплицитне, да ли су ученици, уз подстицање, способни да стварају различите генерализације, или су уопштавања наметнута ученицима, прије него што их сами открију (Ibid).

Рад Карахара, Шлимана и Шварца (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008) сугерише да се пажљивије размотри како ученици изграђују разумијевање синтаксе у алгебри, као и активности над симболима из више лингвистичке перспективе, обраћајући пажњу на интеракцију између начина на који се симболи визуелно рашчлањују и начина на који су математички конструисани. То значи да је неопходно ученицима помоћи да користе различите репрезентације појма једначине, тј. помоћу симбола и ријечи. Такође, важно је учење алгебарског језика, значење кључних ријечи и израза, којима се подстиче развој алгебарског мишљења (Li, Peng & Song, 2011).

Поред наведеног, наставници често откривају да почетници алгебре нијесу мотивисани за алгебарске вјештине, потребне за рјешавање текстуалних проблема. То је дјелимично и због чињенице, како наводе Килпатрик, Сфаворд и Финдел (према Wang, 2015), што пружањем конкретних и визуелних приказа за непознате вриједности, као и аритметичких поступака рјешавања непознатог, ученици избјегавају репрезентативне и трансформационе активности уопштавања и доказивања. Такође, испитивањем утицаја претходних аритметичких знања, ученика основне школе из Сингапура, за рјешавање текстуалних проблема показало се да су текстуални задаци алгебре учени аритметичким методама, као што су технике бројања, погађања и провјеравања, рад уназад, груписање и модел метода (Khng & Lee, 2009; према Wang, 2015). Ученици су били врло вјешти у овим методама и сматрају их доминантним стратегијама рјешавања. Сходно томе, када су им представљани текстуални проблеми, они су више размишљали о стратегијама рјешавања него о постављању алгебарске једначине. Тако, иако алгебарска једначина игра кључну улогу у учењу алгебре, ученици, заиста, рјешавањем алгебарских једначина први пут схватају значење једнакости из својих претходних аритметичких знања. Поред тога, студије сугеришу да већина ученика наилази на проблеме у схватању синтаксе или структуре алгебарских израза и не разумију поступке за трансформисање једначина, ни разлоге извођења трансформација. Ови и други проблеми постају сложенији како једначине постају сложеније и, посебно, када ученици покушавају да ријеше текстуалне проблеме (Li, Peng & Song, 2011).

Такође, више студија показује да је концепт једначине изазов за ученике због проблема који се јављају у извођењу операција са непознатом, као и због схватања знака једнакости као оператора, односно сигнала „уради нешто“, а не релационог симбола еквиваленције или истовјетности лијеве и десне стране бројевне једнакости. Рјешавање једначина има другачији карактер од примјене алгоритма са бројевима. Алгебарска једначина рјешава се узастопним

трансформацијама једначине, а коначна трансформација резултира једначином која изражава релацију (x = неки број или бројеви), а не један изолован број (Carpenter et al., 2005:54). Исто, Џејкобс и колеге (Jacobs et al., 2007) указују да алгебарске једначине карактерише веза између два израза и рјешавају се сукцесивном трансформацијом једначине. Ученици треба да схвате да свака трансформација резултира једначином, која је еквивалентна првој. Поред тога, Киеран (према Wang, 2015) истиче да формални приступ који се користи у рјешавању текстуалних проблема подразумијева формулисање једначине или система једначина и операција.

Даље, Карахер, Шлиман и Шварц (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008) указују на упечатљиво другачији начин разумијевања појма једначине, важним за рано учење алгебре. Наиме, једначину приказују као изједначавање двију функција. Тако једначина написана стандардним симболичким записом, изједначавањем двију функција, $w + 8 = 3 \cdot w$ је тачна само за случај да је $w = 4$. То је случај када су функције „парне", када су „једнаке у табели", када се (графикони) „укрсте" или су „на истом мјесту", када „имају исту вриједност" и тако даље. У супротном, једначина није тачна, графици се раздвајају, „постају другачији" и тако даље. Такође, они истичу разумијевање слова као промјенљиве у рјешавању једначина, на примјер слово a у једначини $5 + a = 7$ представља промјенљиву, а не појединачну вриједност. Једначина је тачна само када је $a = 2$, али a је и даље промјенљива (Ibid). При овоме, непознате и промјенљиве не третирају се као фундаментално различите, већ више да је непозната промјенљива која је из неког разлога ограничена на једну вриједност. Такође, нумеричко тумачење једначине аутори приказују као једнакост лијевог и десног члана, од којих сваки представља један број. Ако се испостави да је број на лијевој страни једнакости исти као број на десној страни, једначина је тачна. Ако се број на лијевој страни разликује од броја на десној, онда је једначина нетачна. Нерјешива једначина назива се неодређена једначина (Ibid).

Такође, Капут, Блантон и Морено (Kaput, Blanton & Moreno, 2008) размотрили су перспективе симболизације у рјешавању једначина. Након ситуације у којој су ученици рјешавали бројевну једнакост, као што је 8 + _ = 13, или, увођењем слова које представља промјенљиву, 8 + x = 13, примијетили су да је одговор увијек облика, 13 – 8, то јест, усмени одговор, „да бисте добили одговор, одузимате лијеви број од десног броја." Аутори запажају да ученици дају рјешења унутар система симбола са бројевним изразима у зависности од њихове аритметичке способности. По овоме, процес изграђивање правила, генерализације, односи се на паралелни скуп бројевних израза, на примјер код сабирања, и готово увијек пролази кроз извођење радње али не и кроз њено формално усвајање. Такође, јавља се у облику којим се предвиђа следећи број у обрасцу, а да се образац не може експлицитно усвојити као нека врста формуле (Ibid).

Истраживања у Кини показују позитивне налазе учења алгебарских једначина са варијацијама. Настава алгебарских једначина са варијацијама детаљно је приказана постепеним развојем знања о једначинама (увођење једначина, разумијевање једначина, рјешавање једначина и примјена једначина у рјешавању проблема). Као што су истакли Гу и сарадници (према Li, Peng & Song, 2011), настава са варијацијама подстиче развој разумијевања концепта из више перспектива. На примјер, концепт једначине може се представити коришћењем визуелних или специфичних варијација. Суштина концепта се истиче упоређивањем стандардних облика са нестандардним, а проблеми разумијевања концепта могу се превазићи употребом супротних примјера. Штавише, користећи наставне активности са варијацијама, ученици разумију како се концепти генеришу и развијају, стичу представу и стратегију рјешавања проблема, а затим граде хијерархијски однос између различитих концепата. На примјер, процесом „процедуралне варијације", наставник креира оперативни модел концепта једначине, како би приближио формирање концепта једначине, те помогао рјешавање „слојевитих" проблема, формулисао стратегије једначина за рјешавање проблема и усвајање више рјешења или варијација за један проблем, или једно рјешење за вишеструке проблеме, тако да ученици стичу посебна знања у рјешавању проблема помоћу

једначина (Li, Peng & Song, 2011:533). Анализа процедуралних варијација ученицима је омогућила истраживање „рјешавања проблема једначином“. У процесу моделовања једначина, прикази помажу постепено продубљивање разумијевања постављених питања, затим, значење језика је корисно за разумијевање садржаја, сликовни приказ служи за визуелизацију односа између различитих величина, а табеларни приказ за успостављање квантитативних односа. Тако, свеобухватно разматрање и конструкција квантитативних односа ученицима помаже да у потпуности схвате процедуралне операције „рјешавања проблема помоћу једначина“ (Ibid). Дакле, настава алгебарских једначина заснована на одговарајућим варијацијама, представљена помоћу више варијантни „слојевитих“ проблема, постаје простор који се састоји од систематски и намјерно различитих проблема. То помаже ученицима разумијевање концепта једначине и стварање стратегија рјешавања проблема, чиме учење алгебарских једначина постаје смислено. На примјер, ученици, идентификовањем различитих варијација једначина, јасно су препознали карактеристике концептуалног приказа једначина. То не само да помаже разумијевање „двију основа“, тј. основно знање и вјештине рјешавања алгебарских једначина, већ, такође, побољшава способности рјешавања проблема ученика (Ibid).

У настави са варијацијама конструисања једначина, у контексту текстуалних проблема, наводи се неколико корака за рјешавање проблема помоћу једначина. Прво, настава је осмишљена тако да се ученицима пружа основно знање, формирање концепта, односно почетно формирање концепта једначине, затим разумијевање апстрактне „природе“ концепта једначине и повезивање концепта једначине у алгебарски концепти систем, како би се разјаснио положај и функција концепта једначине у овом систему. Друго, ученици уче како да анализирају однос између промјенљивих, тј. илуструју однос кроз ријечи, дијаграме, табеле и симболе. Треће, од ученика се тражи да запишу једначину са непознатим и познатим вриједностима. Због тога је неопходно подучавати концепт једначине са варијацијама, за конструисање структуре концепата једначине, и, развијање способности примјене концепта система једначине, чиме се развија способност алгебарског мишљења ученика.

Функционални приступ једначини, односно, „природно продужење“ развоја концепта промјенљиве, користи се за представљање односа, и приказан је у Програму повезане математике (Connected Mathematics Program – CMP). Претпоставка овог програма јесте да линеарна једначина са једном промјенљивом, у суштини, је специфична инстанца одговарајуће линеарне једначине са двије промјенљиве. Овај програм, најприје, умјесто примјене алгебарских једначина, везе између промјенљивих изражава графиконима и табелама. Тако се ученици уводе у рјешавање линеарних једначина стварањем визуелног приказа, односно проналажењем рјешења помоћу графикона. Касније, када се уводе једначине, акценат је на њиховој употреби за описивање ситуација стварног живота. Умјесто да се једначине виде једноставно као предмети којима се манипулише, ученици уче да једначине често описују везе између различитих величина, које произилазе из значајних контекстуализованих ситуација (Cai et al., 2011). Заправо, уводе се у оквиру једног контекстуализованог примјера, гдје је сваки од корака, у процесу рјешавања једначина, праћен наративом који демонстрира везу између онога што се дешава у процедури и ситуације у стварном животу. Тиме, CMP потврђује рјешавање једначина кроз контекстуално стварање смисла симболичке методе. Контекст из стварног живота ученицима помаже да разумију значење сваког корака симболичке методе рјешавања једначина, укључујући објашњење зашто се користе инверзне операције, као што је приказано у табели (Табела 5).

Табела 5. Примјер рјешавања једначине – СМР (Ibid:167)

Продавница „Неограничене залихе“ омогућава сваком купцу који купи робу у вриједности преко 30 долара да је плати на рате. Купац прво плаћа 30 долара, а затим плаћа 15 долара мјесечно док све не исплати. Претпоставимо да купите цд-дискове од 195 долара у ратама. Колико је мјесеци потребно за исплаћивање рата? Опишите како сте пронашли одговор.

Размишљање	Симболички запис
„Желим да купим цд–дискове који коштају 195 долара. Да би се платило у ратама, мора се уплатити прво 30 долара и 15 долара мјесечно.“	$195 = 30 + 15N$
„Након што уплатим депозит од 30 долара, ово могу да одузмем од од укупног трошка. Да би једнакост остала непромијењена, морам одузети 30 са обје стране.”	$195 - 30 = 30 - 30 + 15N$
„Сада дугујем 165 долара, које ћу плаћати у мјесечним ратама од по 15 долара.“	$165 = 15N$
„Морам да одвојим 165 долара на исплате од по 15 долара. То значи да 165 треба подијелити са 15. Да би једнакост остала непромијењена, морам обје стране подијелити са 15.”	$\frac{165}{15} = \frac{15N}{15}$
„Постоји 11 група од 15 долара у 165 долара, тако да је за исплаћивање рата потребно 11 мјесеци.“	$11 = N.$

Умјесто тога да наставни план и програм није СМР, за рјешавање једначина уводи се поступак проналажења броја, како би једначина постала истинит исказ. Конкретно, рјешавање једначине описано је као замјена промјенљиве са вриједношћу (рјешењем једначине), која чини бројевну једнакост тачном. Дакле, СМР програм наглашава разумијевање односа између промјенљивих, а не стицање вјештина потребних за рјешавање једначина (Ibid).

С друге стране, за концепт неједначине најчешће је присутно погрешно схватање да се рјешење неједначине добија пуким рјешавањем одговарајуће једначине, осим што се умјесто знака једнакости користи симбол неједнакости. То потврђују анализе грешака Вајавучјемеја и Клементса (Vaiyavutjamai & Clements, 2006) које су на свим задацима рјешавања неједначина показале тенденцију „давања рјешења за одговарајућу једначину“. И поред тога што долазе до тачних одговора и показују тачан поступак рјешавања неједначина, ученици су, ипак, у „оквирима за одговоре“ написали појединачне бројеве као одговоре. Тако, на примјер, за $3x \leq 6$, чак и ако је ученик написао нешто попут „$3x / 3 \leq 6/3$“ и „$x \leq 2$“, број „2“ био би све што би се појавило у пољу за одговоре. Интервјуи су открили да је, уопште, већина испитаника мислила да неједначина треба да има само једно нумеричко рјешење. За њих исказ попут „$x \geq 1$“ не може бити коначни одговор за $3 - 4x \leq 6x - 7$. Годинама су учили да „рјешавају за x“ и увјерени су да одговор мора бити један број (Ibid). Осим што манипулишу симболима да би добили „праве одговоре“, већина ученика, заправо, није знала зашто су то радили. Наиме, ученици су сматрали да је број на десној страни завршног реда рјешење неједначине. Осим тога, ученици са високим постигнућима су мислили да се рјешење неједначине састоји од низа

бројева, али у већини случајева није им било јасно шта то значи, у односу на почетну неједнакост. Подаци из интервјуа су открили да испитаници често нијесу знали да праве грешке и како могу да провјере своја рјешења (Ibid). Боеро и Базини (Boero & Bazzini, 2004) тврде, на примјер, да се, у настави, за неједнакости не узима у обзир вријеме објашњења концепта функције, већ се подразумијева тривијализација ове теме, што резултира низом рутинских поступака, које ученици не разумију, а тиме не могу да их правилно анализирају и провјеравају. Такође, додају „последица овог приступа јесте да ученици не могу савладати неједначине које се не уклапају у научене шеме“. Дакле, највећи дио проблема, на које ученици наилазе у рјешавању неједначина, најчешће произилазе из семантичке сложености неједначине.

Дакле, пренаглашавањем односа између једначина и неједначина, ученици су очигледно препознали да постоји јака веза између рјешавања једначина и њима одговарајућих неједначина. То би био позитиван резултат, јер када се рјешава неједначина треба размислити како се рјешења те неједначине односе на рјешење одговарајуће једначине. Међутим, анализе Елертона и Клементса (Ellerton & Clements, 2011) показују да су односи између рјешавања алгебарских неједначина и одговарајућих једначина постали толико наглашени, у настави и учењу неједначина, да су више отежавали, него што су помагали, у рјешавању неједначина. Стога, Тсамир и сарадници (Tsamir, Almog & Tirosh, 1998) инсистирају да се једначине и неједначине од почетка морају изричито подучавати у контексту развоја концепта функције. Такав аргумент указује на потребу за већим теоријским оквиром учења алгебре у оквиру једначина и неједначина (Ibid). Штавише, да би се схватиле методе рјешавања апликативних проблема помоћу увођења промјенљиве, тј. алгебарског приступа, те испитале структуре алгебарског моделовања и подстакле способности за дивергентно мишљење, потребно је мијењати проблеме и тиме мијењати услове и предвиђене резултате, односно усвојити такве концептуалне варијације као што су језичке и визуелне репрезентације (физички објекти, дијаграми итд.).

Дакле, да би се проблем дубље схватио и ученици изградили симболичке представе, потребно је усвојити процедуралне варијације од конкретних до апстрактних репрезентација. На примјер, ученици се подстичу или да постављају питања, а затим одговарају на питања након уклањања предвиђених резултата или да креирају различите врсте практичних проблема баш као и питања заснована на једначинима и неједначинама. Сходно наведеним концептима увођења једначина и неједначина у почетну наставу математике, ученицима се помаже да испитају инваријантне карактеристике у оквиру варијантног процеса, наиме, модел алгебарске структуре, и тако формирају начин алгебарског мишљења. Алгебарске концепте карактеришу конкретна операција, апстрактна структура и широка примјена и обрнуто, што значи да би се учење алгебарских концепата требало усредсредити на оперативне, структуриране и примјенљиве аспекте постављања проблема.

5. Досадашња емпиријска истраживања о вредновању постигнућа ученика у почетној настави математике

Различити приступи постављања проблема одсликавају различите могућности рјешавања проблема, као и вредновања постигнућа ученика у настави математике. У поглављу *Постављање проблема* описани су резулати истраживања у којима аутори потврђују позитиван утицај постављања проблема на развој математичких знања ученика. При том, промовише се шира примјена математичког моделовања у настави математике. Међутим, када је у питању добијање валидне и поуздане оцјене о нивоу остварених постигнућа ученика у процесу рјешавања проблема, посебно постављања проблема ученика, наставници наилазе на бројне проблеме оцјењивања. Али, ако постављени проблеми желимо да буду дио наставе, они морају да буду оцијењени, јер како Нис (према Reit, 2017) истиче оно што оцијенимо је оно што смо добили. У прилог овоме јавља се потреба за примјеном аутентичних техника оцјењивања. Стога, у наредном дијелу описујемо: резултате истраживања о предностима рјешавања проблема ученика, тј. значају развоја математичких знања рјешавањем проблема, затим, резултате праћења и вредновања постигнућа ученика и, конкретно, налазе истраживања у вредновању постигнућа из математике ученика четвртог разреда, у оквиру међународног и регионалног контекста.

Испитивање стратегија које ученици примјењују у рјешавању проблема и успјешност њихове примјене показује развојни статус ученика у математичком размишљању и резоновању (Jonassen, 2000). Заправо, ниво размишљања и расуђивања ученика може се сазнати испитивањем примијењене стратегије рјешавања, приказом математичког знања из домена, представљањем процеса рјешавања, доказивањем математичког резоновања и постављањем нових проблема заснованих на проблемској ситуацији. Ови когнитивни аспекти су значајни у когнитивној психологији уопште, а посебно у рјешавању математичких проблема. Тако, вјештина рјешавања математичких проблема зависи од усвајања, избора и примјене стратегија специфичних за домен и од општих когнитивних стратегија. Дакле, компетенција коришћења одговарајућих стратегија рјешавања проблема одражава степен математичког знања ученика. При том, успјешност рјешавања проблема, у великој мјери, зависи од формулације постављеног проблема. Тако, Џонасен (Ibid) истиче да стручњаци имају тенденцију да постављају проблеме засноване на концептима и принципима, док почетници препознају само површинске карактеристике проблема. Показало се да приликом постављања проблема стручњака, ученици боље разумију процесе рјешавања (Ibid).

Исто, Шоенфелд (према Elia, Van den Heuvel–Panhuizen & Kolovou, 2009) указује на стратегије рјешавања проблема као на основни аспект математичког мишљења. Са практичне тачке гледишта, знање о наведеном, тј. испитивање стратегија рјешавања проблема, доприноси тумачењу индивидуалних разлика у рјешавању проблема и даје предлоге како подржати развој ученика у рјешавању проблема (Ibid). Тако, истраживања Елиа, Ван ден Хеувел Панхуизена и Коловиа (Elia, Van den Heuvel–Panhuizen & Kolovou, 2009) показују два различита аспекта флексибилности стратегија у рјешавању проблема ученика: флексибилност стратегија између различитих проблема и унутар проблема. У овој студији испитана је употреба и флексибилност стратегија високих математичких постигнућа у 4. разреду, при рјешавању нерутинских проблема, који су подразумијевали ко–варијацију различитих промјенљивих. Такође, испитани су односи употребе стратегија и флексибилност стратегија са успјехом рјешавања ових проблема. Резултати ове студије су показали да су ученици који су постигли флексибилност стратегија између проблема успјешнији у рјешавању проблема од ученика који су истрајали са примјеном исте стратегије. Поред тога, постигнути су бољи резултати у рјешавању проблема са већом флексибилношћу стратегија између проблема. Могуће објашњење, по Бародију (према Elia, Van den Heuvel–Panhuizen & Kolovou, 2009), јесте да ученици који су показали флексибилност стратегије између проблема, нијесу само посједовали више стратегија, већ су разумјели образложење ових стратегија, па самим тим

флексибилно модификовали поступке, тако да су успјешно коришћени у различитим контекстима. Упркос високој математичкој компетенцији ученика, у рјешењима је слабо заступљена хеуристичка стратегија. Овај резултат је у складу са налазима студија које сугеришу да ученици ријетко користе хеуристику, када се суочавају са непознатим и сложеним проблемима (Ibid). При овоме, резултати новијих студија пружили су доказе употребе хеуристичких стратегија, као средства за побољшање рјешавања проблема. Конкретно, утврђено је да способност ученика да испробају приступе могућих рјешења и да процијене могући исход сваког од њих игра важну улогу у ефикасном доношењу одлука и успјеху рјешавања проблема. Штавише, Вершафел и сарадници (Verschaffel et al., 1999) су открили да упутства за рјешавање проблема, која су постављена ученицима петог разреда, доводе до побољшања способности рјешавања математичких проблема и до примјене стратегија рјешавања. Исто, резултатима истраживања Чарлса и Лестера (према Lester, 2013), које је укључило неколико стотина ученика петог и седмог разреда, током једне школске године, показало се да упутства постављених задатака ученицима значајно помажу у односу на кључне компоненте процеса рјешавања проблема.

Што се тиче флексибилности стратегија рјешавања унутар проблема, у поменутом истраживању Елиа, Ван ден Хеувел Панхуизена и Коловиа (Elia, Van den Heuvel–Panhuizen & Kolovou, 2009), већина ученика, која је покушала да понуди рјешење, користила је, углавном, једну стратегију и није успјела да размотри било какву алтернативну или комплементарну стратегију. То је показатељ недостатка способности ученика да се осврну на прикладност или адекватност своје првобитно одабране стратегије и да користе алтернативну или комплементарну стратегију, која би могла довести до тачног одговора. Систематско навођење могућих рјешења и доказивање или провјера одговора биле су друге двије стратегије које су могле да доведу до успјеха у неким проблемима. Овај резултат има практичне импликације за подучавање нерутинског рјешавања проблема у основној школи. Када рјешавају различите нерутинске проблеме, чак и сличне структуре, ученицима овог узраста могло би бити корисно и ефикасно, и вјероватно мање фрустрирајуће, употреба различитих стратегија рјешавања (Ibid).

Сиеглер (према McNeil et al., 2019) указује да ученици који су отворенији за испробавање нових стратегија, на новим математичким проблемима, спремнији су да истраже стратешки простор, који може унаприједити учење. То је спремност да покушају нешто другачије, за разлику од пуког праћења онога што је учитељ приказао. Примјена уопштавања за развој математичког знања истакнута је у истраживању Шифтера и колега (Schifter et al., 2008). Они истичу да уопштавања помажу ученицима да развију „навику ума да гледају даље од активности“ и траже нешто више, неки шири математички контекст у који ће се уклопити стечено знање. Изричитим изношењем уопштавања, а затим проналажењем примјера и супротних примјера, они више размишљају о принципима, који су у основи рада са бројем и операцијама. Генерализације помажу ученицима да сагледају везе између бројева, као и између операција, чиме стално шире границе и идеје са којима раде. Осим тога, појављује се могућност да ученици сами „дођу“ до уопштавања која су заснована на сопственим поступцима, и да их доказују, корестећи знања о бројевима, физичким материјалима или визуелним приказима.

Поред тога што наставници постављају проблеме, размотрен је захтјев самосталног постављања проблема ученика. На примјер, Силвер (Silver, 1994) наводи да се од ученика готово увијек тражи да ријеше проблеме из уџбеника или које је поставио наставник и да ученици ријетко имају могућност самосталног постављања проблема из математике. Према Силверу (Ibid) традиционални модели, преноса/пријема упутстава и учења математике, наглашавали су пасивно усвајање знања ученика, као резултата трансмисионе наставе, и били су компатибилни са педагогијом која одговорност постављања проблема искључиво поставља у руке наставника и аутора уџбеника. С друге стране, савремене конструктивистичке теорије

поучавања и учења препознају важност ученика који постављају проблем. Тако, Виноград (према Silver, 1994) истиче примјер наставе математике који наглашава постављање проблема. Он је ученицима петог разреда пружио једногодишње искуство у којем су састављали, затим са вршњацима размјењивали и рјешавали оригиналне текстуалне задатке. Виноград (Ibid) није имао упоредну групу, али је истакао уопште позитиван утицај искуства постављања проблема на постигнућа ученика, а посебно на њихову наклоност према математици.

Такође, значајно је приказати до сада истражене праксе вредновања у настави математике. У поглављу *Вредновање у настави математике* навели смо начине вредновања постигнућа ученика. Истакнуто је да се могу препознати примјери концептуалног разумијевања, али да је тешко створити свеобухватне, поуздане начине оцјењивања. У том погледу описано је вредновање новијег датума, тј. примјена компаративне процјене, као валидне мјере појмовног разумијевања. Заговорници компаративне процјене тврде да се овај вид оцјењивања може користити за оцјену концептуалног разумијевања−аспект математике за који се зна да је тешко оцијенити користећи традиционално оцјењивање. Стога, компаративна процјена открива различите способности ученика. Узимање овог закључка резултира претпоставком да би неки ученици требало да се боље остварују компаративном процјеном. Осим тога, у наведеном поглављу смо истакли недавна истраживања према којима се оцјењивање у основним школама углавном спроводи у сумативне сврхе, а не у сврху развоја знања ученика. Да би се даље проучио овај однос наставника према начину оцјењивања, резултатима истраживања Грапина и Сајака (Grapin and Sayac, 2017) се показало да модификације наставних планова и програма и институција подстичу наставнике математике на оцјењивање компетенција, а не само знања. Такав развој оцјењивања за учење и помоћ ученицима да боље уче математику захтијева наставника који оцјењивање „виде“ као дио дидактичког процеса у којем се добијене информације оцјењивања користе за прилагођавање њихових наставних стратегија. Исто, Сајак (према Grapin and Sayac, 2017) упућује да су оцјене из математике углавном збирне и да их наставници користе као резултат за извјештај на крају одређеног периода. Чини се да само извршавање налога за оцјењивање не пружа довољно информација за бољу регулацију наставе. То значи да је кључна одговорност на наставнику, односно да поред алата за оцјењивање, наставници морају да имају знање о математичким садржајима.

Даље, студије показују да и поред тога што вредновање чини велики дио наставне праксе, учитељи су и даље неадекватно припремљени за оцјењивање знања, вјештина и способности ученика. Алеово (према Teledahl, 2017) истраживање, такође, показује да је пракса оцјењивања наставника критикована због тога што не испуњава стандарде поузданости, објективности и ваљаности. На примјер, Тан (према Black and Wiliam, 1998) описује ситуације током курса за студенте прве године студија, у којима је прикупио доказе да су чести сумативни тестови имали дубок негативан утицај на њихово учење. Тестови су захтијевали само вјештине ниског нивоа и на тај начин кочили концептуални развој високог нивоа, те да ученици нијесу учили да примјењују теорију у пракси. С друге стране, Бангет–Дровнс са сарадницима (Ibid), метаанализом 40 релевантних студија, показују да се способности ученика побољшавају честим тестирањем, као и да су неколико кратких тестова ефикаснији од дужих. У студији Фаинберга (према Wiliam, 2011), оцјењивање наставника примјеном референтних норми показује да ученици више уче када их подучавају наставници који успјешност ученика оцјењују у односу на претходне резултате (појединачна референтна норма) него ли када наставници упоређују резултате ученика са другим ученицима у разреду (социјална референтна норма).

Гурхи (Gurhy, 2017) је испитивала праксу формативног вредновања у поучавању и учењу математике четвртог разреда основне школе у Ирској. Конкретно, истражила је како принципи, стратегије формативног вредновања утичу на постигнућа ученика на стандардизованим тестовима из математике и на њихове диспозиције према математици.

Резултати њеног истраживања су показали да укључивањем стратегија и техника формативног вредновања, током једне године, ученици постају самосталнији, прихватајући одговорност саморегулисаног учења. Поред тога, побољшало се њихово ангажовање и однос према математици. Ученици су побољшали своје учење, научене стратегије и технике формативног вредновања користе за учење других области. Такође, ученици изјављују да воле да користе рубрике, јер се у њима „скицира поступак оцјењивања“.

Праксу наставника формалног вредновања испитивали су Крукс и Блек (према Black and Wiliam, 1998) и указују неколико заједничких карактеристика. Кључне слабости биле су:

(1) Пракса оцјењивања углавном подстиче површно и уско учење, концентришући се на усвајање изолираних детаља, обично знања која ученици убрзо забораве.

(2) Наставници углавном не образлажу питања оцјењивања која користе и критички не расправљају о њима, тако да се мало размишља о томе шта се оцјењује.

(3) Функција оцјењивања је претјерано наглашена, а функција учења је недовољно наглашена.

(4) Постоји тенденција коришћења нормативног, а не критеријумског приступа, који наглашава такмичење између ученика, а не лични развој сваког.

И у вредновању писмених радова, оцјењивање наставника усмјерено је на ниже когнитивне циљеве, углавном на подсјећање. Пракса оваквог оцјењивања показује да се ученици фокусирају само да „прођу“ кроз задатке и опиру се покушајима укључивања у ризичне когнитивне активности (Ibid).

Резултати студије Реит (Reit, 2017) показују да секвенцијални модел задатка, заснован на секвенцијалном распореду мисаоних операција, сличан је пракси интуитивног оцјењивања наставника. Акценат овог истраживања је на испитивању да ли се интуитивне праксе оцјењивања наставника могу емпиријски потврдити и пренијети на задатке моделовања. Заправо, интуитивна пракса оцјењивања односи се на поступак бодовања наставника (бодовање прелазних корака у рјешењима ученика), без разматрања структурно−когнитивних посебности. Овај поступак оцјењивања се, углавном, користи при оцјењивању задатака из математике (сумативна оцјена), док задаци моделовања са својим вишеструким рјешењима захтијевају више приступа оцјењивања. Овај проблем доводи и до чињенице да се ови задаци ријетко користе у настави математике. Стога, Реит (Ibid) закључује да интуитивна пракса оцјењивања наставника идентификује посредне кораке у рјешењу, што може представљати важну процедуру за идентификовање мисаоних структура, као основе за оцјењивање задатака моделовања (Ibid).

Теледал (Teledahl, 2017) испитује оцјењивање наставника математике у рјешавању проблема ученика, узраста од 10 година. Циљ ове студије је да истражи аспекте рјешавања проблема ученика у односу на математичке способности, укључене у шведски наставни програм математике: (1) рјешавање проблема, (2) разумијевање математичких концепата, (3) математичке методе, (4) математичко резоновање и (5) комуникацију. Резултати истраживања показују да недостатак комуникације између наставника и ученика отежава оцјењивање математичких способности ученика. Студија потврђује да способност ученика да комуницира, описује и објашњава процес рјешавања проблема од пресудног је значаја и за наставнике и за ученике. Тиме да би наставници оцијенили способности ученика, они морају да разумију шта су ученици урадили и зашто су то урадили. Осим тога, учитељи треба да знају више о различитим начинима јасног и свеобухватног рјешавања проблема.

Дејвис (према Black and Wiliam, 1998) описује праксу једне наставнице математике у средњој школи о начину на који је реаговала на одговоре ученика, у односу на постављена питања. У почетку реакције су биле усредсређене на усклађеност одговора ученика са

очекивањима наставника. Након неколико мјесеци рада са истраживачима, наставница све више акценат ставља на „тражењу информација“ за разлику од „тражења одговора“. У њеној пракси, током двогодишњег периода, дошло је до промјена, тј. од представљања јасних структура лекција и унапријед одређених исхода учења ка истраживању „потенцијално богатих“ математичких ситуација у којима је наставник коучесник. Овдје, најзначајније је да наставник има сопствени поглед на предмет, материју која се учи, као и да се развија и мијења заједно са ученицима (Ibid). У том смислу, у истраживању Лерона и Дубинског (Leron & Dubinsky, 1995), испитан је утицај интерактивне методе учења у настави математике, тј. искуство ученика у раду са рачунаром и дискусијама, на учење одређених математичких појмова. Они наводе да овако организована настава математике помаже у стварању менталне конструкције за учење одређених математичких појмова, као и за изграђивање метода у подстицању таквих конструкција. Умјесто да откривамо математичке појмове, ученици их самостално усвајају. У психолошком смислу, подржано разрађеним теоријским оквиром и истраживањем, можемо рећи да ове активности помажу ученицима да „конструишу менталне процесе, предмете и односе“ неопходне за смислено разумијевање теме. Сви ученици проводе вријеме „борећи“ се са задатком и доживљавајући различита ограничења и препреке. Неки ученици заправо дођу до очекиваног резултата, а неки се само приближе. Тако, као резултат свог рада на рачунару, ученици имају тенденцију да формирају искуствену основу за асимилацију дефиниција, у своје постојеће менталне структуре, када је коначно резимирана у разредној дискусији. Са ове тачке гледишта, они ученици који заправо открију евентуалну дефиницију могу се осјећати срећније, док ће дефиниција бити приближно толико значајна онима који су се само трудили да је открију. Прелазак на наставу овом конструктивистичком, интерактивном методом није лако за наставника. Поред темељних промјена у дугогодишњим ставовима о настави и учењу, наставник мора уложити значајно вријеме и енергију за технике креирања задатака и технике учења, које се веома разликују од стандардне методе предавања. Али, резултати овог истраживања су показали да је овај додатни напор наставника изузетно добро награђен, промјеном става ученика према математици уопште, као и степеном смисленог учења које се постиже (Ibid).

На образовним евалуацијама показало се да различите могућности за учење код куће и у школи могу бити главни фактор постигнућа ученика. Заправо, у студијама, разлике у образовним искуствима између група су биле главна варијабла која објашњава групне разлике образовних постигнућа. Стога, због разлога праведности, сви ученици треба да су упознати са математичким садржајима који се оцјењују. Дакле, потребна су оцјењивања која обухватају подударност наставних искустава свих ученика (National Research Council, 1993). Интерес друштва да побољша математичке компетенције ученика директно је освједочен подршком и учешћем у међународним студијама ученичких постигнућа (Јакшић, Марушић Јаблановић & Гутвајн, 2017). Тако важан индикатор научне писмености ученика на основношколском узрасту представљају резултати TIMSS истраживања, који, на тај начин, посредно, свједоче о квалитету једног дијела националног образовног система, као и о његовој „позиционираности“ у међународном контексту (Шевкушић & Картал, 2017). Ово истраживање припада категорији великих компаративних истраживачких студија које примјењује квантитативни методолошки приступ на националном репрезентативном узорку школа у проучавању постигнућа ученика и контекстуалних варијабли које их објашњавају (Ђерић и сар., 2020). Поред просјечног постигнућа ученика из математике на TIMSS скали и описа расподјеле постигнућа према међународним референтним вриједностима, TIMSS подаци нам пружају увид и у постигнуће ученика према различитим когнитивним доменима и различитим областима математичког садржаја (Шевкушић & Картал, 2017).

Република Србија је од 2011. године учествовала у праћењу постигнућа ученика четвртог разреда кроз три истраживачка циклуса – TIMSS 2011, 2015 и 2019., док је Црна Гора, на нивоу четвртог разреда, учествовала први пут у истраживању TIMSS 2019 (Ђерић и сар., 2020). Стога, ради разумијевања резултата нашег истраживачког програма спроведеног у

Црној Гори, овдје, у оквиру TIMSS–а 2019 приказујемо поређења просјечних постигнућа из математике ученика четвртог разреда у контексту међународних резултата, укључујући и резултате ученика из региона (Босна и Херцеговина, Сјеверна Македонија и Хрватска), као и однос постигнућа са појединим контекстуалним варијаблама (Ibid).

Постигнућа ученика из математике се приказују и интерпретирају на основу међународних референтних вриједности (напредна – 625 поена, висока – 550 поена, средња – 475 поена, ниска – 400 поена). Сингапур има највеће просјечно постигнуће из математике (625 поена) од свих осталих земаља у циклусу TIMSS 2019, а потом слиједе преостале четири азијске земље – Хонг Конг, Република Кореја, Кинески Тајпеј и Јапан. У истраживању TIMSS 2019, такође, доминирају и сјеверноевропске земље Русија и Сјеверна Ирска. Затим слиједе Енглеска и Ирска, Летонија, Норвешка и Литванија чији су се ученици такође одлично показали у рјешавању задатака из математике (просјечно постигнуће изнад 542 поена) (Ibid).

Када је у питању наш регион најбоља просјечна постигнућа из математике имају ученици из Србије (508 поена) и Хрватске (509 поена), чија су постигнућа значајно виша од просјека међународне скале (500 поена). Међусобно слична, али статистички значајно мања постигнућа из математике, у односу на међународни просјек и постигнућа ученика из Србије, имају ученици из Црне Горе (453 поена), Босне и Херцеговине (452 поена) и Сјеверне Македоније (472 поена). Ученици који успјешно рјешавају најсложеније математичке задатке крећу се у распону од 1% (Црна Гора и Босна Херцеговина) до 7% (Србија). Око три четвртине ученика у Црној Гори, Босни и Херцеговини и Сјеверној Македонији не овладава ни основним математичким компетенцијама, док у Србији од укупног броја тестираних ученика четвртог разреда њих 11% не успијева да ријеши задатке који захтијевају најнижи ниво математичких компетенција (Ibid).

Осим наведеног, TIMSS 2019 пружа информације о просјечним постигнућима ученика у три домена садржаја (Број, Мјерење и геометрија, Подаци) у односу на опште просјечно постигнуће из математике. У односу на вршњаке из региона ученици из Србије (518 поена) и Хрватске (512 поена) предњаче по остварености поена у рјешавању задатака из домена Броја, што је статистички значајно више у односу на општи скор из математике у националном контексту. У домену Мјерења и геометрије ученици из Хрватске (518 поена), Црне Горе (459 поена) и Босне и Херцеговине (458 поена) остварују статистички значајно веће постигнуће у поређењу са општим скором из математике у својим земљама. Сви ученици из региона не сналазе се тако добро у рјешавању задатака из домена Података, односно њихова постигнућа у овом домену су статистички значајно нижа у поређењу са просјеком општих математичких постигнућа у њиховим земљама (Ibid).

Регионално, када су у питању когнитивни домени, тј. знање (познавање чињеница), примјена знања и резоновање, TIMSS 2019 резултати показују да ученици из Србије и Хрватске имају слична постигнућа на сва три когнитивна домена и разлике међу њима су занемарљиве. Ученици из Црне Горе, Босне и Херцеговине, и Сјеверне Македоније имају мања просјечна постигнућа у сва три домена, испод 500 поена. Наиме, у поређењу са општим постигнућем из математике, ученици из Црне Горе и Босне и Херцеговине остварују статистички значајан пад за 8 поена у домену Знања (познавања чињеница), као и статистички значајан раст за 10 поена у домену Резоновања. На поједине задатке не постоје подаци за Босну и Херцеговину, Сјеверну Македонију и Црну Гору јер су ученици рјешавали задатке у тесту који су мање захтјевни (Ibid).

На примјер, у прегледу резултата TIMSS 2019 приказан је задатак на високом међународном референтном нивоу (садржински домен Података), у којем се од ученика тражи резоновање, које представља најзахтјевнији мисаони процес, (Ibid:60):

Учитељ жели да распореди 30 ученика у групе тако да:
• свака група има исти број ученика, **и**
• свака група има непаран број ученика.
Прикажи два различита начина на које учитељ може да распореди ученике.

1. начин

Број група: _____

Број ученика у свакој групи: _____

2. начин

Број група: _____

Број ученика у свакој групи: _____.

У рјешавању овог задатка, ученици из Србије (62%) и Хрватске (61%) се не разликују од међународног просјека док је разлика статистички значајно нижа, у односу на међународни просјек, за ученике из Сјеверне Македоније (52%), Црне Горе (48%) и Босне и Херцеговине (43%) (Ibid). Све ово показује, прије свега забрињавајућа постигнућа ученика у Црној Гори, чија су просјечна постигнућа значајно нижа (за 47 поена) од просјека међународне скале (500 поена). Тиме, ученици остварују статистички значајно нижа постигнућа у домену садржаја, као и когнитивних домена. С тим у вези, и наше истраживање је усмјерено на постављање проблема, различитих когнитивних захтјева, усмјерених на развој математичких компетенција ученика, у домену садржаја Броја и Података, о чему је више приказано у поглављу *Израда експерименталних модела систематизовања знања о аритметичким и алгебарским садржајима*.

Поред наведеног, информација о ефектима образовне политике и праксе не би била потпуна када би се заснивала само на провјери знања, без податка о томе какав однос ученици формирају према одређеним областима које изучавају (Марушић Јаблановић, 2017). Стицање увида у кључне чиниоце постигнућа изузетно је значајно како за доносиоце одлука, тако и за практичаре заинтересоване за унапређивање постигнућа ученика у области математике (Јакшић, Марушић Јаблановић & Гутвајн, 2017). Тако научна писменост, поред когнитивних аспеката, укључује ставове, увјерења, вриједности и мотивационе аспекте. Ставови према науци имају значајну улогу у стицању научних и технолошких знања, у примјени научних концепата и метода у различитим животним ситуацијама (Шевкушић & Картал, 2017).

Истраживања доследно показују да став према математици снажно предвиђа математичко постигнуће. Студија TIMSS 2015 у Србији је идентификовала више фактора на основу којих се може предвидјети постигнуће ученика четвртог разреда основне школе у области математике (Јакшић, Марушић Јаблановић & Гутвајн, 2017). У домену потреба нашег истраживања, приказаћемо резултате тестирања важних фактора постигнућа и то: ефекте увјерења о математици и ученичке перцепције квалитета наставе. Према томе, за нас посебно занимљив фактор постигнућа јесте обељежја и ставови ученика према математици, који нијесу само важан извор мотивације за бављење математиком, већ су и сами по себи важан некогнитивни образовни исход. Треба нагласити да је став према математици мултидимензионалан конструкт, а да се у литератури најчешће разматрају три врсте увјерења која се доводе у везу са математичким постигнућем. То су: (1) математички селф–концепт (перцепција сопствених способности за савладавање математичких садржаја и да се буде успјешан у математици); (2) позитиван однос према математици (садржи и афективну и бихејвиоралну компонентну и у том смислу је и најближе значењу термина „став”); (3) перципирана вриједност математике (увјерење ученика о значају математике за свакодневно функционисање и каснији живот). Сва три наведена увјерења су значајни и независни

предиктори математичког постигнућа (Ibid). Ученици који имају позитивне ставове према математици и који се осјећају компетентно у погледу учења математике остварују више постигнуће из математике. Сматра се да позитивна увјерења мотивишу ученике да се ангажују током наставе и испоље упорност, труд и пажњу приликом учења нових садржаја. Такође, Блек и Вилиам (Black & Wiliam, 1998) наводе доказе многих студија да вјеровање ученика у властите способности може утицати на њихова постигнућа. Примјер који наводе, истраживање Фернандеса и Фонтана (према Black & Wiliam, 1998), показује да је пораст постигнућа ученика, у оквиру експерименталног програма, повезан са порастом осјећаја ученика за контролом учења.

Тако, студија TIMSS 2015 у Србији показује изражена позитивна увјерења ученика четвртог разреда о математици, која, у великој мјери, сигурно су заслужна и за солидан пласман ученика из Србије. Стога, треба нагласити способност професора разредне наставе из Србије да заинтересују ученике за математику и подстакну адекватан однос према овом предмету. Што се тиче домена наставе, такође, показало се да су ученичке перцепције квалитета наставе предиктивне за постигнуће (Јакшић, Марушић Јаблановић & Гутвајн, 2017). Исто тако важно питање, тј. карактеристике ученика у односу на остварена постигнућа, налази се у раду Славице Максић, Драгана Весића и Лазара Тењовића (Максић, Весић & Тењовић, 2017). Анализирали су карактеристике ученика који су остварили највише постигнуће у истраживању TIMSS 2015 у Србији, у циљу утврђивања и бољег разумијевања њихових специфичности, као и услова који подржавају високо академско постигнуће. Ученици са високим постигнућима на оба теста знања, математике и природних наука, у односу на остале ученике, имали су позитивнији математички селф–концепт, боље кућне ресурсе за учење, образованије родитеље, родитеље са вишим професионалним статусом и родитеље који су имали више образовне аспирације за своје дијете. У овом испитивању, такође, обратићемо више пажње на карактеристике математичког селф–концепта. Позитивнији математички селф–концепт обухватао је увјерење ученика да добро раде математику, да брзо уче, успјешно рјешавају математичке проблеме и за то добијају потврде од наставника. Ученици који имају позитивнији математички селф–концепт процјењивали су да им математика није тежа него њиховим вршњацима нити им је тежа од других предмета, да их не збуњује и не чини их нервозним (Ibid). Како академски селф–концепт утиче на постигнуће, али је и сам под његовим утицајем, то смо у истраживачком дијелу рада испитали увјерења ученика у рјешавање математичких проблема, као и какве потврде добијају од наставника. Заправо, ове карактеристике ученика, тј. њихово мишљење о рјешавању задатака из математике, затим, ефектима различитих начина постављања проблема, одговорима наставника у давању повратних информација, испитиване су питањима, садржаним у *Анкетном упитнику за ученике* (Прилог 10).

Малис и колеге (према Џиновић & Вујачић, 2017) приказују резултате TIMSS 2011 истраживања, посматране на нивоу свих земаља учесница, по којима су ученици четвртог разреда који су имали више скорове на скалама самопоуздања и допадљивости (привлачности) математике постигли веће скорове на тесту знања из овог предмета. Дакле, подаци указују на то да је селф–концепт најснажнији предиктор постигнућа ученика на тестовима знања из математике на узрасту ученика четвртог разреда. Тиме се потврђује важност селф–концепта, као самоувјерења о способностима, за разумијевање постигнућа ученика и успјеха у одређеним областима (Џиновић & Вујачић, 2017).

Исто, у студијама TIMSS 2015, TIMSS 2019 чини се да ученици четвртог разреда, на нивоу међународног просјека имају позитивну слику о својим способностима из математике. Уопштено говорећи, они који су изразили да имају више самопоуздање имали су и знатно већа просјечна постигнућа из математике од оних ученика који нијесу изразили повјерење у сопствене способности (Стевановић & Ивковић, 2017; Ђерић и сар., 2020). На примјер, ученици који су истакли да им се „веома свиђа" да уче математику имали су и знатно већа

просјечна постигнућа од ученика који су изјавили да им се „не свиђа” да уче овај наставни предмет (Ђерић и сар., 2020). Интересантно, ученици из Црне Горе су први на међународној листи по степену изражености самопоуздања из математике, али не и толико високог просјечног постигнућа из математике. Око трећине ученика из Србије и Хрватске је одговорило да има високо самопоуздање, што је у складу са међународним просјеком. Ученици који су изразили да имају више самопоуздање имали су знатно већа просјечна постигнућа у све три категорије одговора. Додатно, ученици из Србије (555 поена) и Хрватске (550 поена) који имају високо изражено самопоуздање имају резултате који су у зони високих референтних међународних вриједности из математике (550 и више поена). Ови резултати показују да је самопоуздање повезано у највишем степену са постигнућима ученика из математике (Стевановић & Ивковић, 2017; Ђерић и сар., 2020). Иако многи фактори утичу на однос између количине наставног времена и постигнућа ученика, квалитет наставе и спремност ученика да уче, тј. вријеме проведно у учењу остају кључне компоненте у разматрању повољних могућности ученика за учење (Ђерић и сар., 2020).

Интересантно питање бројних емпиријских студија јесте да ли и на који начин су повезане одређене карактеристике наставника и квалитет наставе са постигнућима из математике ученика четвртог разреда. У свијетлу резултата ТИММС 2015 у Србији, учитељи се осјећају нешто несигурније у настави математике приликом оцјењивања ученика, у раду са ученицима који имају тешкоће у учењу, као и у развијању напредних вјештина мишљења (Ђерић, Станчић & Ђевић, 2017). Када је у питању задавање домаћих задатака из математике, што је саставни дио нашег истраживања, налази ТИММС 2015 у Србији потврђују да ученици остварују значајно веће постигнуће у математици код учитеља који задају домаће задатке за чију израду је потребно мање времена. Ово истраживање показује да највећи проценат ученика у Србији и Мађарској похађа наставу код учитеља који сваки дан задају домаће задатке, док то чини трећина учитеља у Хрватској, што је у складу са међународним просјеком. У Србији је порастао проценат ученика чији учитељи свакодневно задају домаће задатке у односу на циклус из 2011. године. С тим у вези, Ђерић, Станчић и Ђевић (Ђерић, Станчић & Ђевић, 2017) предлажу да учитељи унапријед планирају колико је оптимално времена потребно за израду домаћих задатака, с обзиром на узрасне и развојне карактеристике ученика четвртог разреда.Такође, они указују да би разматрање домаћих задатака на часу могла бити чешћа пракса учитеља зато што би то омогућило цјеловитији увид у резултате рада ученика, а ученици би били у прилици да утврде, понове и размијене знања.

III МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА

1. Проблем и предмет истраживања

Главни циљ постављања и рјешавања проблема у школској математици огледа се у припремању ученика за промишљене кориснике математичких знања у свакодневном животу (Stoyanova, 1997). Акценат се ставља на развој способности ученика у постављању и рјешавању проблема из стварног живота, при чему их наставници упућују на различите начине размишљања. Укључивање проблема које ученици постављају, како Силвер и сарадници (према Stoyanova, 1997) наводе, представља значајан приступ развијања математичког мишљења. Осим тога, у раду са сложеним и контекстуалним проблемима, ученици изјављују да су проблеми изазовни и забавни. Такође, истичу да су проблеми, који приказују позната окружења, корисни у свакодневним ситуацијама (Balan, 2012).

Дакле, постављање и рјешавање реалистичких проблема учинили су учење ученика „видљивијим“. Развијена класификација ситуација из којих се постављају проблеми све више представља „алат“ који служи за приказивање математичких знања ученика. Наставницима и њиховим ученицима отварају се „видици“ сазнања како се и колико постиже рјешавањем проблема. То, у циљу развоја наставе усмјерене на учење, имплицира креирање инструмената и техника за континуирано праћење и вредновање обима и квалитета математичких знања ученика.

Међутим, када нам је циљ да кажемо нешто поуздано о индивидуалном или колективном знању наилазимо на бројне проблеме оцјењивања. Традиционални проблем праведности оцјењивања добија другачији значај у контексту нових облика оцјењивања из математике. Тако, на примјер, када оцјењивање укључује неколико сложених задатака, често постављених у контекст који није подједнако познат свим ученицима, ови задаци постају „критични“ ако су разлике у резултатима група првенствено последица разлика у познавању контекста, а не основних математичких вјештина и концепата (National Research Council, 1993). Неки од проблема настају, на примјер, приликом промјене дате ставке у тесту, што може значајно да промијени проценат тачних одговора. Операционализација, односно форма постављања питања, изабрана за провјеру дате вјештине и/или нивоа знања, је осјетљива до тог степена да промена само једне ријечи може произвести високе разлике у резултатима (Bodin, 1993). Такође, разлике у резултатима, некад, настају када се промијени вријеме додијељено за тест и општа „дужина“ теста (National Research Council, 1993). Осим тога, ако резултати оцјењивања ученика, наставника, школа или нација служе за такмичарске сврхе или за компаративну процјену постигнућа у ширем образовном контексту, онда наставници, неизбјежно, припремају ученике за тест (Ginsburg, Jacobs & Lopez, 1993). Подучавање за тест, очигледно, има негативне последице уколико тест „мјери“ тривијалности које нијесу повезане или су супротне постављеним циљевима наставног плана и програма. Али, у мјери у којој процјена покушава да прикаже занимљиве аспекте размишљања и учења, тиме она може побољшати подучавање у настави математике (Ibid).

Дакле, питања о ефектима оцјењивања на образовни систем, у цјелини, добијају све већу пажњу. У том погледу, значајан допринос дају последична и системска валидност оцјењивања (National Research Council, 1993). Последична валидност оцјењивања се односи на друштвене последице које оцјењивање може имати. На примјер, наставници могу прилагодити своја упутства за вјежбање тако да одражавају садржај оцјењивања, односно да на часу користе математички садржај који је усклађен са садржајима оцјењивања. При томе, потребно је прикупити доказе о предвиђеним и непредвиђеним ефектима оцјењивања, о томе како наставници и ученици користе и разумију постављене циљеве. Системска валидност оцјењивања се односи на промјене наставног плана и програма и на промјене наставе изазване

резултатима оцјењивања. Према томе, темељно вредновање системских ефеката развоја математичког образовања је огроман подухват. Упркос томе, важно је имати на уму значај системске оријентације оцјењивања јер утицај оцјењивања на наставу и развој математичког знања ученика не може се одвојити од ширих образовних испитивања (Ibid).

Тако, као одговор на наведене општепризнате друштвене интересе и подстакнути новим истраживањима когнитивне психологије, наставници и истраживачи почињу да препознају и потребу и потенцијал промјена, као што је увођење проблема у наставу математике, а посебно вредновање разумијевања математичких знања ученика. Међутим, постоји мали број студија које испитују вредновање ученичких постигнућа као начина побољшања постојећих знања. Осим тога, јавља се несклад између компетенција које ученици имају потребу да развију рјешавањем постављених задатака и онога шта се у њима оцјењује, као и да ученицима често није објашњена сврха онога шта се оцјењује.

Према наведеном, могли бисмо рећи да је проблем нашег истраживања:

Као прво, недовољно и неадекватно постављање проблема као инструмента за вредновање разумијевања математичких знања, аритметичких и алгебарских садржаја, ученика петог разреда црногорског образовног система. Друго, недостатак стручних знања наставника о могућим поступцима вредновања и праћења математичких постигнућа ученика, усмјерених на развој математичких знања и однос ученика према математици као наставном предмету.

Из садржаја и суштине овако дефинисаног проблема предмет нашег истраживања је:

Утврђивање и анализирање функције варирања репрезентација и контекста проблема, аритметичких и алгебарских садржаја, у циљу вредновања и праћења развоја математичких знања ученика петог разреда црногорског образовног система. Поред тога, за расвјетљавање остварених математичких постигнућа ученика, предмет нашег интересовања је утврђивање да ли мишљење ученика петог разреда о постављању проблема у настави математике представља значајан фактор постигнућа.

2. Циљ и задаци истраживања

Евалуација постигнућа ученика у настави математике базира се на наставном програму, а односи се на утврђивање нивоа остварености постављених циљева, задатака, исхода учења и математичких компетенција (Милинковић & Пикула, 2015). Пошто су наставни садржаји почетне наставе математике у највећој мјери конципирани у виду математичких задатака, стога је, када говоримо о вредновању математичког знања ученика, за потребе нашег истраживања неопходно, приликом креирања задатака, прво прецизно дефинисати индикаторе евалуације − образовне исходе и нивое когнитивних процеса. Описани индикатори математичких знања заједно са приказивањем рјешења ученика служе нам за праћење и вредновање постигнућа ученика.

Овим истраживањем желимо да сагледамо „стање и тешкоће“ постављања проблема наставника у односу на дубље и шире вредновање математичких знања ученика петог разреда, усмјерених прије свега на даљи развој знања, као и за унапређење квалитета организације и реализације оваквог начина рада. Такође, овај рад може бити полазна тачка, уопште, за промјену праксе у погледу усклађивања инструкција наставника у постављању проблема за вредновање математичких знања. Залажемо се за постављање проблема варирањем репрезентација и контекста у вредновању математичких знања ученика петог разреда. Аналитички оквир наведеног приступа постављања проблема и вредновања математичких знања уводимо на примјерима систематизације аритметичких и алгебарских садржаја, како

бисмо окарактерисали праксу наставника математике у петом разреду основне школе. Према томе, на темељима варирања репрезентација и контекста проблема вреднујемо математичка знања ученика.

Дакле, основни циљ експерименталног истраживања је: Утврђивање и анализирање ефеката постављања проблема наставника примјеном технике варирања репрезентација и контекста за вредновање математичких постигнућа рјешавања проблема, ефикасност примјене и развоја математичких знања, аритметичких и алгебарских садржаја, код ученика петог разреда основне школе црногорског образовног система. Исто, овим истраживањем желимо да утврдимо да ли мишљење ученика о постављању проблема у настави математике утиче на остварена математичка постигнућа рјешавања проблема.

Да би се овако постављени циљ истраживања реализовао утврдили смо следеће истраживачке задатке:

1. Испитати да ли постоје статистички значајне разлике у просјечним постигнућима ученика, из аритметичких и алгебарских садржаја, за које је наставник постављао и вредновао проблеме на уобичајени начин и ученика са којима су се исти садржаји увјежбавали и вредновали примјеном проблема постављених техником варирања репрезентација и контекста у формулацији захтјева задатка;

2. Утврдити да ли постоје статистички значајне разлике у рјешењима проблема, из аритметичких и алгебарских садржаја, између ученика за које је наставник постављао и вредновао проблеме на уобичајени начин и ученика са којима су се исти садржаји увјежбавали и вредновали примјеном проблема постављених техником варирања репрезентација и контекста у формулацији захтјева задатка;

3. Испитати да ли постоје статистички значајне разлике у самосталном састављању проблема, из аритметичких и алгебарских садржаја, између ученика за које је наставник постављао и вредновао проблеме на уобичајени начин и ученика са којима су се исти садржаји увјежбавали и вредновали примјеном проблема постављених техником варирања репрезентација и контекста у формулацији захтјева задатка;

4. Установити да ли мишљење ученика о постављању проблема у настави математике петог разреда утиче на математичка постигнућа рјешавања проблема.

3. Хипотезе истраживања

Поставили смо следећу општу хипотезу: Варирање репрезентација и контекста проблема утиче на математичка постигнућа рјешавања проблема, ефикасност примјене и развоја математичких знања, из аритметичких и алгебарских садржаја, код ученика петог разреда основне школе црногорског образовног система.

У оквиру ове опште хипотезе, а на основу задатака, поставили смо следеће посебне хипотезе:

1. Постоје статистички значајне разлике у просјечним постигнућима ученика, из аритметичких и алгебарских садржаја, за које је наставник постављао и вредновао проблеме на уобичајени начин и ученика са којима су се исти садржаји увјежбавали и вредновали примјеном проблема постављених техником варирања репрезентација и контекста у формулацији захтјева задатка;

2. У рјешењима проблема, из аритметичких и алгебарских садржаја, постоје статистички значајне разлике између ученика за које је наставник постављао и вредновао

проблеме на уобичајени начин и ученика са којима су се исти садржаји увјежбавали и вредновали примјеном проблема постављених техником варирања репрезентација и контекста у формулацији захтјева задатка;

3. Одговори у самосталном састављању проблема, из аритметичких и алгебарских садржаја, статистички се значајно разликују између ученика за које је наставник постављао и вредновао проблеме на уобичајени начин и ученика са којима су се исти садржаји увјежбавали и вредновали примјеном проблема постављених техником варирања репрезентација и контекста у формулацији захтјева задатка;

4. Мишљење ученика о постављању проблема у настави математике петог разреда утиче на математичка постигнућа рјешавања проблема.

4. Варијабле у истраживању

Варијабла (промјенљива) је карактеристика (својство, обиљежје неке појаве) која се мијења (варира), па отуда назив промјенљива или варијабла. Појава која не варира јесте инваријантна или непромјенљива (Банђур & Поткоњак, 1999). У експерименталним истраживањима говоримо о независној и зависној варијабли.

Независну варијаблу, која се намјерно уводи и чији се ефекти утврђују, у нашем истраживању представљаће постављање проблема наставника примјеном технике варирања репрезентација и контекста у формулацији захтјева задатка. Експериментални програм се изводи у редовној настави математике петог разреда и то на часовима утврђивања аритметичких и алгебарских садржаја у скупу природних бројева N и N_0.

Зависну варијаблу, која настаје под утицајем експерименталног фактора, представљаће математичка постигнућа ученика, изражена укупним збиром бодова на финалним тестовима знања и категоријама одговорима ученика у процесу рјешавања проблема.

5. Методе, технике и инструменти истраживања

Наше истраживање је засновано на методи теоријске анализе, методи моделовања и експерименталној методи. Метода теоријске анализе примијењена је при тумачењу и анализи научне и стручне литературе, Наставног програма математике за пети разред основне школе, уџбеника и приручника за учитеље, оперативних планова рада учитеља, затим приликом прикупљања, обраде и интерпретације добијених резултата истраживања.

Метода моделовања коришћена је приликом израде припрема по којима је изведен наставни процес у експерименталним одјељењима. За потребе истраживања конструисане су припреме (модели) организације и реализације часова систематизације знања у оквиру образовно – васпитног исхода *Својства скупа природних бројева N и N_0 у рјешавању различитих аритметичких задатака и задатака из свакодневног живота*.

У истраживању је коришћена експериментална метода (експеримент са паралелним групама). У експерименталној групи увођење експерименталног фактора (варирање репрезентација и контекста проблема) спровео је аутор, док у контролној групи није било утицаја експерименталног програма.

Од техника истраживања коришћено је анкетирање и тестирање. Тестирањем је спроведено:

1. иницијално тестирање (Прилог 1, Прилог 2), прије почетка експерименталног дијела истраживања, како бисмо стекли увид у предзнања ученика о аритметичким и алгебарским садржајима, тј. способностима рјешавања проблема и извршили уједначавање група;

2. финално тестирање (Прилог 3, Прилог 4, Прилог 5, Прилог 6, Прилог 7, Прилог 8), након утврђивања планираних аритметичких и алгебарских садржаја.

Техника анктерирања је коришћена ради прикупљања података о мишљењу ученика о постављању проблема у настави математике петог разреда.

За потребе истраживања конструисани су инструменти:

1.Иницијални тест знања за провјеру предзнања ученика у рјешавању аритметичких и алгебарских проблема, текстуалног, схематског, симболичког, табеларног и полупрограмираног приказа, са аутентичним подацима из реалног окружења;

2.Први финални тест знања за испитивање ефикасности примјене усвојених знања о множењу, у скупу природних бројева N и N_0, у рјешавању текстуалног и табеларног приказа проблема, постављених у оквиру реалног контекста;

3.Други финални тест знања за испитивање ефикасности примјене усвојених знања о дијељењу, у скупу природних бројева N и N_0, у рјешавању проблема текстуалног, схематског, сликовног, табеларног, симболичког и полупрограмираног приказа са аутентичним подацима из реалног окружења;

4.Трећи финални тест знања за испитивање ефикасности примјене усвојених знања рјешавања једначина и неједначина, у скупу природних бројева N и N_0, у рјешавању проблема схематског, табеларног и полупрограмираног приказа, повезаних са реалним ситуацијама;

5.Анкетни упитник за ученике ради испитивања мишљења о постављању проблема у настави математике петог разреда.

6. Узорак истраживања

У току истраживања обухваћен је узорак ученика који је непосредно учествовао у експерименталном дијелу истраживања. Ученици укључени у истраживање представљају циљани репрезентативни узорак, односно ученици петог разреда основних школа „Милија Никчевић“ и „Лука Симоновић“ из Никшића. Школе се налазе у различитим дјеловима града, ОШ „Милија Никчевић“ у приградском насељу Кличеву, а ОШ „Лука Симоновић“ у центру града. Један од разлога одабира ових школа био је коришћење истог Наставног плана и програма по којем учитељи из обје школе реализују наставу математике. Иницијалном тестирању је приступило укупно 145 ученика. На основу резултата тестирања одабран је узорак од 6 одјељења, односно 112 ученика (62 дјечака и 50 дјевојчица). Ученици су подијељени у двије уједначене групе, експерименталну и контролну. Експерименталну групу сачињавало је 56 ученика, из три одјељења, школе „Милија Никчевић“, а контролну групу, исто, 56 ученика, из три одјељења, школе „Лука Симоновић“. Бројеви ученика по групама и школе којима су ученици припадали приказани су табелом (Табела 6).

Табела 6. Број ученика по групама и школама које су учествовале у истраживању

Група	ОШ “Милија Никчевић“	ОШ “Лука Симоновић“	Укупно
Експериментална	56	0	56
Контролна	0	56	56
Укупно	56	56	112

Опредијелили смо се за ученике петог разреда јер су ученици петог разреда самосталнији у раду од ученика претходна четири разреда. Способни су да сарађују унутар група, да мање или више самостално расподијеле задужења и да прихвате одговорности. Развијеније су им и комуникативне вјештине, способности увиђања, упоређивања, извођења закључака и извјештавања о постигнутим резултатима.

У циљу провјеравања постојећег „стања“ о начинима постављања и рјешавања проблема у наставној пракси, затим за сагледавање израженості увјерења ученика у способности рјешавања проблема, као и односа ученика према настави математике, испитали смо да ли мишљење ученика о наведеним питањима утиче на математичка постигнућа рјешавања проблема аритметичких и алгебарских садржаја. Стога, ученици петог разреда наведених школа представљају намјерни узорак на коме је испитано мишљење о значајним питањима постављања проблема у петом разреду основне школе.

7. Организација и ток истраживања

Истраживање је обухватило више етапа:

1. Креирање наставних припрема за примјену проблема, постављених техником варирања репрезентација и контекста у формулацији захтјева задатка, за утврђивање аритметичких (множење и дијељење) и алгебарских садржаја (једначине и неједначине);

2. Иницијално тестирање;

3. Уједначавање група које ће учествовати у истраживању;

4. Реализација наставних часова (од стране аутора рада) по утврђеним моделима у експерименталној групи и реализација наставних часова (од стране учитеља) класичним приступом у контролној групи;

5. Финално тестирање ученика експерименталне и контролне групе (финално тестирање–множење, финално тестирање–дијељење, финално тестирање–једначине и неједначине);

6. Анкетирање ученика експерименталне и контролне групе.

Све етапе истраживања су реализоване у периоду децембар–април школске 2019/2020.године, осим прве која је претходила реализацији осталих.

7.1. Израда експерименталних модела систематизовања знања о аритметичким и алгебарским садржајима

Узимајући у обзир теоријски оквир изложен у првом дијелу рада, развили смо три модела систематизовања знања аритметичких (множење и дијељење) и алгебарских (једначине и неједначине) садржаја у петом разреду основне школе. Као полазиште користили смо Наставни план и програм математике за пети разред основне школе. Модели су базирани на варирању репрезентација и контекста у формулацији захтјева задатка, аритметичких и алгебарских садржаја.

Првим моделом наставни садржаји о множењу су приказани текстуалним задацима који описују реалне ситуације. Тако, у оквиру једног часа приказане су варијације једног проблема. Поред тога, постављају се бројевни изрази са захтјевима: примјене олакшица у израчунавању и састављања одговарајућег текста проблема. Постепено, у појединим задацима је увођена табела за приказ и упоређивање квантитативних података. На основу Првог модела конструисан је Други модел (наставни садржаји о дијељењу). У односу на претходни, овај модел је проширен, тј. реалне ситуације су разрађење практичним примјерима и аутентичним подацима. Поред текста и табеле, у постављању проблема уводе се схеме, слике, затим словни изрази. Такође, креирају се различите форме питања за полупрограмиране примјере задатака. Исто, захтјеви састављања проблема ученика су проширени. Поред бројевног израза, приказана је схема као основа за рјешавање и самостално састављање проблема. Захтјеви за рјешавање бројевних израза, поред систематизације знања наставних садржаја дијељења, допуњени су захтјевима систематузације знања Првог модела (множење). Трећи модел је примјена Првог и Другог модела. Даље, Трећи модел је проширен одабраним текстуалним задацима из уџбеника математике и збирке задатака за пети разред, који се користе у настави. Задаци су модификовани тако што је текст задатка приказан помоћу схеме, табеле или као полупрограмирани проблем. На часовима експерименталне наставе коришћени су детаљно разрађени примјери наведених модела, а сви примјери се налазе у наставним листићима за учење, који су припремљени за све ученике (Прилог 9).

Дакле, сви креирани молели су међусобно повезани, Други модел настаје надограђивањем Првог модела, а Трећи модел је модификација Првог и Другог модела. Овим концептом креирања модела, од Првог до Трећег, описан је „развојни пут“ за постепено и систематско повезивање и праћење, а затим и вредновање математичких знања ученика о аритметичким и алгебарским садржајима.

Током експерименталне наставе, улога домаћих задатака састојала се у изграђивању способности ученика за самостално рјешавање проблема постављених варирањем репрезентација и контекста, што доводи до ефикасне примјене и повезивања усвојених математичких знања из аритметичких и алгебарских садржаја. У циљу развоја мотавицаје рјешавања проблема домаћих задатака, истраживач је редовно прегледао задатке намијењене за самосталан рад (Прилог 9). Сваки урађен задатак је регистрован, као и тачан одговор ученика у рјешавању проблема. Такође, у току израде задатака на часу, биљежени су успјешни и мање успјешни одговори ученика који су се ангажовали у рјешавању проблема. Исто, истраживач је предвидио и одређене награде за 5 ученика који остваре најбоље резултате рјешавања проблема на часу и на тестовима знања.

7.2. Иницијално тестирање

Иницијални тест смо конструисали у сврху уједначавања група и прикупљања података о степену разумијевања основних својстава броја и рачунских операција, те бројевних и словних израза, затим о способностима рјешавања и састављања проблема и употреби промењљиве. У иницијалном тесту садржано је 10 задатака (Прилог 1, Прилог 2). Садржаји су прилагођени према Наставном плану и програму математике који је реализован за прва три мјесеца петог разреда. Задаци су вредновани по кључу, према коме је максимално могући број остварених бодова износио 100.

Иницијалним тестирањем обухваћени су следећи аспекти знања које смо сматрали релевантним за истраживање:

1. разумијевање основних својстава броја (мјесне вриједности цифре у броју, мултипликативни запис броја и мјесто броја у бројевном низу);
2. разумијевање бројевних и словних израза;
3. разумијевање својстава рачунских операција помоћу полупрограмираног примјера;
4. састављање проблема помоћу схематске репрезентације;
5. рјешавање једначине помоћу схематске репрезентације;
6. рјешавање симболички записане неједначине;
7. рјешавање текстуалног, аутентичног, проблема приказаног помоћу схеме.

У оквиру иницијалног теста конструисали смо задатке који су нам помогли да добијемо одговоре на претходно наведене аспекте знања.

Први (записивање вишецифреног броја) и други задатак (записивање бројевног низа) дају нам одговор на разумијевање основних својстава броја (мјесне вриједности цифре у броју, мултипликативни запис броја и мјесто броја у бројевном низу).

Трећи задатак (повезаност рачунских операција) укључује уочавање повезаности рачунских операција истог приоритета, односно тражење непознатог броја. Ученици треба да испитају дати бројевни запис, пронађу стратегију рјешавања непознатог броја, водећи рачуна о мјесној вриједности цифре у броју, и затим провјере добијена рјешења. Четврти и пети задатак, зависност збира(разлике) и сталност збира(разлике), постављени полупрограмираним примјером, показују нам колико ученици разумију основна својства рачунских операција.

Шести задатак (рјешавање једначине и састављање текстуалног проблема) укључује, прво, активност превођења информација из схематског у симболички запис. Ученици, такође, симболички записану једначину треба да ријеше, а затим да саставе текстуални задатак.

Седми задатак односи се на рјешавање задате неједначине једноставном математичком процедуром. Овим задатком испитујемо приступ који ученици користе у рјешавању неједначина, односно примјену правила зависности резултата операција од промјене њених компоненти.

Осми задатак (рјешавање аутентичних проблема) испитује способност ученика да на основу задатог текста и схематског приказа података изведу закључак, те да запишу одговарајући израз (симболичку структуру) који одговара тој ситуацији, а затим ријеше проблем. На основу овог задатка видјећемо колико су ученици способни у рјешавању аутентичних проблема, који поред текста садрже схематски приказ података.

Девети и десети задатак испитују структурално схватање бројевних и словних израза. Разумијевање појма израза, бројевног и словног, и његовог значења и структуре, као и прихватање израза као самосталног објекта и примјена својстава израза јесу основна знања за

даље развијање алгебарских знања и способности (Зељић, 2011). Зато, иницијалним тестом провјеравамо базична знања и способности, која представљају темељ за даље учење аритметичких и алгебарских садржаја.

7.2.1. Уједначавање група

Прије поступка уједначавања група, представићемо и неке метријске карактеристике теста. Метријске карактеристике испитиване су на узорку од 112 ученика. Као и код већине тестова знања примијењена је логичка валидација теста, односно провјеравање да ли се тест слаже са захтјевима Наставног програма математике за пети разред и да ли одговара садржајима на који се односи. У циљу провјере валидности садржаја, консултовано је мишљење учитеља укључених у експериментални програм, као и мишљење истакнутог стручњака из ове области проф. др Јасмине Милинковић. За мјерење поузданости теста коришћен је Кронбахов алфа клоефицијент. Иницијални тест има прихватљив коефицијент поузданости (интерну конзистентност) – Кронбахов алфа коефицијент је 0.713.

Уједначавање група урађено је помоћу иницијалног тестирања ученика. У табели Дескриптивна статистика иницијалног тестирања (Табела 7) приказани су укрштени нивои два фактора, односно имамо посебно за експерименталну и контролну групу, најмањи и највећи број остварених бодова, аритметичке средине и стандардне девијације постигнућа ученика на иницијалном тесту знања. Максималан број бодова на иницијалном тесту био је 100.

Табела 7. Дескриптивна статистика иницијалног тестирања

Група	N	Минимум	Максимум	Средња вр.	Ст.девијација
експериментална	56	10,00	97,00	53,5714	19,09389
контролна	56	11,00	100,00	53,8214	19,00728

Тест за нормалност расподјеле резултата на иницијалном тесту знања за експерименталну и контролну групу одређена је Шапиро−Вилковим тестом (Табела 8). Вјероватноћа нормалне расподјеле резултата на иницијалном тесту знања за експерименталну групу и контролну групу већа је од 0,05 и можемо прихватити нулту хипотезу, да резултати иницијалног теста имају нормалну расподјелу у експерименталној и контролној групи.

Табела 8. Резултати Шапиро-Вилковог теста (Shapiro–Wilk) одступања од нормалне расподеле

Група	Статистика	df	Значајност
експериментална	,981	56	,518
контролна	,984	56	,639

Поређењем резултата експерименталне и контролне групе на иницијалном тесту помоћу Т–теста за независне узорке (Табела 9) добијамо да нема статистички значајне разлике у постигнућима ученика (p= 0. 945). На основу наведеног, закључујемо да између ученика експерименталне и контролне групе нема статистички значајне разлике у математичким постигнућима на иницијалном тестирању. Детаљна анализа задатака и постигнућа на сваком задатку биће представљена у поглављу *Постигнућа ученика у задацима на иницијалном тесту*.

7.3. Реализација наставних часова

Наставни часови по планираним моделима (Први модел, Други модел и Трећи модел) су реализовани током 11 седмица, о чему је више описано у поглављу *Израда експерименталних модела систематизовања знања о аритметичким и алгебарским садржајима*. Све моделе је реализовао аутор. Експериментална група је часове систематизације знања, аритметичких и алгебарских садржаја, организовала по планираним моделима. Ученици контролне групе нијесу подвргнути експерименталном програму, већ су са својим учитељима рјешавали проблеме из уџбеника и збирке задатака из математике за пети разред. Уводни дио наставних часова, експерименталног програма, односио се на обнављање основних правила која су неопходна за рјешавање проблема. Затим су ученици са аутором колективно рјешавали задатке.

7.4. Експериментални програм

Разлог због кога смо се опредијелили да истраживање спроведемо у петом разреду јесу наставни садржаји. Како би се испитали ефекти варирања репрезентација и контекста проблема на вредновање математичких постигнућа рјешавања проблема ученика, тј. ефикасност примјене и развоја математичких знања, аритметичких и алгебарских садржаја, неопходно је са ученицима дужи временски период интензивно примјењивати такав начин рада. Када су у питању математички садржаји који су реализовани у истраживању, ријеч је о образовно – васпитном исходу *Својства скупа природних бројева N и N_0 у рјешавању различитих аритметичких задатака и задатака из свакодневног живота* који обухвата следеће исходе учења:

1. Писмено множење двоцифреним бројем;
2. Писмено множење троцифреним бројем;
3. Производ једнаких чинилаца, степен;
4. Примјена закона дистрибутивности множења према сабирању (одузимању);
5. Дијељење декадном јединицом;
6. Дијељење једноцифреним бројем без остатка и са остатком;
7. Дијељење двоцифреним бројем без остатка и са остатком;
8. Веза множења и дијељења;
9. Редослед извођења рачунских операција;
10. Примјена закона дистрибутивности дијељења према сабирању (одузимању);
11. Зависност производа од промјене чинилаца;
12. Зависност количника од промјене дјељеника и дјелиоца;
13. Примјена олакшица у рачунању;
14. Израчунавање вриједности бројевних израза;
15. Једначине у вези са множењем и дијељењем;
16. Неједначине у вези са множењем и дијељењем;
17. Рјешавање простијих практичних задатака и проблема.

За потребе овог истраживања распоред и број часова наведених исхода учења био је унапријед утврђен, па су експериментална и контролна група имале једнак број часова.

На основу теоријског оквира изложеног у првом дијелу рада и проученог садржаја Наставног плана и програма математике за пети разред основне школе (множење, дијељење и једначине и неједначине у скупу природних бројева N и N_0) развили смо три модела систематизовања знања аритметичких (множење и дијељење) и алгебарских (једначине и

неједначине) садржаја, који су описани у поглављу *Израда експерименталних модела систематизовања знања о аритметичким и алгебарским садржајима*.

Први модел систематизовања знања о множење у скупу природних бројева N и N_0 (писмено множење двоцифреним бројем; писмено множење троцифреним бројем; производ једнаких чинилаца, степен; примјена закона дистрибутивности множења према сабирању (одузимању); примјена олакшица у рачунању; израчунавање вриједности бројевних израза; рјешавање простијих практичних задатака и проблема) реализован је током 4 часа, у децембру 2019.године. Затим је услиједио Финални тест знања 1, којим смо утврдили ефикасности примјене усвојених знања о множењу, у скупу природних бројева N и N_0, у рјешавању текстуалног и табеларног приказа проблема, постављених у оквиру реалног контекста. Тестирање је спроведено истог дана у експерименталној и контролној групи, 24.децембра 2019. године.

Други модел систематизовања знања о дијељењу у скупу природних бројева N и N_0 (дијељење декадном јединицом; дијељење једноцифреним бројем без остатка и са остатком; дијељење двоцифреним бројем без остатка и са остатком; веза множења и дијељења; редослед извођења рачунских операција; примјена закона дистрибутивности дијељења према сабирању (одузимању); зависност производа од промјене чинилаца; зависност количника од промјене дјељеника и дјелиоца; примјена олакшица у рачунању; рјешавање простијих практичних задатака и проблема) реализован је током 6 часова, у јануару и фебруару 2020.године. За утврђивање ефикасности примјене усвојених знања о дијељењу, у скупу природних бројева N и N_0, у рјешавању проблема текстуалног, схематског, сликовног, табеларног, симболичког и полупрограмираног приказа са аутентичним подацима из реалног окружења, коришћен је Финални тест знања 2. Такође, тестирање је спроведено истог дана у експерименталној и контролној групи, 18. фебруара 2020. године.

Трећи модел систематизовања знања о једначинама и неједначинама у скупу природних бројева N и N_0 (једначине у вези са множењем и дијељењем; неједначине у вези са множењем и дијељењем; рјешавање простијих практичних задатака и проблема) реализован је током 4 часа, у фебруару и марту 2020. године. Затим, за утврђивање ефикасности примјене усвојених знања рјешавања једначина и неједначина, у скупу природних бројева N и N_0, у рјешавању проблема схематског, табеларног и полупрограмираног приказа, повезаних са реалним ситуацијама, примијењен је Финални тест знања 3. Исто, као и за претходна два теста, тестирање је спроведено истог дана у експерименталној и контролној групи, 12. марта 2020. године.

Анкетни упитник за ученике ради испитивања мишљења о постављању проблема у настави математике петог разреда је, због појаве пандемије Ковид–19, реализован помоћу Вајбер група од 7. до 10. априла 2020. године.

7.4. Финално тестирање

Као што смо навели, финално тестирање је спроведено у 3 временска периода:

1. Финални тест знања 1 (множење у скупу N_0);
2. Финални тест знања 2 (дијељење у скупу N_0);
3. Финални тест знања 3 (једначине и неједначине у скупу N_0).

Примијењеним тестовима знања, са захтјевима рјешавања проблема, рачунања и квантитативног образложења, утврђено је практично знање из математике. Изабрали смо примијењене проблеме из два разлога. Први, примијењени проблеми су често коришћена мјера

постигнућа из математике. Други, проблеми садрже аутентичне податке са пратећим текстом, табелама, сликама или схемама. Поред тога, постављеним захтјевима проблема смо жељели да више подстакнемо анализу свакодневних ситуација, као и значај примјене математичког знања у рјешавању друштвено корисних проблема.

Пошто смо анализирали постављање проблема примјеном технике варирања репрезентација и контекста у формулацији захтјева задатка, а која пружа могућност систематске примјене и вредновања усвојених математичких знања у рјешавању проблема ученика петог разреда, то смо на финалним тестовима издвојили следеће групе проблема:

1. задаци примјене олакшица у рачунању, разумијевање својстава броја и рачунских операција,
2. текстуално задати проблеми из реалног окружења,
3. полупрогамирани проблеми,
4. проблеми приказани помоћу схеме или слике,
5. проблеми приказани помоћу табеле,
6. проблеми схематски и симболички постављених једначина и неједначина,
7. састављање текстуалног проблема на основу бројевних, симболичких израза и схематске репрезентације.

Детаљна, квантитативна и квалитативна анализа постигнућа ученика на финалним тестовима знања биће представљена у поглављу *Анализа резултата финалног тестирања*.

7.5.Анкетирање ученика експерименталне и контролне групе

Анкетирање је спроведено послије примјене експерименталног програма. Анкетни упитник за ученике садржи 23 питања, која су конципирана за следеће повезане групе питања:

1. мишљење ученика о значају математичких знања за живот и мишљење о развоју властитих способности рјешавања проблема;
2. примјена проблема и контекст проблема у настави математике;
3. репрезентације проблема у настави математике;
4. стратегије ученика у рјешавању проблема;
5. мишљење ученика о значају варирања репрезентација у формулацији проблема.

Детаљна анализа резултата Анкетног упитника налази се у поглављу *Анализа и интерпретација резултата Анкетног упитника*.

8. Статистичка обрада података

За статистичку обраду прикупљених података коришћени су статистички пакети SPSS Statistics 23 (Statistical Package for the Social Sciences) и Microsoft Excel.

Нормалност расподјеле испитиваних параметара, асиметричност и хомогеност дистрибуције потврђена је помоћу Шапиро–Вилковог теста, као и помоћу вриједности скјуниса и куртозиса. За описивање, израчунавање и приказивање основних карактеристика испитиваних варијабли коришћена је дескриптивна статистика. Након анализе података урађена је и провјера поузданости помоћу Кронбаховог коефицијента α (Cronbach et al., 1972).

Примјеном Т–теста, на нивоу значајности $0{,}01 \leq p \leq 0{,}05$, потврђен је утицај испитаника, ученика експерименталне и контролне групе, на резултате Иницијалног, Финалног 1, Финалног 2 и Финалног 3 теста. Поред тога, приказан је корелациони–регресиони исход на примијењеним тестовима истраживања. Корелационо–регресионим нацртима

жељели смо да прикажемо два аспекта истраживања, корелациони и регресиони. *Корелациони аспект* се састоји у утврђивању у којој мери постоји *повезаност* (корелација) између варијабли у нацрту. *Регресиони аспект* се састоји у утврђивању у којој мери зависне варијабле могу да се *предвиде* или *процене* или *објасне* на основу независних варијабли (Тодоровић, 2016:174). Дакле, кореалционом анализом (Пирсонов коефицијент корелације) је испитана корелациона зависност између постигнућа испитаника у иницијалном и финалним тестовима знања, док регресионом анализом је утврђен проценат утицаја једног теста знања на други тест (коефицијент детерминације R^2).

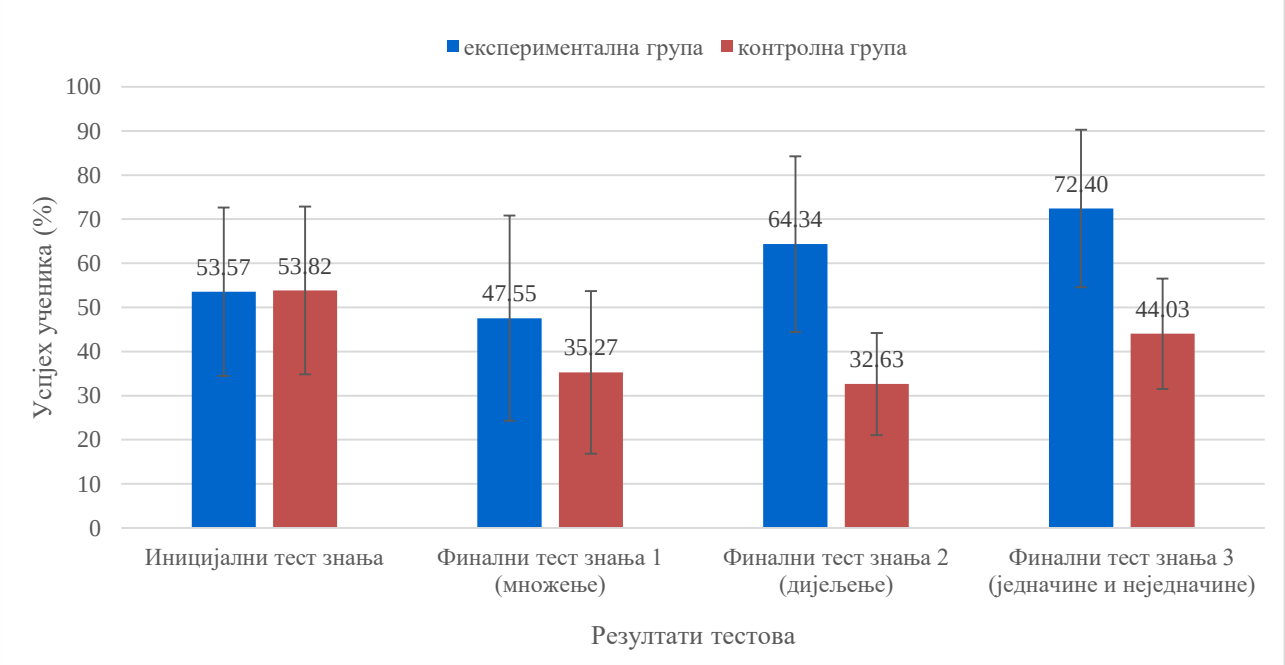
Да би се утврдио утицај задатака на постигнуће сва четири теста (Иницијални, Финални 1, Финални 2, Финални 3) коришћена је једнофакторска анализа варијансе (АНОВА), гдје су разлике средина (пост–хок анализа) тестиране помоћу Бонферони теста на нивоу значајности од $0{,}01 \leq p \leq 0{,}05$ (Franke & Christie, 2012). Кроз сва четири теста анализирали смо начине на који су урађени задаци примјеном статистичких поступака за поређење категоричких варијабли. На иницијалном тестирању, за поређење међу групама задатака у односу на испитанике, ученике експерименталне и контролне групе, примијењен је Хи–квадрат тест (Карл Пирсонов (Karl Pearson) тест хомогеност дистрибуција) (Marascuilo & Serlin, 1995). Такође, у завршним тестирањима разматрали смо начине на који су урађени задаци и користили смо статистичке поступке предвиђене за поређење неуређених категоричких варијабли (Хи–квадрат тест – Карл Пирсонов (Karl Pearson) тест хомогеност дистрибуција). У случајевима када предуслов за коришћење овог теста није био испуњен (да највише 20% ћелија у табели контингенције има очекивану вриједност не мању од 5), употребљен је Фишер–Фриман–Халтонов тест (FisherFreeman–Halton), који је екстензија Фишеровог екзактног теста за табеле веће од 2×2 (McDonald, 2014).

За поређење одговора ученика из Анкетног упитника, тј. утврђивање да ли постоје статистичке значајне разлике у мишљењу испитаника експерименталне и контролне групе, коришћен је Хи–квадрат тест.

IV АНАЛИЗА И ИНТЕРПРЕТАЦИЈА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА

Као што смо навели у поглављу *Израда експерименталних модела систематизовања знања о аритметичким и алгебарским садржајима*, сви тестови знања су конструисани у складу са захтјевима Наставног програма математике за пети разред и одговарају природи садржаја на који се односе. За утврђивање поузданости примијењеиних тестова коришћен је Кронбахов алфа коефицијент, који одређује интерну конзистенцију између тестова (Reynaldo & Santos, 1999). Кронбахов алфа коефицијент на тестовима знања, тј. на четири ставке (Иницијални, Финални 1, Финални 2 и Финални 3) бодоване од 0 до 100 поена, за експерименталну групу износи 0.890, а за контролну 0.862, што показује на добру поузданост, будући да су вриједности веће од 0.7 прихватљиви коефицијенти поузданости (Ibid).

На иницијалном тесту знања су забиљежени приближно исти просјечни резултати код ученика експерименталне и контролне групе, док се просјечни резултати на финалним тестовима знања значајно разликују (Слика 16). Резултати Т–теста (Табела 9) за експерименталну и контролну групу показују да на иницијалном тесту нема статистичке значајне разлике у постигнућима ученика (p=0.945), док на свим финалним тестовима постоје статистичке значајне разлике. На првом финалном тесту вриједност статистичке значајности износи p=0.002, а на, наредним, другом и трећем има исту вриједност p=0.000. Детаљна анализа задатака и постигнућа на иницијалном и финалним тестовима биће представљена у поглављима *Постигнућа ученика у задацима на иницијалном тесту* и *Анализа резултата финалног тестирања*.



Слика 16. Просјечна постигнућа експерименталне и контролне групе на тестовима знања

Табела 9. Значајност разлика у резултатима тестова контролне и експериметалне групе

Т-Тест	Левене тест		Т -Тест		
	F	P	t	P	Стандардна грешка
Иницијални тест знања	0.028	0.869	-0.069	0.945	3.60023
Финални тест знања 1 (множење)	2.400	0.124	3.098	**0.002**	3.96596
Финални тест знања 2 (дијељење)	0.313	0.577	8.690	**0.000**	3.64931
Финални тест знања 3 (једначине и неједачине)	0.268	0.606	7.902	**0.000**	3.59079

1. Кратак приказ корелационо–регресионих резултата на тестовима истраживања

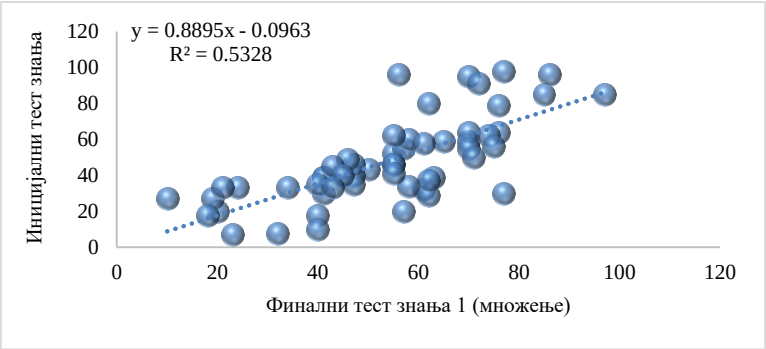
Укратко, у наредном дијелу је приказан корелационо–регресиони исход на примијењеним тестовима истраживања. Упоређивањем резултата који су ученици постигли на тестовима знања потврђена је јака корелација између испитиваних варијабли (ниво значајности 0,01). У експерименталној групи је потврђен висок ниво корелације између Иницијалног и Финалног теста знања 1 (r= 0.730), између Иницијалног и Финалног теста знања 2 (r= 0.749) и између Финалног теста знања 1 и Финалног теста знања 2 (r= 0.775) (Табела 10). Средњи ниво корелације утврђен је између: Финалног теста знања 2 и Финалног теста знања 3 (r=0.627), Иницијалног и Финалног теста знања 3 (r=0.555) и Финалног теста знања 1 и Финалног теста знања 3 (r=0.593) (Табела 10). Примјећујемо да је сваки наредни тест знања у корелацији са претходним тестом знања, што значи да је повезаност структуре експерименталног програма постављања проблема, варирањем репрезентација и контекста у формулацији захтјева задатка, са сваким наредним тестом знања утицала на пораст постигнућа на тестовима знања, односно на развој способности рјешавања проблема.

Табела 10. Корелације (Пирсонов коефицијент) између резултата тестова код ученика експерименталне групе

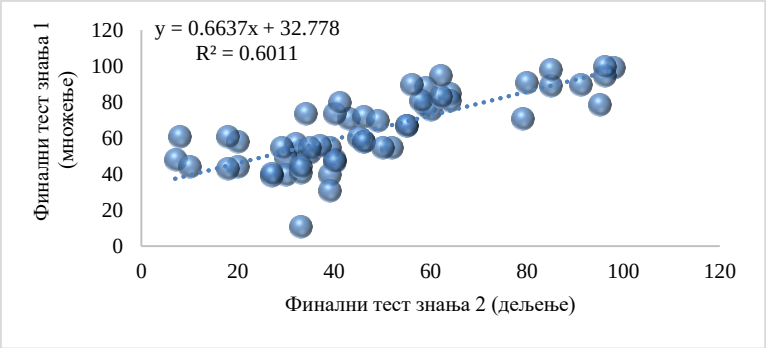
Корелације за експерименталну групу	Иницијални тест знања	Финални тест знања 1 (множење)	Финални тест знања 2 (дијељење)	Финални тест знања 3 (једначине и неједначине)
Иницијални тест знања	1	0.730**	0.749**	0.555**
Финални тест знања 1 (множење)		1	0.775**	0.593**
Финални тест знања 2 (дијељење)			1	0.627**
Финални тест знања 3 (једначине и неједначине)				1

нз – статистички није значајно, * и ** значајност на нивоу 0,05 и 0,01

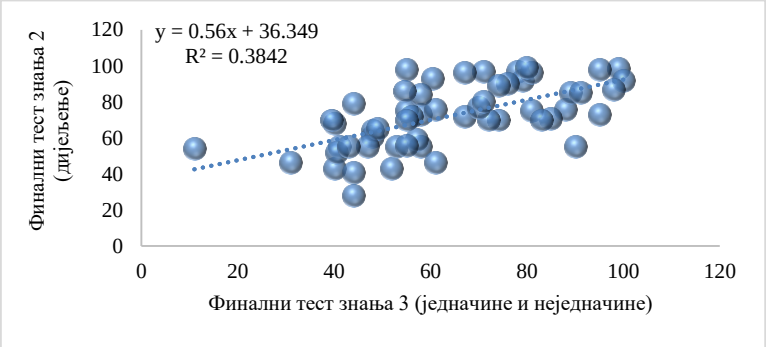
На наредним корелационим дијаграмима, за експерименталну групу (Слика 17. *а, б, в*), је приказан регресиони исход између тестова знања, који су спроведени у два сукцесивна временска периода (почев од иницијалног до трећег завршног теста знања). Сваки објекат на дијаграму је приказан тачком, односно маркером на графикону, а двије координате те тачке су управо мјере објекта за двије варијабле (Тодоровић, 2016).



а) Корелације између Иницијалног и Финалног теста знања 1



б) Корелације између Финалног теста знања 1 и Финалног теста знања 2



в) Корелације између Финалног теста знања 2 и Финалног теста знања 3

Слика 17. *а, б, в*. Корелациони дијаграми тестова истраживања за експерименталну групу

Скупови маркера на корелационом дијаграму постепено расту надесно и нагоре, из чега можемо закључити да постоји позитивна корелација, тј. са порастом резултата на једном тесту знања постоји извјесна тенденција пораста резултата на другом тесту. За утврђивање колики је проценат утицаја постигнућа једног теста на други тест знања коришћен је коефицијент детерминације R^2, односно проценат варирања зависне варијабле (теста знања на x оси) који је *детерминисан* варирањем независне варијабле (теста знања на y оси) (Ibid). Тако,

53%(R^2=0.5328) укупне варијабилности постигнућа на Финалном тесту знања 1 може се приписати варирању постигнућа на Иницијалном тесту знања (Слика 17.*а*). Слично, 60%(R^2=0.6011) укупне варијабилности постигнућа Финалног теста знања 2 приписује се варирању постигнућа Финалног теста знања 1 (Слика 17.*б*), док 38%(R^2=0.3842) укупне варијабилности постигнућа Финалног теста знања 3 зависи од варирања постигнућа претходног, Финалног теста знања 2 (Слика 17.*в*).

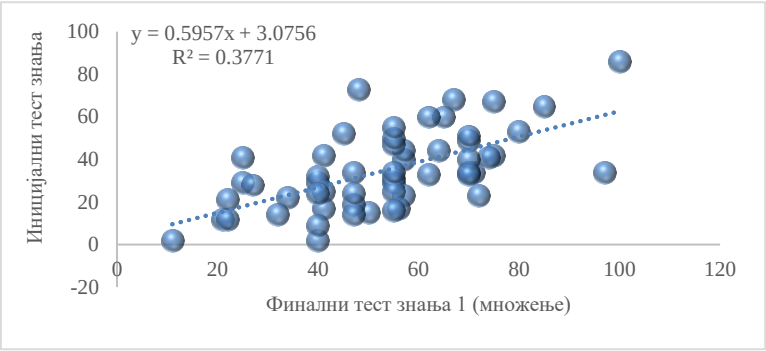
С друге стране, код ученика контролне групе Пирсонов коефицијент корелације (ниво значајности 0,01) на резултатима тестова знања (Табела 11) потврђује висок ниво корелације између Финалног теста знања 1 и Финалног теста знања 3 (r= 0.753). На осталим тестовима утврђен је средњи ниво корелације. На примјер, између Иницијалног и Финалног теста знања 1 (r= 0.623), затим Финални тест знања 1 је у незнатно слабијој корелацији са Финалним тестом знања 2 (r=0.604), као и Финални тест знања 2 са Финалним тестом знања 3 (r=0.613). Примјећујемо да је сваки наредни тест знања у приближно истој корелацији са претходним тестом знања, што значи да повезаност структуре експерименталног програма постављања проблема, варирањем репрезентација и контекста у формулацији захтјева задатка, са сваким наредним тестом знања није значајно утицала на промјене у постигнућима рјешавања проблема. Из овога можемо закључити да су се ученици контролне групе постепено навикавали на експериментални програм, тј. рјешавање проблема, и то потврђује одговор Наталије, ученице контролне групе, након урађеног трећег финалног теста: „Овај тест сам најбоље урадила. Тек сада сам се привикла на ове задатке.“

Табела 11. Корелације (Пирсонов коефицијент) између резултата тестова код ученика контролне групе

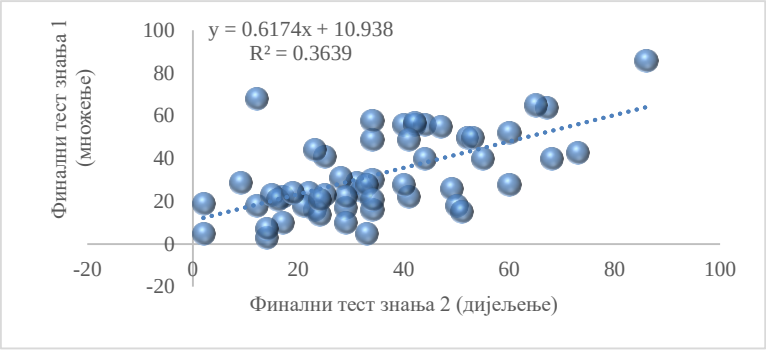
Корелације за контролну групу	Иницијални тест знања	Финални тест знања 1 (множење)	Финални тест знања 2 (дијељење)	Финални тест знања 3 (једначине и неједначине)
Иницијални тест знања	1	0.623**	0.518**	0.546**
Финални тест знања 1 (множење)		1	0.604**	0.753**
Финални тест знања 2 (дијељење)			1	0.613**
Финални тест знања 3 (једначине и неједначине)				1

нз – статистички није значајно, * и ** значајност на нивоу 0,05 и 0,01

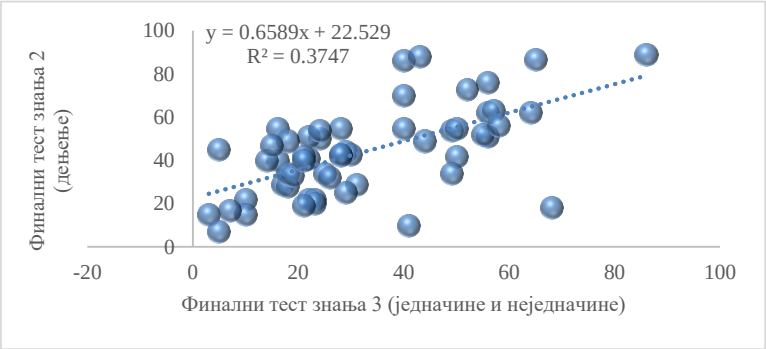
На корелационим дијаграмима за контролну групу (Слика 18. *а,б,в*), скупови маркера оријентисани су од доље лијево ка горе десно, што показује позитивну корелацију, будући да слабија постигнућа на једном тесту знања одговарају слабијим постигнућима на другом тесту, а боља постигнућа одговарају бољим. Осим тога, скуп маркера за постигнућа на Финалном тесту знања 1 и Финалном тесту знања 2 (Слика 18.*б*) је једним дијелог густо концентрисан у првом квадранту, што указује на слабија постигнућа ученика на овим тестовима знања. Нешто боља постигнућа примјећујемо на Финалном тесту знања 2 и Финалном тесту знања 3, тј. мањи скуп маркера у првом, а већи у трећем квадранту (Слика 18.*в*). Утицај постигнућа једног теста на постигнућа другог теста знања, спроведена у два сукцесивна временска периода, тј. коефицијент детерминације R^2 се креће, приближно, од 36% до 38%, што показује да нема значајних разлика о утицају постављених задатака финалних тестова знања на постигнућа ученика.



а) Корелације између Иницијалног и Финалног теста знања 1



б) Корелације између Финалног теста знања 1 и Финалног теста знања 2



в) Корелације између Финалног теста знања 2 и Финалног теста знања 3

Слика 18.*а, б, в*. Корелациони дијаграми тестова истраживања за контролну групу

2. Постигнућа ученика у задацима на иницијалном тесту

Задаци на иницијалном тесту постављени су варирањем репрезентација и контекста. Укључивали су разумијевање основних својстава броја и рачунских операција који су постављени помоћу реторичке и симболичке формулације проблема, као и помоћу полупрограмираног примјера, затим разумијевање бројевних и словних израза приказаних реторичком формулацијом, те способност састављања схематски постављеног проблема, потом рјешавање схематски постављене једначине, рјешавање симболички задате неједначине, као и аутентичног текстуалног проблема постављеног помоћу схематског приказа података. Питања су била отвореног типа, а начин на који су формулисана може се видјети у иницијалном тесту који је представљен у прилогу (Прилог 1; Прилог 2). За сваки од задатака дефинисане су категорије одговора ученика, а за статистичу обраду података коришћена је дескриптивна статистика, као и статистички поступци описани у поглављу *Статистичка обрада података*.

Постигнуће ученика на задацима разумијевања основних својстава броја и бројевних и словних израза постављених реторичком формулацијом проблема представљено је у табелама (Табела 12, Табела 13).

Табела 12. Одговори ученика у разумијевању основних својстава броја

реторичка формулација проблема	Категорија одговора	Група експериментална	контролна	Хи-квадрат	Значајност
1.а мјесна вриједност цифре у броју	нема рјешења или нетачно рјешење	17,9%	12,5%	.624	.430
	тачно рјешење	82,1%	87,5%		
1.б мултипликативни запис броја	нема рјешења или нетачно рјешење	21,4%	19,6%	.055	.815
	тачно рјешење	78,6%	80,4%		
2. мјесто броја у бројевном низу	нема рјешења или нетачно рјешење	26,8%	28,6%	.045	.833
	тачно рјешење	73,2%	71,4%		

Табела 13. Проценат тачних одговора у разумијевању бројевних и словних израза

реторичка формулација проблема	Група експериментална	Група контролна	Хи-квадрат	Значајност
9.а разумијевање односа „толико пута већи број“ (словни израз)	35,7%	33,9%	.039	.843
9.б разумијевање односа „толико пута мањи број“ (словни израз)	37,5%	26,8%	1.474	.225
10. разумијевање односа „за толико већи број“ (бројевни израз)	48,2%	69,6%	5.312	.021

Разматрајући вриједности процената које су дате у табелама, може се уочити успјешност ученика у разумијевању основних својстава броја, приказаних реторичком формулацијом проблема. Према томе, одговори ученика се статистички значајно не разликују (Табела 12). Приликом записивања вишецифреног броја (задатак 1.а), типичне грешке које се јављају у одговорима ученика су да, непажљивим читањем, недостаје или је замијењена одређена мјесна вриједност цифре у броју. Када је потребно поређати низ бројева од највећег до најмањег броја или обратно (2.задатак) имамо да ученици напишу обрнути низ бројева или изоставе један број. Ове грешке у одговорима ученика (задаци: 1.а и 2.) указују да они занемарују лингвистичке компоненте математичког концепта/појма (превођење математичког језика у матерњи и обрнуто) (Лазаревић, 2015). Такође, овдје примјећујемо да приликом рјешавања задатака ученици не примјењују један од корисних начина провјеравања урађеног задатка, тј. употребу обрнуте процедуре (Dreyfus, 2002). Иако би им провјера пружила доста сигурности, чини се да већина ученика није баш заинтересована за ову математичку активност. У задатку мултипликативног записа броја (задатак 1.б), ученици показују одређени степен успјешности, али у одговорима (око 20%) примјећујемо неразумијевање вриједности степена броја 10.

Када је у питању разумијевање словних израза (задаци 9.а, 9.б) (Табела 13), проценат тачних одговора је низак, незнатно је већи код ученика експерименталне групе али није статистички значајан (p= .843; p= .225). Интересантно је да у захтјеву словног израза ученици избјегавају, тј. не укључују слово у запису већ користе бројевне вриједности и прибјегавају срачунавању записаног израза. Осим тога, уколико користе словни запис не користе заграду, чиме показују неразумијевање словног израза, његовог значења и структуре, као и да не провјеравају добијено рјешење са постављеним захтјевом. Овим одговорима се потврђују потешкоће са којима се ученици суочавају уколико се рјешавање аритметичких израза не третира на алгебарски начин (Kaput, Blanton & Moreno, 2008). У схватању бројевних израза (10. задатак), проценат тачних одговора је већи код ученика контролне групе (69,6%) и статистички се разликује од одговора ученика експерименталне групе (p= .021) (Табела 13). Пост хок анализом, користећи Т–тест за утврђивање разлика у одговорима ученика (тачно и нетачно рјешење), показано је да се одговори ученика статистички значајно разликују (експериментална група p= .003; контролна група p= .000) (у прилозима Табела 1.б, Табела 2.б). Типично је да у одговорима преовладава алгоритамски поступак израчунавања, односно, иако није тражено да се израчуна већ само запише бројевни израз, ипак већина ученика је приступила израчунавању написаног израза. Дакле, у разумијевању бројевних и словних израза преовладава основни аритметички захтјев, израчунавање вриједности израза. Исто,

можемо закључити да ученици нијесу научени да користе слова у улози промјенљиве. Заправо, ученици нијесу изградили такав „осјећај“ да се у аритметичким односима укључена група бројева може замијенити било којом другом, да би касније та аритметичка правила лако изразили на симболичан начин, замјењујући одређене бројеве словима (Marjanovic & Kadijevich, 2001).

С друге стране, одговори ученика у разумијевању основних својстава операција (Табела 14) зависе од сложености постављеног захтјева, на шта у својим налазима истраживања, такође, упућује Реит (Reit, 2017), тј. да постоји мјерљив утицај структуралних карактеристика постављеног задатка на „тежину“ његовог рјешавања. То је посебно изражено у испитивању повезаности рачунских операција сабирања и одузимања (3.задатак), проблем добијања непознатих цифара у бројевима код одузимања. Већина ученика обје групе, тачније исти број ученика (51,8%), су нетачно ријешили или, уопште, нијесу рјешавали овај проблем. Иако су ови задаци у уџбеницима математике практиковани од другог разреда, ученици их нерадо рјешавају, што упућује да је на раном узрасту потребно више пажње посветити разумијевању међузависности рачунских операција, односно својствима рачунских операција и структури броја и то кроз различите репрезентације проблема. Али, ово не значи да ученици не разумију повезаност операција. На примјер, у рјешавању једначина (Табела 15) подаци показују на висок просјек успјешности (експериментална група 75,0%; контролна група 67,9%). Такође, ученици су, приближно, подједнако успјешни у разумијевању својстава рачунских операција, постављених симболичком и реторичком формулацијом проблема (задаци 4.а, 4.б) (Табела 14). На питање сталности збира(разлике) помоћу полупрограмираног захтјева (5. задатак), половина ученика (експериментална група 50%; контролна група 48,2%) је дала тачан одговор, што показује разумијевање појма еквиваленције два израза, тј. однос између бројева и правило непромјенљивости збира (разлике).

Табела 14. Проценат тачних одговора у разумијевању својстава рачунских операција

	Група		Хи-квадрат	Значајност
	експериментална	контролна		
3. повезаност рачунских операција (симболички проблем)	23,2%	12,5%	2.859	.239
4.а зависност збира(разлике) од промјене сабирка(умањиоца) (реторичка формулација)	80,4%	64,3%	3.613	.057
4.б зависност разлике(збира) од промјене умањеника(сабирка) (превођење из словног у бројевни израз)	82,1%	82,1%	.267	.875
5. сталност збира(разлике) (полупрограмирани проблем)	50%	48,2%	.036	.850

Табела 15. Одговори ученика у рјешавању једначине

Схематски приказ			Група експериментална	контролна
6.а једначина са једном непознатом	нема рјешења или нетачно рјешење	Број	10	16
		проценат	17,9%	28,6%
	тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	4	2
		проценат	7,1%	3,6%
	тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	42	38
		проценат	75,0%	67,9%
Хи-квадрат	2.251			
Значајност	.324			

Подаци рјешавања симболички задате неједначине (Табела 16) показују низак проценат тачног одговора (експериментална група 8,9%; контролна група 28,6%). Већина ученика (експериментална група 66,1%; контролна група 46,4%) поступак рјешавања неједначине своди на рјешавање једначине, тј. имамо тачан записан поступак рјешавања непознате вриједности али погрешно записан знак неједнакости, тј. ученици за рјешавање неједначине не користе својство зависности резултата од промјене компоненти. Такође, из одговора ученика примјећујемо да већина ученика не записују скуп рјешења неједначине већ само један број као коначно рјешење. Овакав одговор је потврђен у анализама грешака на задацима рјешавања неједначина, Вајавучјемеја и Клементса (Vaiyavutjamai & Clements, 2006), које су показале тенденцију „давања рјешења за одговарајућу једначину“, затим, и да ученици, поред тога што показују тачан поступак рјешавања неједначина и долазе до тачних одговора, ипак, у „оквирима за одговоре“ записују појединачне бројеве као одговоре. Осим наведеног, између ученика је утврђена одређена статистичка значајност (p= .021). Пост–хок анализом, користећи Бонферони пост хок критеријум за значајност (у прилозима Табела 3.б, Табела 4.б) показано је да међу категоријама одговора постоје статистички значајне разлике ($0.001 \leq p \leq 0.006$).

Табела 16. Одговори ученика у рјешавању неједначине

Симболички проблем			Група експериментална	контролна
7 –неједначина облика $x \pm m \geq n$	нема рјешења или нетачно рјешење	Број	14	14
		проценат	25,0%	25,0%
	тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	37	26
		проценат	66,1%	46,4%
	тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	5	16
		проценат	8,9%	28,6%
Хи-квадрат	7.683			
Значајност	.021			

Одговори ученика у рјешавању текстуалног аутентичног проблема, помоћу схематског приказа података (Табела 17), показују низак проценат успјешности (16,1%). Такође, нема значајних разлика у одговорима за нетачно и дјелимично ријешен проблем. Из овога можемо закључити да схематски приказ података ученицима није помогао у уочавању квантитативних односа који се односе на реалну ситуацију.

Табела 17. Одговори ученика у рјешавању аутентичног текстуалног проблема

Схематски приказ			Група	
			експериментална	контролна
8. примјена сабирања и одузимања у рјешавању стварних проблемских ситуација	нема рјешења или нетачно рјешење	Број	18	26
		проценат	32,1%	46,4%
	тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	29	21
		проценат	51,8%	37,5%
	тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	9	9
		проценат	16,1%	16,1%
	Хи-квадрат	2.735		
	Значајност	.255		

За разлику од остварених резултата на претходном проблему (Табела 17), у примјеру састављања проблема ученика на основу схематског приказа (Табела 18), који је потребно симболички записати и ријешити, ученици показују боља постигнућа. Проценат тачно састављеног проблема, тј. тачно описана ситуација и постављено питање, код ученика експерименталне групе износи 53,6%, а код ученика контролне групе 57,1%. Слично, у осталим категоријама одговора нема значајних разлика.

Табела 18. Одговори ученика у састављању проблема

Схематски приказ			Група	
			експериментална	контролна
6.б једначина са једном непознатом	нема одговора или нетачно састављен проблем	Број	26	20
		проценат	46,4%	35,7%
	дјелимично састављен проблем (тачно описана ситуација, али недостаје питање или нетачно постављено питање)	Број	0	4
		проценат	0%	7,1%
	у потпуности састављен проблем (тачно описана ситуација и постављено питање)	Број	30	32
		проценат	53,6%	57,1%
Хи-квадрат	4.847			
Значајност	.089			

3. Анализа резултата финалног тестирања

У нашем истраживању испитали смо да ли постављање проблема наставника примјеном технике варирања репрезентација и контекста у формулацији захтјева задатка утиче на математичка постигнућа рјешавања проблема, односно на ефикасност примјене и развоја математичких знања, аритметичких (множење и дијељење) и алгебарских садржаја (једначине и неједначине) у скупу природних бројева N_0, код ученика петог разреда основне школе црногорског образовног система. Дакле, имамо један непоновљени фактор (групе којој ученици припадају − експериментална и контролна група) и један поновљени фактор (варирање репрезентација и контекста проблема), који је спроведен у три различита временска тренутка.

Основна нулта хипотеза коју тестирамо у овом истраживању јесте да ли су аритметичке средине на свим нивоима поновљеног фактора једнаке, односно да ли се просјечне процјене математичких постигнућа рјешавања проблема ученика експерименталне и контролне групе на финалним тестовима знања статистички значајно разликују. Одговор на ово питање добијамо тестирањем нулте хипотезе која гласи: Између ученика експерименталне и контролне групе не постоје разлике у оствареним математичким постигнућима рјешавања проблема, аритметичких (множење и дијељење) и алгебарских садржаја (једначине и неједначине) у скупу природних бројева N_0, на финалним тестовима знања.

Прво, за утврђивање разлика између постигнућа рјешавања проблема ученика експерименталне и контролне групе на финалним тестовима знања потребно је провјерити да ли постоје одступања дистрибуције скорова од нормалне расподјеле (Табела 19).

Табела 19. Резултати Шапиро–Вилковог теста (Shapiro–Wilk) одступања од нормалне расподјеле

	Група	Статистика	df	Значајност
Финални тест знања 1 (множење)	експериментална	.946	56	.014
	контролна	.977	56	.371
Финални тест знања 2 (дијељење)	експериментална	.969	56	.160
	контролна	.947	56	.016
Финални тест знања 3 (једначине и неједначине)	експериментална	.960	56	.059
	контролна	.967	56	.134

На свим нивоима поновљеног фактора, тј. финалним тестовима знања, вриједности Шапиро−Вилковог теста показују да немамо нормалну дистрибуцију расподјеле на свим нивоима непоновљеног фактора (експериментална и контролна група). Према томе, за утврђивање разлика у просјечним постигнућима ученика користимо непараметријски Мен Витнијев тест (Mann–Whitney test) (Табела 21). Поред тога, приказани су укрштени нивои поновљеног и непоновљеног фактора, просјечни ранг и збир рангова (Табела 20).

Табела 20. Поновљени и непоновљени фактори истраживања, просјечни ранг и збир рангова

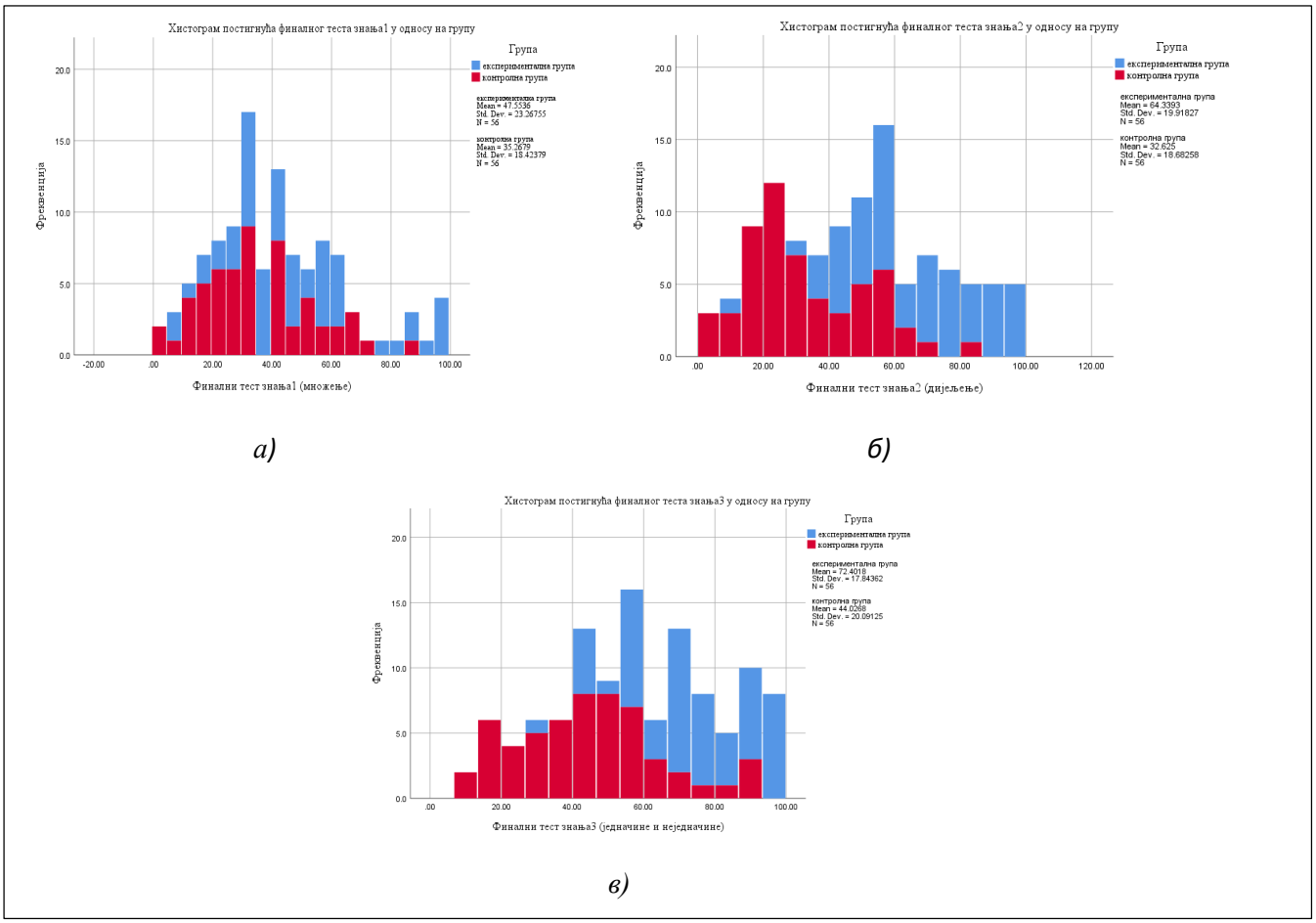
	Група	N	Просјечни ранг	Збир рангова
Финални тест знања 1 (множење)	експериментална	56	65,00	3640,00
	контролна	56	48,00	2688,00
Финални тест знања 2 (дијељење)	експериментална	56	77,05	4315,00
	контролна	56	35,95	2013,00
Финални тест знања 3 (једначине и неједначине)	експериментална	56	76,31	4273,50
	контролна	56	36,69	2054,50

Ред приближне, апросимакционе вјероватноће $0{,}000 \leq p \leq 0{,}006$ (Табела 21) показује веома малу вјероватноћу да нема статистичке значајне разлике у просјечним постигнућима рјешавања проблема између ученика експерименталне и контролне групе (нивои непоновљеног фактора) на свим финалним тестовима знања (нивои поновљеног фактора). Према томе, можемо да тврдимо да постоји интеракција између ова два фактора, групе којој ученици припадају и остварених постигнућа рјешавања проблема на финалним тестовима знања и одбацујемо нулту хипотезу.

Табела 21. Мен Витнијев тест (Mann–Whitney test) за утврђивање разлика у просјечним постигнућима ученика

	p
Финални тест знања 1 (множење)	,006
Финални тест знања 2 (дијељење)	,000
Финални тест знања 3 (једначине и неједначине)	,000

Значи, постоји ефекат поновљеног фактора, односно варирање репрезентација и контекста проблема утиче на степен математичких постигнућа рјешавања проблема ученика на финалним тестовима знања. Исто, можемо закључити да од групе којој ученици припадају, статистички значајно, зависи степен математичких постигнућа рјешавања проблема на финалним тестовима знања. Непоновљени фактор, група којој ученици припадају има два нивоа, експериментална и контролна група, што значи да се ова два нивоа значајно разликују, односно ученици експерименталне групе у односу на ученике контролне групе имају просјечно боља постигнућа рјешавања проблема на свим финалним тестовима знања, што је приказано хистограмима постигнућа (Слика19. *а, б, в*.). Расподјела резултата по интервалима у експерименталној групи има тенденцију раста надесно, што значи пораст позитивних резултата на финалним тестовима. С друге стране, расподјела резултата за контролну групу је на првом и другом финалном тесту усмјерена налијево, док на трећем финалном тесту прелази благо надесно и указује на нешто боља постигнућа у односу на претходне финалне тестове знања.



Слика 19. *а*, *б*, *в*. Хистограми постигнућа на финалним тестовима знања

На основу наведеног, можемо закључити да на свим финалним тестовима знања постоји ефекат варирања репрезентација и контекста проблема на математичка постигнућа рјешавања проблема, односно на примјену и развој математичких знања аритметичких (множење и дијељење) и алгебарских садржаја (једначине и неједначине) у скупу природних бројева N_0, ученика експерименталне и контролне групе. Сада нам предстоји да испитамо која варијација репрезентације и контекста проблема даје бољи преглед математичких знања ученика у рјешавању проблема, аритметичких (множење и дијељење) и алгебарских садржаја (једначине и неједначина) у скупу природних бројева N_0, на свим нивоима непоновљеног фактора. Заправо, који ниво резултата у рјешавању проблема ученици показују и у ком типу приказа и контекста проблема постижу најбоља постигнућа. Овим, жељели смо да утврдимо на које су репрезентације и контексте проблема ученици највише усредсређени, односно перцепцију различитих проблема ученика. Као што су Ван ден Хеувел Панхуизен и колеге (према English, 1997) истакли, ако математику предавамо на начин који „поштује“ знање ученика, неопходно је знати како они перципирају проблеме. Подстицањем ученика да изразе своје „виђење“ различитих проблема, наставнику се пружа прилика за свеобухватно вредновање нивоа математичких знања, која су полазиште за даље планирање наставног процеса.

Дакле, у наредном дијелу приказаћемо које варијације репрезентација и контекста проблема имају већи, а које мањи утицај, на математичка постигнућа ученика у рјешавању проблема, а тиме и на степен развоја математичких знања.

3.1. Постигнућа ученика у рјешавању проблема на финалним тестовима

Проблеми на финалним тестовима одговорају захтјевима модела описаних у поглављу *Израда експерименталних модела систематизовања знања о аритметичким и алгебарским садржајима*, а ради прегледности, анализа ће бити спроведена по групама задатака, које смо навели у поглављу *Финално тестирање*.

Задатке смо обиљежавали према редоследу финалног теста и редном броју задатка на тесту. На примјер, први задатак са првог финалног теста означавамо са 1.1., док исти редни број задатка на другом финалном тесту означавамо са 2.1., а на трећем финалном са 3.1., и тако редом све задатке. Анализу постигнућа ученика у рјешавању проблема изводимо у односу на варирања репрезентација и контекста проблема и категорије добијеног одговора. У циљу праћења развоја математичких знања, аритметичких и алгебарских садржаја, упоредили смо одговоре ученика у рјешавању проблема на истом и различитим финалним тестовима знања. Заправо, ово редовно и стално праћење метакогнитивне активности ученика је кључна карактеристика успјеха у сложеним математичким задацима. Упоређивање тренутног постигнућа, нивоа разумијевања и поступака рјешавања означава сложеност математичке активности ученика (Lester, 2013). Због објективнијег оцјењивања математичких постигнућа рјешавања проблема ученика, тестови знања су конципирани у двије групе А и Б. Сви примјери задатака финалних тестова налазе се у прилозима (Прилог 3, Прилог 4, Прилог 5, Прилог 6, Прилог 7 и Прилог 8).

Табела 22. Одговори ученика у примјени својства дистрибутивности

	Категорија одговора	Група експериментална	Група контролна	Хи-квадрат	Значајност
1.1.а множење троцифреног и једноцифреног броја 125·5	нема рјешења или нетачно рјешење	7,1%	5,4%	.254	.881
	тачно рјешење без примјене олакшице у рачунању	85,7%	85,7%		
	тачно рјешење са примјеном олакшице у рачунању	7,1%	8,9%		
1.1.б множење разлике бројем 5379·28 – 5 379·18	нема рјешења или нетачно рјешење	37,5%	55,4%	15.202	.001
	тачно рјешење без примјене олакшице у рачунању	12,5%	28,6%		
	тачно рјешење са примјеном олакшице у рачунању	50%	16,1%		
1.1.в множење вишецифреног броја троцифреним бројем 79 340·101	нема рјешења или нетачно рјешење	46,4%	50%	1.169	.557
	тачно рјешење без примјене олакшице у рачунању	35,7%	39,3%		
	тачно рјешење са примјеном олакшице у рачунању	17,9%	10.7%		

У задацима 1.1.а, 1.1.б и 1.1.в (Прилог 3, Прилог 4) испитали смо да ли ученици примјењују својство дистрибутивности као олакшицу у рачуну. Проценти показују (Табела 22) слабу примјену својства дистрибутивности за брже и лакше рачунање, већ већином присутност алгоритамског поступка израчунавања. Највећи проценат нетачних одговора је код примјера са већим захтјевом множења, тј. множења вишецифреног са троцифреним бројем. У овом примјеру (79 340·101), за примјену дистрибутивности множења према сабирању, већина ученика не користи могућност растављања троцифреног броја (101), на збир стотине и јединице. Изузетак је примјер 1.1.б, множења разлике бројем, у којем су успјешнији ученици експерименталне групе (p= .001), што можемо приписати ефекту увођења експерименталног фактора, тј. постављање бројевних израза у којима је инсистирано на примјени својства дистрибутивности. Ови одговори потврђују доказе да ученици у израчунавању бројевних израза не размишљају о примјени принципа (Schifter et al., 2008). Умјесто тога, они развијају вишезначна „локална“ значења операција, постају успјешни у разним приказима и уче извођење и доказивање општих тврђења о бројевима и операцијама (Ibid).

У постављеним проблемима дијељења у скупу природних бројева N и N_0, схематском (2.1.а) и полупрограмираном проблему са аутентичним подацима (2.1.б), анализа одговора ученика се значајно разликује у рјешењима схематског проблема, p= .009 (Табела 23), док нема значајне разлике у рјешењима полупрограмираног проблема, p= .174 (Табела 24). Приликом рјешавања схематски постављеног проблема дијељења, ученици су углавном наилазили на проблем тумачења задате схеме, односно превођења схематске репрезентације у симболички запис. И поред наведеног, ипак, у одговорима ученика (Табела 23) примјећујемо висок проценат успјешности дијељења без остатка, схематски постављеног проблема (експериментална група 91,1%; контролна група 69,6%). Такође, ученици успјешно рјешавају задати полупрограмирани проблем дијељења са остатком (Табела 24) (експериментална група 78,6%; контролна група 62,5%). Слично, ни у осталим категоријама одговора нема значајних разлика, односно нешто већи проценат ученика контролне групе је нетачно (нема рјешења или нетачно рјешење) или дјелимично (тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење) ријешило проблем.

Табела 23. Одговори ученика у рјешавању схематског проблема

			Група	
			експериментална	контролна
2.1.а дијељење без остатка	нема рјешења или нетачно рјешење	Број	1	9
		проценат	1,8%	16,1%
	тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	4	8
		проценат	7,1%	14,3%
	тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	51	39
		проценат	91,1%	69,6%
Хи-квадрат	9.333			
Значајност	.009			

Табела 24. Одговори ученика у рјешавању аутентичног полупрограмираног проблема

			Група	
			експериментална	контролна
2.1.б дијељење са остатком	нема рјешења или нетачно рјешење	Број	6	10
		проценат	10,7%	17,9%
	тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	6	11
		проценат	10,7%	19,6%
	тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	44	35
		проценат	78,6%	62,5%
Хи-квадрат	3.496			
Значајност	.174			

У израчунавању непознате бројевне вриједности схематски постављеног проблема (2.5.а$_2$), одговори ученика се значајно разликују, p= .000 (Табела 25). Ученици контролне групе наилазе на проблем разумијевања схематског проблема, односно већина ученика (80,4%) није ријешила или је нетачно ријешила проблем. С друге стране, преко половине ученика експерименталне групе је ријешило овај проблем (53,6%), што је последица увођења експерименталног програма, тј. схематских репрезентација проблема. Такође, мали број ученика је дјелимично ријешило проблем, тачно поставило поставку проблема, али нетачно израчунало постављени бројевни израз. Слично, у израчунавању задатог бројевног израза (2.5.б$_2$), у којем је систематски укључено записивање степена броја 10, одговори ученика се значајно разликују, p= .000 (Табела 26). Наиме, изражен проценат нетачног одговора присутан је код ученика контролне групе (82,1%), док је код ученика експерименталне групе знатно мањи (42,9%). Типичне грешке које се јављају у одговорима ученика јесу да ученици не разумију вриједност степена, односно производ једнаких чинилаца, који је већ раније обрађен. Исто тако, ученици не примјењују правило приоритета извођења рачунских операција, затим избјегавају или не користе правило заграда и гријеше у самом поступку рачунања. Ови одговори указују на механичку примјену аритметичких поступака израчунавања, како Џејкобс и колеге (Jacobs et al., 2007) наводе, ученици су често „несвјесни“ основних својстава операција са бројевима, не разумију како се ова својства примјењују у њиховим прорачунима, те да више имају интуитивно знање о основним бројевним односима, али који, углавном, нијесу експлицитно, систематски, испитани.

Табела 25. Одговори ученика у израчунавању непознате бројевне вриједности

Схематски проблем			Група експериментална	Група контролна
2.5.а$_2$ примјена рачунских операција у рјешавању проблема	нема рјешења или нетачно рјешење	Број	21	45
		проценат	37,5%	80,4%
	тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	5	3
		проценат	8,9%	5,4%
	тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	30	8
		проценат	53,6%	14,3%
Хи-квадрат	21.964			
Значајност	.000			

Табела 26. Одговори ученика у рјешавању сложеног бројевног израза

Симболички постављен проблем			Група експериментална	Група контролна
2.5.б$_2$ бројевни израз са 3 операције (примјена производа једнаких чиналаца–степен)	нема рјешења или нетачно рјешење	Број	24	46
		проценат	42,9%	82,1%
	тачно рјешење	Број	32	10
		проценат	57,1%	17,9%
Хи-квадрат	18.438			
Значајност	.000			

Одговори ученика у задацима који описују реалне ситуације (1.2. и 2.2.) се значајно разликују (Табела 27, Табела 28). Ријеч је о задацима варирања репрезентација проблема реалног контекста, односно, текстуалним (1.2.) и схематским репрезентацијама проблема (2.2.), и који се могу рјешавати на више начина. Разлика је посебно изражена у рјешењима схематског проблема. За разлику од ученика експерименталне групе (1,8%), ученици контролне групе у знатно већем проценту (46,4%) нијесу рјешавали или су нетачно ријешили овај проблем (Табела 28). Осим тога, мањи број ученика прави грешке у израчунавању тачно постављеног проблема (тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење). С друге стране, одговори ученика у рјешавању текстуално постављеног проблема (1.2.) показују релативно висок проценат успјешности (експериментална група 75,0%; контолна група 51,8%) (Табела 27). При том, ученици су концентрисани искључиво на резултат, док је поступак и начин представљања информација у другом плану, што такође потврђују Обрадовић и Зељић (Обрадовић & Зељић, 2015) у резултатима студије рјешавања текстуалних проблема. Исто, овдје, рјешења текстуалног проблема (1.2.), који је постављен у реалном и математичком контексту, сви ученици су представљали користећи симболичке репрезентације проблема, док визуелне репрезентације (реалне слике, геометријске моделе, дијаграме и сл.) није користио ниједан ученик.

Према наведеним подацима можемо претпоставити да, за разлику од ученика експерименталне групе, ученици контролне групе нијесу имали искуства у поступцима рјешавања схематских репрезентација проблема, што се показало у одговорима ученика о постављању схематских проблема у настави математике (p= .000), (Табела 54 из поглавља *Анализа и интерпретација резултата Анкетног упитника*). То значи да се у настави, углавном, рјешавају текстуално постављени проблеми, али за које нијесу у довољној мјери проучене одговарајуће стратегије процеса рјешавања проблема. Дакле, поменуте разлике ученика у рјешењима задатака који описују реалне ситуације (1.2. и 2.2.) можемо приписати увођењу експерименталног програма.

Табела 27. Одговори ученика у рјешавању текстуалног проблема из реалног окружења

			Група	
			експериментална	контролна
1.2. множење збира бројем	нема рјешења или нетачно рјешење	Број	9	20
		проценат	16,1%	35,7%
	тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	5	7
		проценат	8,9%	12,5%
	тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	42	29
		проценат	75,0%	51,8%
Хи-квадрат	6.886			
Значајност	.032			

Табела 28. Одговори ученика у рјешавању аутентичног схематског проблема

			Група	
			експериментална	контролна
2.2. дијељење декадном јединицом и множење једноцифреним бројем	нема рјешења или нетачно рјешење	Број	1	26
		проценат	1,8%	46,4%
	тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	6	6
		проценат	10,7%	10,7%
	тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	49	24
		проценат	87,5%	42,9%
Хи-квадрат	31.710			
Значајност	.000			

Такође, одговори ученика се значајно разликују у рјешавању проблема са аутентичним подацима, који поред текста садржи сликовни приказ података (2.3.а) (Табела 29). Проценат одговора нема рјешења или нетачно рјешење је посебно изражен код ученика контролне групе (80,4%). Успјешност рјешавања овако постављеног проблема је значајно већа код ученика

експерименталне групе (за 59%). У поређењу са претходно наведеним примјерима, тј. текстуалним и схематским проблемима из реалног окружења (1.2. и 2.2.), можемо закључити да је највећа разлика присутна у одговорима проблема сликовне репрезентације (2.3.а), а најмања у одговорима текстуалног проблема (1.2.). Ови подаци потврђују да ученици контролне групе не разумију структуру проблема и односе у задатку уколико је он постављен схематском и сликовном репрезентацијом, из чега можемо претпоставити да ови ученици нијесу имали прилику рјешавања овако постављених проблема.

Табела 29 . Одговори ученика у рјешавању аутентичног текстуалног проблема

Сликовни приказ			Група	
			експериментална	контролна
2.3.а дијељење и множење вишецифрених бројева	нема рјешења или нетачно рјешење	Број	16	45
		проценат	28,6%	80,4%
	тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	3	7
		проценат	5,4%	12,5%
	тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	37	4
		проценат	66,1%	7,1%
Хи-квадрат	41.948			
Значајност	.000			

Рјешења текстуалног проблема из реалног окружења (1.4.б) (Табела 30) показују низак проценат ученика који су постигли тачно рјешење (експериментална група 19,6%; контролна група 7,1%), тако да је изражен проценат ученика који нијесу рјешавали или су нетачно ријешили проблем (експериментална група 71,4%; контролна група 91,1%). Дакле, текстуално постављене проблеме ученици теже рјешавају. При рјешавању проблема, они користе метод покушаја и погрешака или метод израчунавања (пишући сложен израз који одговара структури проблема и метод израчунавања у корацима). То значи да је ученицима поред текста проблема неопходно понудити различите визуелне репрезенатције проблема (реалне слике, геометријске моделе, дијаграме и сл.) чиме се подстиче разумијевање проблема (Singer et al., 2011). Овим активностима постављања проблема ствара се боља повезаност међу појмовима и тиме продубљује њихово разумијевање. У вези са тим, ефикасно математичко размишљање подразумијева разумијевање релација приказа „истог" концепта, као и структурне сличности (и разлике) међу репрезентативним системима (Milinković, 2015b). Тако, на примјер, за процесе рјешавања реалистичких проблема, Лиш и Ламон (Lesh & Lamon, 1992) укључују паралелну и интерактивну употребу различитих система нотације и/или интерпретације проблема. Постављање проблема се разматра и као „пут ка открићу", којим се централни проблем разлаже на низ постављених питања (Prabhu & Czarnocha, 2015). Ово показује да када су ученици активно укључени у коришћењу различитих репрезентација проблема, они развијају математичка знања која им омогућавају изграђивање различитих стратегија рјешавања проблема.

Табела 30. Одговори ученика у рјешавању текстуалног проблема

			Група	
			експериментална	контролна
1.4.б разумијевање својстава броја и рачунских операција	нема рјешења или нетачно рјешење	Број	40	51
		проценат	71,4%	91,1%
	тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	5	1
		проценат	8,9%	1,8%
	тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	11	4
		проценат	19,6%	7,1%
Хи-квадрат	7.263			
Значајност	.026			

Када упоређујемо резултате одговора текстуалног проблема из реалног окружења (1.4.б), са првог финалног теста, и схематског проблема (2.2.), са другог финалног теста (Табела 30, Табела 28) уочавамо израженију разлику у одговорима схематског проблема. Тиме се потврђује ефекат дјеловања експерименталног фактора, примјена схематских репрезентација и реалног контекста у постављању проблема, које су укључене у Другом моделу. С друге стране, ово, такође, потврђују одговори ученика са Анкетног упитника (Табела 54, Слика 29).

Упоређивањем одговора ученика текстуаног проблема, који се односи на примјену новца у свакодневним ситуацијама (1.3.б) (Табела 31), са одговорима ученика аутентичног текстуалног проблема, приказаног помоћу слике (2.3.а) (Табела 29), примјећујемо већу способност ученика у рјешавању сликовне репрезентације проблема (2.3.а) него ли у рјешавању текстуалног проблема (1.3б), при чему је проценат успјешности знатно већи код ученика експерименталне групе. И ово потврђује ефекат експерименталног фактора, увођења визуелних (схематских) репрезентација проблема у Другом моделу. У тумачењу наведеног ефекта визуелно постављених проблема, Ларкин и Симон (према Dreyfus, 1994) проналазе, на примјер, у доступностима информација дијаграмског приступа рјешавања проблема. Изразита карактеристика дијаграмских репрезентација јесте да чувају просторне односе између компоненти проблема, информације су одређене њиховим положајем, пружајући тако могућност да се групишу око једног елемента, и служе за просторно приказивање логичких односа. Дакле, дијаграми не описују нужно просторни распоред, већ они имају својствене интерпретације и конвенције без којих су неразумљиви. Ученици који познају ове интерпретације и конвенције могу развити обрасце визуелног резоновања, док ученици који нијесу научили да „прочитају“ дијаграме не могу их искористити (Ibid). Стога, дијаграми помажу у процесу рјешавања проблема ученика, односно разумијевање и међусобно повезивање информација, али само оним ученицима који су имали прилику да науче шта сложене карактеристике дијаграма представљају.

Табела 31. Одговори ученика у рјешавању текстуалног проблема из реалног окружења

			Група експериментална	Група контролна
1.3.б примјена рачунских операција у рјешавању проблема из стварног живота (примјена новца)	нема рјешења или нетачно рјешење	Број	38	46
		проценат	67,9%	82,1%
	тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	6	8
		проценат	10,7%	14,3%
	тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	12	2
		проценат	21,4%	3,6%
Хи-квадрат	8.190			
Значајност	.017			

Поређењем одговора ученика у рјешавању проблема који су постављени табеларним приказом података, на свим финалним тестовима (1.4.а, 2.4.б, 3.3.) (Табела 32, Табела 33, Табела 34), показују да су највеће разлике присутне у рјешењима на трећем финалном тесту, тј. приликом рјешавања једначине (p= .000) (Табела 34), а најмање на првом тесту, тј. у проналажењу правила (p= .007) (Табела 32). Дакле, комплексност постављеног захтјева задатка утиче на степен његовог рјешавања (Reit, 2017). Тако, рјешавање задате једначине помоћу табеларног приказа података од ученика тражи способност читања података из табеле, затим превођење података у симболички запис, тј. једначину и рјешавање постављене једначине. Преко половине ученика контролне групе (53,6%) није ријешило или је нетачно ријешило овај проблем, док је исто постигнуће показало знатно мање ученика експерименталне групе (12,5%) (Табела 34). На првом финалном тесту, табеларни приказ података помаже лакшем уочавању постављеног правила и самим тим рјешавање проблема (експериментална група 73,2%; контролна група 46,4%) (Табела 32). Ипак, већи проценат ученика контролне групе (51,8%) је нетачно ријешило или није рјешавало овај проблем. Сличне разлике су у одговорима ученика код рјешавања словних израза постављених у табели (2.4.б) (Табела 33). Наиме, ученици тешко уочавају правило зависности количника од промјене дјељеника и дјелиоца и сталност количника (експериментална група 28,6%; контролна група 69,6%), и већином постављени словни израз замјењују бројевним и долазе до тачног рјешења (експериментална група 55,4%; контролна група 12,5%). Извјестан број ученика тачно поставља бројевну једнакост, али прави грешке у израчунавању бројевне вриједности (експериментална група 16,1%; контролна група 17,9%). И овај задатак показује да у разумијевању словних израза преовладава основни аритметички захтјев, израчунавање вриједности израза и да ученици нијесу научени да користе слова у улози промјенљиве.

Табела 32. Одговори ученика у рјешавању текстуалног проблема

Табеларни приказ података				Група експериментална	Група контролна
1.4.а уочавање правила		нема рјешења или нетачно рјешење	Број	13	29
			проценат	23,2%	51,8%
		тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	2	1
			проценат	3,6%	1,8%
		тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	41	26
			проценат	73,2%	46,4%
Хи-квадрат	9.787				
Значајност	.007				

Табела 33. Одговори ученика у рјешавању словног израза

Табеларни приказ података				Група експериментална	Група контролна
2.4.б зависност количника од промјене компоненти, сталност количника		нема рјешења или нетачно рјешење	Број	16	39
			проценат	28,6%	69,6%
		тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	9	10
			проценат	16,1%	17,9%
		тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	31	7
			проценат	55,4%	12,5%
Хи-квадрат	24.829				
Значајност	.000				

Табела 34. Одговори ученика у рјешавању једначине

Табеларни приказ података			Група експериментална	контролна
3.3. сложена једначина	нема рјешења или нетачно рјешење	Број	7	30
		проценат	12,5%	53,6%
	тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	5	6
		проценат	8,9%	10,7%
	тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	44	20
		проценат	78,6%	35,7%
Хи-квадрат	23.388			
Значајност	.000			

Када је у питању разумијевање својстава рачунске операције множења, тј. правила зависности производа од промјене чинилаца, на другом (2.3.б) и трећем финалном тесту (3.2.б$_2$) (Табела 35, Табела 36), примјећујемо да су бољи одговори ученика у постављеном питању вишеструког избора одговора (2.3.б) него ли у захтјеву полупрограмираног питања (3.2.б$_2$). Осим тога, први дио овако постављених питања садржи схематски приказ цјелокупног проблема, који може помоћи разумијевање и тачно рјешавање постављених захтјева задатка. Међутим, схематски приказ неједначине (3.2.б$_2$) ученици тешко разумију и не користе зависност производа од промјене чинилаца (експериментална група 32,1%; контролна група 92,9%) (Табела 36). Из овога можемо закључити да се у поступку рјешавања неједначине ученици не ослањају на примјену правила зависности резултата операције од промјене компоненти, као ни на схематске репрезентације рјешавања неједначина, већ искључиво на симболичку процедуру израчунавања вриједности промјењиве. Према томе, критично питање у почетној настави математике јесте метод изграђивања значења појма неједначине у скупу природних бројева.

Табела 35. Разумијевање својстава рачунске операције множења

Реторичка формулација			Група експериментална	контролна
2.3.б зависност производа од промјене чиниоца	нема рјешења или нетачно рјешење	Број	12	29
		проценат	21,4%	51,8%
	тачно рјешење	Број	44	27
		проценат	78,6%	48,2%
Хи-квадрат	11.119			
Значајност	.001			

Табела 36. Разумијевање својстава операције множења у рјешавању неједначина

Полупрограмирани проблем			Група експериментална	контролна
3.2.б$_2$ примјена правила зависности производа од промјене чинилаца	нема рјешења или нетачно рјешење	Број	18	52
		проценат	32,1%	92,9%
	тачно рјешење	Број	38	4
		проценат	67,9%	7,1%
Хи-квадрат	44.038			
Значајност	.000			

Поређењем одговора ученика у проблемима симболичког записа (примјена производа једнаких чиналаца–степен), са првог (1.1.г) и другог финалног теста (2.4.а), примјећујемо изражене разлике у одговорима проблема другог финалног теста (Табела 38), док се одговори ученика проблема првог финалног теста значајно не разликују (Табела 37). Ово показује ефекат дјеловања експерименталног фактора, односно систематична примјена симболичког записа проблема, тј. степена – производа једнаких чинилаца у Првом и Другом моделу експерименталног програма. Тако, проценат нетачних одговора, овако постављеног задатка, се знатно смањује на другом финалном тесту код ученика експерименталне групе (за 51,8%), док је тај проценат незнатно смањен код ученика контролне групе (за 7,1%).

Табела 37. Одговори ученика у израчунавању бројевног израза

Симболички проблем			Група експериментална	контролна
1.1.г примјена производа једнаких чиналаца–степен	нема рјешења или нетачно рјешење	Број	37	39
		проценат	66,1%	69,6%
	тачно рјешење	Број	19	17
		проценат	33,9%	30,4%
Хи-квадрат	.164			
Значајност	.686			

Табела 38. Одговори ученика у израчунавању словног израза

Симболички проблем			Група експериментална	контролна
2.4.а примјена производа једнаких чиналаца–степен	нема рјешења или нетачно рјешење	Број	8	35
		проценат	14,3%	62,5%
	тачно рјешење	Број	48	21
		проценат	85,7%	37,5%
Хи-квадрат	27.519			
Значајност	.000			

Поред наведених примјера примјене производа једнаких чинилаца у изразима са двије рачунске операције, такође, на другом финалном тесту укључили смо проблем са истим захтјевом али користећи три рачунске операције и заграду (2.5.б$_2$) (Табела 26). Одговори показују да ученици не разумију употребу заграде или нетачно израчунавају вриједност бројевног израза (експериментална група 42,9%; контролна група 82,1%). Уколико ове одговоре ученика (Табела 26) упоредимо са одговорима примјене производа једнаких чинилаца на првом (1.1.г–Табела 37) и другом финалном тесту (2.4.а–Табела 38) највећа разлика је изражена у одговорима израчунавања словног израза, односно превођења словног у бројевни израз (2.4.а). Ово показује да ученици избјегавају или не разумију слово као ознаку за одређену вриједност промјенљиве.

Одговори ученика у рјешавању једноставне, схематски постављене (3.1.а) (Табела 39) и сложене, симболички записане, једначине (3.5.а$_2$) (Табела 40) показују да нема значајних разлика у рјешавању схематски постављене једначине, док су изражене разлике у рјешавању сложене једначине. Успјешност рјешавања схематски постављене једначине, тачна поставка рјешавања и тачно рјешење (експериментална група 92,9%; контролна група 87,5%) показује да ученици схематски приказ преводе у симболички. Пошто у рјешавању сложене једначине ученици наилазе на проблем уочавања главне рачунске операције и издвајања непознате као елемента одређеног броја, то смо приликом постављања једначине издвојили главну рачунску операцију, као и број у којем се налази промјенљива x. При том, постављена сложена једначина је слична примјерима једначина који су постављени у Збирци задатака из математике за 5. разред. Тако, и поред понуђених олакшица за рјешавање сложене једначине, присутан је изражен проценат нетачног рјешења код ученика контролне групе (44,6%) (Табела 40). Незнатан проценат ученика је тачно поставило рјешење једначине али није тачно израчунало рјешење (експериментална група 5,4%; контролна група 7,1%). Тако, разлике у успјешности рјешавања сложене једначине (експериментална група 80,4%; контролна група 48,2%) можемо приписати утицају експерименталног програма, тј. примјени технике варирања у репрезентацијама захтјева за рјешавање једначина. У прилог наведеним резултатима рјешавања једначина са више рачунских операција, Киеран (према Wang, 2015) указује да ученици, уопште, немају способност да стварају и користе холистички преглед структуре једначине, што утиче на следећу алгебарску трансформацију која ће се извршити. Даље, неразумијевање процеса рјешавања једначина ученицима ствара препреке у рјешавању текстуалних проблема. За превазилажење наведених проблема рјешавања једначина, Ли, Пенг и Сонг (Li, Peng & Song, 2011) предлажу постављање варијација проблема. Рјешавање и провјера рјешења, заједно са обимним резимеом и дискусијом, ученицима помаже разумијевање сушине, тј. стварање апстрактне представе „рјешавања проблема једначином“, као и развој способности математичког мишљења. Полазећи од вјежби структурираних варијанти проблема, тј. више варијација за један проблем, па све до вишеструких репрезентација рјешавања проблема једначином, као средства и циља наставе математике, ученици стварају способност рјешавања проблема помоћу једначине (Ibid).

Табела 39. Одговори ученика у рјешавању просте једначине

Схематски проблем				Група експериментална	контролна
3.1.а једначина са 1 рачунском операцијом		нема рјешења или нетачно рјешење	Број	1	0
			проценат	1,8%	0%
		тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	3	7
			проценат	5,4%	12,5%
		тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	52	49
			проценат	92,9%	87,5%
Хи-квадрат	2.689				
Значајност	.261				

Табела 40. Одговори ученика у рјешавању сложене једначине

Симболички проблем				Група експериментална	контролна
3.5.a_2 једначина са 2 рачунске операције		нема рјешења или нетачно рјешење	Број	8	25
			проценат	14,3%	44,6%
		тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	3	4
			проценат	5,4%	7,1%
		тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	45	27
			проценат	80,4%	48,2%
Хи-квадрат	13.400				
Значајност	.001				

Упоређивањем одговора ученика у рјешавању једначина постављених помоћу схеме (3.1.а) (Табела 39), табеле (3.3.) (Табела 34) и симболичког записа (3.5.a_2) (Табела 40) примјећујемо највеће разлике у рјешавању табеларно приказаних података, а најмање у схематском приказу једначине са једном рачунском операцијом. Дакле, највеће разлике су у примјеру једначине чији је садржај преузет из Збирке задатака за 5. разред, али код којег су подаци организовани у табели. То показује да је у настави потребно не само више пажње посветити понуђеним задацима у уџбеницима математике већ, такође, за разумијевање поступка рјешавања, пронаћи ефикасне начине структурирања података. С друге стране, успјешност рјешавања схематски постављене једначине показује да схеме олакшавају ученицима разумијевање проблема (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008; Li, Peng & Song, 2011; Cai et al., 2011).

Поређењем одговора ученика у рјешењима схематски постављених неједначина (3.2.а–Табела 41 и 3.4.–Табела 42) са одговорима симболички записане неједначине (3.5.б$_2$–Табела 43), уочавамо да сложеност постављеног захтјева утиче на успјешност рјешавања неједначине. Највише потешкоћа ученици имају у рјешавању схематски постављене двоструке неједначине (Табела 42). Прво, ученици наилазе на проблем превођења схематског приказа неједначине у симболички запис, што потврђује одговор нема рјешења или нетачно рјешење (експериментална група 21,4%; контролна група 58,9%) (Табела 42). Осим тога, ученици који су правилно записали неједнакост не разумију односе постављених захтјева неједнакости, не знају да трансформишу алгебарски израз и израчунају вриједности промјенљиве, јер не примјењују својство зависности разлике од промјене умањиоца (експериментална група 30,4%; контролна група 23,2%). Према томе, можемо закључити да је успјешност рјешавања двоструке неједначине схематског приказа (експериментална група 48,2%; контролна група 17,9%) последица дјеловања експерименталног фактора, односно увођење схематских репрезентација неједначине. Међутим, и поред статистички значајне разлике у одговорима ученика (p= .000), ипак више од половине ученика експерименталне групе је дјелимично или нетачно или уопште није ријешило неједначину, што упућује на потребу да се неједначине од почетка морају изричито подучавати у контексту развоја концепта функције (Tsamir, Almog & Tirosh, 1998; Boero & Bazzini, 2004). Такав аргумент указује на потребу за већим теоријским оквиром учења алгебре у оквиру неједначина.

У рјешавању сложене симболички записане неједначине, која је слична неједначинама из Збирке задатака из математике за 5. разред (3.5.б$_2$), одговори ученика се значајно разликују (Табела 43), односно већи је проценат успјешности ученика експерименталне групе (80,4%) у односу на ученике контролне групе (46,4%). Међутим, схематски приказ неједначине са једном рачунском операцијом (3.2.а–Табела 41) ученици успјешно трансформишу у симболички запис и тачно долазе до рјешења (експериментална група 80,4%; контролна група 66,1%). Овдје, остварени резултати ученика потврђују способност разумијевања схематских репрезентација проблема.

Табела 41. Одговори ученика у рјешавању просте неједначине

Схематски проблем				Група експериментална	контролна
3.2.а неједначина са 1 рачунском операцијом		нема рјешења или нетачно рјешење	Број	5	6
			проценат	8,9%	10,7%
		тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	6	13
			проценат	10,7%	23,2%
		тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	45	37
			проценат	80,4%	66,1%
Хи-квадрат	3.450				
Значајност	.178				

Табела 42. Одговори ученика у рјешавању сложене неједначине

Схематски проблем				Група експериментална	контролна
3.4. двострука неједначина		нема рјешења или нетачно рјешење	Број	12	33
			проценат	21,4%	58,9%
		тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	17	13
			проценат	30,4%	23,2%
		тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	27	10
			проценат	48,2%	17,9%
Хи-квадрат	18.144				
Значајност	.000				

Табела 43. Одговори ученика у рјешавању сложене неједначине

Симболички проблем				Група експериментална	контролна
3.5.б$_2$ неједначина са 2 рачунске операције		нема рјешења или нетачно рјешење	Број	9	23
			проценат	16,1%	41,1%
		тачна поставка рјешавања али нетачно рјешење	Број	2	7
			проценат	3,6%	12,5%
		тачна поставка рјешавања и тачно рјешење	Број	45	26
			проценат	80,4%	46,4%
Хи-квадрат	13.987				
Значајност	.001				

Поред наведеног, анализа одговора ученика из Анкетног упитника о стратегијама рјешавања проблемских задатака показује да су ученици највише усредсређени на рачунање (Слика 37, *Анализа и интерпретација резултата Анкетног упитника*), тј. преко половине ученика експерименталне групе (55,4%) и нешто више ученика контролне групе (69,6%). Такође, незнатно већи проценат ученика експерименталне групе је посвећен рјешавању проблема на нови неуобичајени начин (за 7,2%), као и рјешавању проблема на више начина (за 7,1%). Према овоме, можемо закључити да је алгоритамски поступак израчунавања доминантна стратегија рјешавања проблема. На питање која репрезентација проблема највише помаже у процесу рјешавања проблема (Слика 35), ученици обје групе, експериментална 69,6% и контролна 66,1%, наводе понуђену слику или график за разумијевање проблема.

Оно што примјећујемо у рјешавању проблема, уопште, јесте да све што ученици желе да науче јесу правила за добијање одговора. Како Џон Брансфорд и Бери Стејн (према

Вулфолк, Хјуз & Волкап, 2014) наводе ученици пребрзо закључују шта је питање проблема. Тако, они временом не траже објашњења за разумијевање примијењених поступака и правила рјешавања, тј. зашто се, када и како примјењују одређена правила. Понекад, међутим, чак и више покушаја рјешавања постављеног модела проблема ученика не доводи до тачног резултата, али можда зато што проблем једноставно није доступан математичком „третману“ ученика на разумљив начин (Blum & Niss, 1991). Штавише, према Дорману и колегама (према Elia, Van den Heuvel–Panhuizen & Kolovou, 2009), ниска постигнућа ученика настају због тога што они нијесу научени да организују податке и записују кораке рјешења, како би подржали свој мисаони процес. Осим тога, није само недостатак знања оно што отежава рјешавање проблема, већ прекомјерно ослањање на одређене стратегије рјешавања, као и на научене дефиниције, из „уског искуства“ традиционалне аритметике (McNeil et al., 2019).

Овдје, на основу одговора ученика контролне групе можемо закључити да су они усредсређени на површинске карактеристике проблема, а не на основне структурне елементе, што озбиљно ограничава способност примјене математичких знања и рјешавање проблема. Стога је за разумијевање садржаја који се уче и развој способности рјешавања проблема неопходно ставити акценат на разумијевање структуре постављеног проблема, односно више пажње усмјерити на креирање модела постављања проблема. Тако, на примјер, дидактички потенцијал коришћења одговарајућег артефекта, Боното и Санто (Bonotto & Santo, 2015) „виде као извор“ за: постављање проблема и процесе креативности размишљања ученика. Такође, то могу бити занимљиви проблеми из свакодневних ситуација или друштвено релевантни математички проблеми, усмјерени на истраживање и примјену математичких знања и, при том, тако креирани да помогну ученицима повезивање знања, умјесто увјежбавања већ научених вјештина (Jones, 2012; Matsko & Thomas, 2015; Crespo, 2015). С тим у вези, Маричић, Шпијуновић и Лазић (Maričić, Špijunović & Lazić, 2016) показују да се бољим планирањем, тј. правилним одабиром одговарајућих задатака може успјешно развијати критичко мишљење ученика у почетној настави математике.

3.2. Анализа резултата у самосталном састављању проблема ученика

Одговори ученика у самосталном састављању проблема на основу задатог бројевног израза, на првом (1.5.а–Табела 44) и другом финалном тесту знања (2.5.б$_1$–Табела 45), показују висок проценат неуспјешности. При том, на другом финалном тесту су нижа постигнућа ученика (Табела 45), што је последица сложености захтјева састављања проблема (укључивање заграда и записивање производа једнаких чинилаца–степен). Конкретно, у састављању текста за постављени бројевни израз (2.5.б$_1$) ученици не преводе значење заграде, као ни тачну вриједност степена одређеног чиниоца. Заправо, они не разумију први корак рјешавања проблема, односно разумијевање структуре постављеног израза, што потврђују резултати нетачних одговора у израчунавању овако постављеног бројевног израза (експериментална група 42,9%; конторлна група 82,1%) (Табела 26).

Табела 44. Састављање проблема на основу постављеног бројевног израза

Симболички постављен проблем				Група експериментална	контролна
1.5.а својство дистрибутивности множења према сабирању (одузимању)		нема одговора или нетачно састављен проблем	Број	23	37
			проценат	41,1%	66,1%
		дјелимично састављен проблем (тачно описана ситуација, али недостаје питање или нетачно постављено питање)	Број	8	3
			проценат	14,3%	5,4%
		у потпуности састављен проблем (тачно описана ситуација и постављено питање)	Број	25	16
			проценат	44,6%	28,6%
Хи-квадрат	7.515				
Значајност	.023				

Табела 45. Састављање проблема на основу постављеног бројевног израза

Симболички постављен проблем				Група експериментална	контролна
2.5. $б_1$ сложени бројевни израз (дијељење збира бројем)		нема одговора или нетачно састављен проблем	Број	31	43
			проценат	55,4%	76,8%
		дјелимично састављен проблем (тачно описана ситуација, али недостаје питање или нетачно постављено питање)	Број	5	4
			проценат	8,9%	7,1%
		у потпуности састављен проблем (тачно описана ситуација и постављено питање)	Број	20	9
			проценат	35,7%	16,1%
Хи-квадрат	6.229				
Значајност	.044				

Уколико наведене примјере састављања проблема, на основу задатог бројевног израза, са првог (1.5.а–Табела 44) и другог финалног теста (2.5.б$_1$–Табела 45) упоредимо са састављањем проблема на основу задате схеме (2.5.а$_1$–Табела 46), са другог финалног теста, примјећујемо већи проценат неуспјешности у примјеру схематске репрезентације проблема. Осим тога, ученицима је теже састављање схематског проблема од рјешавања овако постављеног проблема (Табела 25). У наведеним примјерима састављања проблема, мали број ученика дјелимично саставља проблем (тачно описана ситуација, али недостаје питање или нетачно постављено питање). Овим резултатима, ученици не показују разумијевање својстава рачунских операција, односе компонената у структури постављеног израза, те, стога, дате математичке појмове не могу да укључе у одговарајући реални конекст и дођу до тачно састављеног текста задатка. Осим тога, они не размишљају о суштини постављеног питања, не провјеравају да ли се постављено питање подудара са постављеном структуром бројевног израза.

Табела 46. Састављање проблема на основу задате схеме

Схематски проблем			Група	
			експериментална	контролна
2.5.а$_1$ израчунавање непознате бројевне вриједности (примјена рачунских операција)	нема одговора или нетачно састављен проблем	Број	34	43
		проценат	60,7%	76,8%
	дјелимично састављен проблем (тачно описана ситуација, али недостаје питање или нетачно постављено питање)	Број	7	10
		проценат	12,5%	17,9%
	у потпуности састављен проблем (тачно описана ситуација и постављено питање)	Број	15	3
		проценат	26,8%	5,4%
Хи-квадрат	9.581			
Значајност	.008			

У састављању проблема за постављене једначине, односно схематске (3.1.б–Табела 47) и симболичке (3.5.а$_1$–Табела 48), одговори ученика се значајно разликују. Наиме, висока успјешност састављања проблема (потпуно састављенен проблем) схематског приказа једначине, са једном рачунском операцијом (3.1.б), присутна је код ученика експерименталне групе (83,9%), док је знатно мања код ученика контролне групе (48,2%) (Табела 47). С друге стране, састављање проблема сложене једначине, са двије рачунске операције, постављене симболичким записом, (3.5.а$_1$), је сложенији захтјев и стога имамо и нижа постигнућа у тачном састављању проблема (експериментална група 48,2%; контролна група 12,5%) (Табела 48). Успјешност састављања проблема схематског приказа просте једначине, у односу на сложену једначину симболичког записа, можемо приписати, прво, степену сложености

постављене једначине, а затим схематској репрезентацији просте једначине којом се даје потпуни приказ, тј. структура проблема, који је потребно тачно описати. Такође, у наведеним примјерима састављања проблема (3.1.б; 3.5.a_1) примјећујемо да мали број ученика (од 6 до 10) тачно описује проблемску ситуацију али не поставља питање или нетачно поставља питање проблема (Табела 47; Табела 48). И овдје, ученици показују неразумијевање својстава рачунских операција, тако да конструкцији састављеног проблема недостају неопходна експлицитност и прецизност, као што је, на примјер, изостанак битног елемента, тј. питања задатка (Чутура & Вуловић, 2016).

Табела 47. Састављање проблема за просту једначину

Схематски проблем				Група	
				експериментална	контролна
3.1.б проста једначина (множење)		нема одговора или нетачно састављен проблем	Број	2	23
			проценат	3,6%	41,1%
		дјелимично састављен проблем (тачно описана ситуација, али недостаје питање или нетачно постављено питање)	Број	7	6
			проценат	12,5%	10,7%
		у потпуности састављен проблем (тачно описана ситуација и постављено питање)	Број	47	27
			проценат	83,9%	48,2%
Хи-квадрат	23.122				
Значајност	.000				

Табела 48. Састављање проблема за сложену једначину

Симболички постављен проблем			Група експериментална	Група контролна
3.5.а$_1$ једначина са двије рачунске операције	нема одговора или нетачно састављен проблем	Број	19	42
		проценат	33,9%	75,0%
	дјелимично састављен проблем (тачно описана ситуација, али недостаје питање или нетачно постављено питање)	Број	10	7
		проценат	17,9%	12,5%
	у потпуности састављен проблем (тачно описана ситуација и постављено питање)	Број	27	7
		проценат	48,2%	12,5%
Хи-квадрат	20.966			
Значајност	.000			

Одговори ученика у састављању проблема за неједначине, схематске (3.2.б$_1$–Табела 49) и симболичке (3.5.б$_1$–Табела 50), показују успјешност ученика у састављању схематског приказа неједначине са једном рачунском операцијом (експериментална група 55,4%; контролна група 16,1%) (Табела 49). За симболичку задату неједначину са двије рачунске операције (Табела 50), знатно већи проценат успјешности у састављању проблема је код ученика експерименталне групе (41,1%) док ниједан ученик контролне групе није тачно саставио проблем. Осим тога, код ученика контролне групе примјећујемо нешто већи проценат одговора (23,2%) за дјелимично састављен проблем (тачно описана ситуација проблема али недостаје питање или нетачно постављено питање) (Табела 50). Поред наведеног, ученици су успјешнији у рјешавању него у састављању овако постављених неједначина (3.2.а–Табела 41; 3.5.б$_2$–Табела 43). Исто, овдје, сложеност постављених захтјева утиче на успјешност састављања проблема. Ученици су успјешнији у састављању схематског приказа просте неједначине него ли симболичког записа сложене неједначине. Ово показује да ученици не разумију и не примјењују правила зависности резултата операције од промјене компоненти, као ни структуру постављене неједнакости, те, стога, не могу да формулишу проблем. Велики проценат избјегавања или нетачног одговора ученика у састављању проблема, такође, потврђен је у извјештају експерименталног програма Сингера и колега (Singer et al., 2011), према којем већина ученици 4. разреда успоставила је већ такву „навику ума“ која не прихвата укључивање у креативно састављање проблема.

Табела 49. Састављање проблема за просту неједначину

Схематски проблем			Група експериментална	Група контролна
3.2.б$_1$ састављање проблема за неједначину са 1 рачунском операцијом	нема одговора или нетачно састављен проблем	Број	18	37
		проценат	32,1%	66,1%
	дјелимично састављен проблем (тачно описана ситуација, али недостаје питање или нетачно постављено питање)	Број	7	10
		проценат	12,5%	17,9%
	у потпуности састављен проблем (тачно описана ситуација и постављено питање)	Број	31	9
		проценат	55,4%	16,1%
Хи-квадрат	19.193			
Значајност	.000			

Табела 50. Састављање проблема за сложену неједначину

Симболички постављен проблем			Група експериментална	Група контролна
3.5.б$_1$ неједначина са 2 рачунске операције	нема одговора или нетачно састављен проблем	Број	27	43
		проценат	48,2%	76,8%
	дјелимично састављен проблем (тачно описана ситуација, али недостаје питање или нетачно постављено питање)	Број	6	13
		проценат	10,7%	23,2%
	у потпуности састављен проблем (тачно описана ситуација и постављено питање)	Број	23	0
		проценат	41,1%	0%
Хи-квадрат	29.236			
Значајност	.000			

Увидом у резултате може се констатовати да ученици нијесу у довољној мјери оспособљени да преводе математичке изразе у форму текстуалног задатка, што се, такође, подудара са резултатима студије састављања текстуалних задатака ученика четвртог разреда (Чутура & Вуловић, 2016). Исто, анализом карактеристика одговора ученика, један од разлога слабог успјеха ученика јесте несврсисходно повезивање говорног и математичког језика, односно свакодневни говорни језик преовладава над математичким, тако да изостају неопходна експлицитност и прецизност, као што је, на примјер, изостанак битног елемента задатка (питања). Поред тога, одговори ученици не показују способност реалног сагледавања контекста, што се може објаснити узрастом ученика, тј. недовољним познавањем реалних животних ситуација у којима се користе десетине хиљада или стотине хиљада. Исто, ученици су имали проблем приликом избора теме, што недвосмислено упућује да они користе узак спектар тема и да је тачност у математичком смислу захтјев који сматрају доминантним, а не иновативност и квалитет текста. Зато је важно код ученика млађег школског узраста развијати осјећај за функционалан и сврсисходан писани израз математичких садржаја. У том погледу, Стевановић и Ивковић (Ibid:217) истичу да: „различитим лексичким, правописним и синтаксичким вежбама у разредној настави можемо подстаћи ученике да правилно обликују свој језички израз како би јасно и прецизно исказали своја знања у различитим областима“.

Због потешкоћа на које ученици наилазе приликом састављања проблема, утврђено је да постоји статистички значајан утицај одговора састављања проблема на укупно постигнуће рјешавања проблема ученика на финалним тестовима знања (Прилог 11, Табела 5.а),..., Табела 18.а)). Дакле, ученици имају проблем вербализације математичког записа, тј. избјегавају или нетачно користе математички језик. Стога је неопходно ученике навикавати да математички опишу сваки записани израз, једнакост и неједнакост. Поред тога, потребно је укључивати више примјера за уочавање својстава броја и рачунских операција, тј. правила зависности резултата од промјене компоненти. Такође, сваки математички израз увијек је потребно превести на ситуације из свакодневног живота. На овај начин ученици стварају представу да се један запис може односити на више проблема и тиме стварати више могућности за састављање проблема. Различитим репрезентацијама проблема ученици примјењују и проширују потојећа знања и истовремено развијају стратегије рјешавања проблема, као и способност састављања проблема.

С обзиром да састављање проблема од ученика прво захтијева разумијевање постављених захтјева проблема, сматрали смо важним да сагледамо разумијевање проблема, као једну од кључних компоненти математичког знања. Као што се овдје користи, разумијевање проблема, према Фројденталу (према English, 1997), односи се на способност препознавања основне структуре проблема и откривање одговарајуће структуре у повезаним проблемима. Структура се може дефинисати као „апстрахована форма језичког израза“. Међутим, ако би ученици користили постојеће проблеме за састављање нових примјера и питања, тада они морају, прво, да препознају математичке структуре ових проблема. Ово захтијева да се контекстуалне карактеристике поставе у други план, а структурни елементи изнесу у први план. Тако би ученици требали да конструишу смислене менталне моделе или представе, тј. да препознају важне математичке идеје и како су оне повезане. Недостатак таквих модела, показало се да је у великој мјери одговоран за потешкоће ученика у састављању проблема, посебно у повезивању проблемске ситуације и радње потребне за њено рјешавање (Ibid).

Дакле, спроведеним истраживањем испитали смо колико су варирања репрезентација и контекста проблема „доступна“ ученицима, како ученици примјењују стечено знање у рјешавању проблема, колико ученици разумију наставне садржаје, са посебном пажњом на то шта ученик може, а шта не може да уради. Поред тога, указали смо на значај питања развоја способности ученика у самосталном састављању проблема.

3.3. Анализа и интерпретација резултата Анкетног упитника

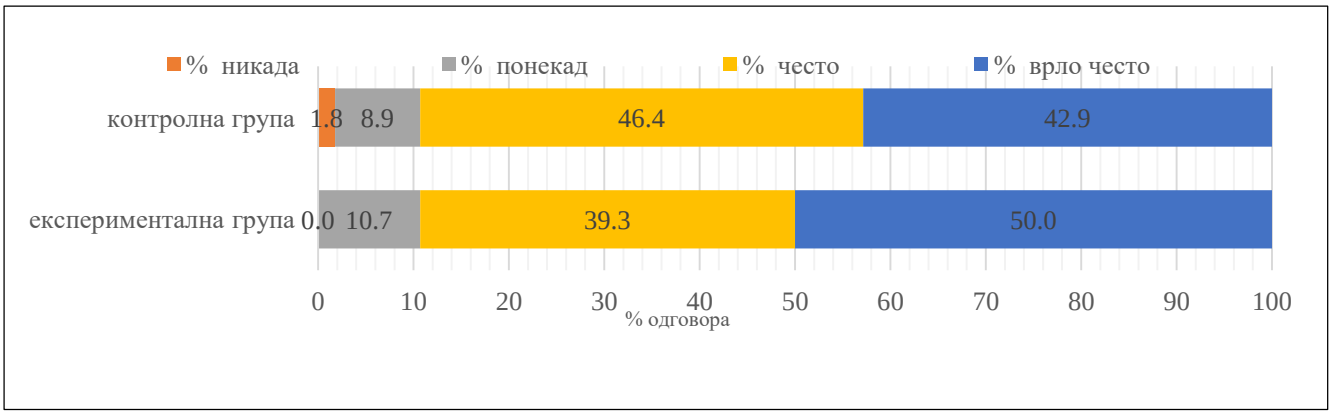
У циљу поузданије анализе математичких постигнућа рјешавања проблема на спроведеним тестовима знања, Анкетним упитником смо жељели да испитамо мишљење ученика о постављању проблема у настави математике петог разреда. Осим тога, утврдили смо да ли се разликује мишљење ученика о значајним питањима постављања проблема у настави математике и да ли такво мишљење има утицај на остварена математичка постигнућа, што нам је пружило јаснију слику о ефектима спроведеног експерименталног програма.

У наредном дијелу приказаћемо одговоре ученика према питањима, која су описана у поглављу *Анкетирање ученика експерименталне и контролне групе*. Сва питања из Анкетног упитника се налазе у Прилогу 10. Приликом статистичке обраде података, поједине категорије одговара смо морали трансформисати у ново обиљежје, како би дошли до прецизнијег утврђивања статистичке значајности између промјенљивих.

За испитивање мишљења ученика о значају математичких знања за свакодневне животне ситуације, анализирали смо прво питање из упитника (Колико често знања из математике помажу у свакодневним животним ситуацијама?). У одговорима ученика нема статистички значајних разлика (p = .726) (Табела 51), односно ученици експерименталне и контроле групе су дали приближно исте одговоре. Са графика (Слика 20) видимо да је висок проценат одговора да често и врло често знања из математике помажу у свакодневним животним ситуацијама (89,3%), док је знатно нижи проценат одговора (10,7%) да знања из математике понекад и никада не помажу у животним ситуацијама.

Табела 51. Мишљење ученика о значају математичких знања за свакодневне животне ситуације

1.питање	Хи–квадрат	df	Значајност
Знања математике за живот	.641	2	.726
N	112		



Слика 20. Примјена знања из математике у свакодневним животним ситуацијама

У сагледавању мишљења ученика о властитим компетенцијама рјешавања проблема, анализирали смо одговоре 2., 18. и 19. питања Анкетног упитника. Анализа одговора ученика о развоју властитих способности рјешавања проблема показује да нема статистички значајних разлика (Табела 52).

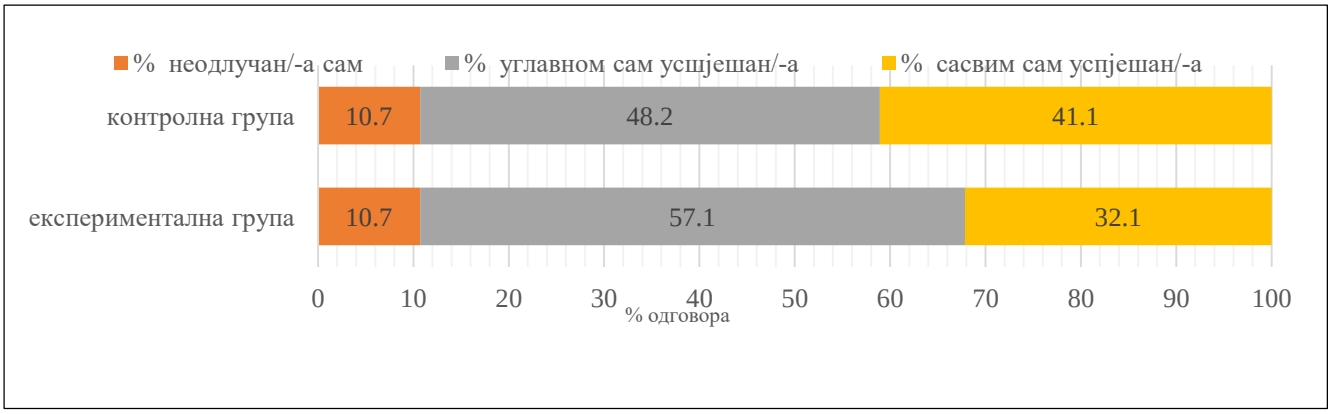
Табела 52. Мишљење ученика о властитим компетенцијама рјешавања проблема

	Хи–квадрат	df	Значајност
2.питање Успјешност рјешавања задатака	1.033	2	.596
18.питање Присутност мотивационих аспеката за развој компетенција рјешавања проблема	4.822	3	.185
19.питање Сналажење у свакодневним животним ситуацијама	1.371	1	.242
N	112		

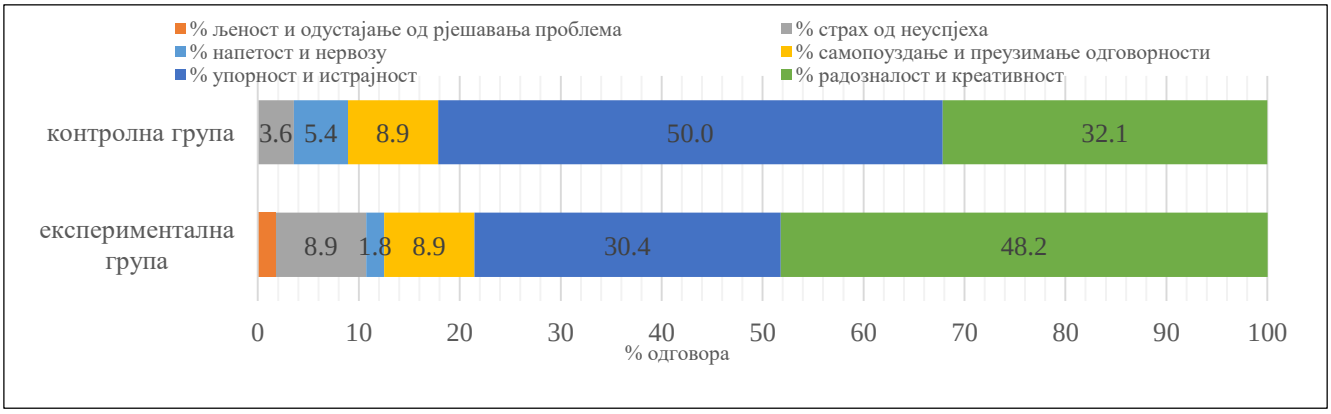
Скоро 90% ученика (Слика 21) је одговорило да сасвим успјешно и углавном успјешно рјешавају задатке у 5.разреду, што потврђује да ученици имају позитивно мишљење о властитим способностима рјешавања проблема. Ученици, обје групе, истичу да се рјешавањем проблемских задатака код њих највише јавља радозналост и креативност (експериментална група 48,2%; контролна група 32,1%), као и упорност и истрајност (експериментална група 30,4%; контролна група 50%) (Слика 22). Такође, видимо да рјешавање проблема код ученика обје групе у малој мјери ствара страх од неуспјеха (експериментална група 8,9%; контролна група 3,6%), напетост и нервозу (експериментална група 1,8%; контролна група 5,4%), док ниједан ученик није равнодушан на рјешавање проблема. Исто, одговори ученика се не разликују у утицају рјешавања проблема за развој самопоузања и преузимања одговорности (8,9%) (Слика 22). Поред тога, ученици имају позитивно мишљење о значају проблемских задатака за развој способности сналажења у свакодневним животним ситуацијама (експериментална група 96,4%; контролна група 91,1%) (Слика 23). Дакле, ученици имају позитивно мишљење о властитим способностима рјешавања проблема. Позитивни одговори ученика о значају рјешавања проблема за развој унутрашњих, мотивационих аспеката учења, као и за практичну примјену знања у свакодневним животним ситуацијама показују присутност позитивних увјерења ученика за развој математичких компетенција. Ови резултати су у складу са степеном изражености математичког селф–концепта ученика четвртог разреда у оквиру TIMSS 2019 за Црну Гору (Ђерић и сар., 2020).

Самопоуздање ученика и вјеровање у способности рјешавања проблема утиче на њихова постигнућа (Black & Wiliam, 1998). Наставници који показују увјерење за само један начин рјешавања проблема могу ометати развој самопоуздања и способности рјешавања проблема ученика. Према Џонсу (Jones, 2012), развој самопоуздања се може подстаћи тако што ће се издвојити вријеме за рјешавање проблема, похвалити труд и залагање ученика, саслушати њихове идеје и одабрати задатке у којима могу успјети. Подаци са графика (Слика 22) показују да је код ученика присутан низак проценат (8,9%) самопоузања и преузимања одговорности рјешавања проблема, чиме можемо претпоставити да наставници, углавном, указују на одређене стратегије рјешавања проблема.

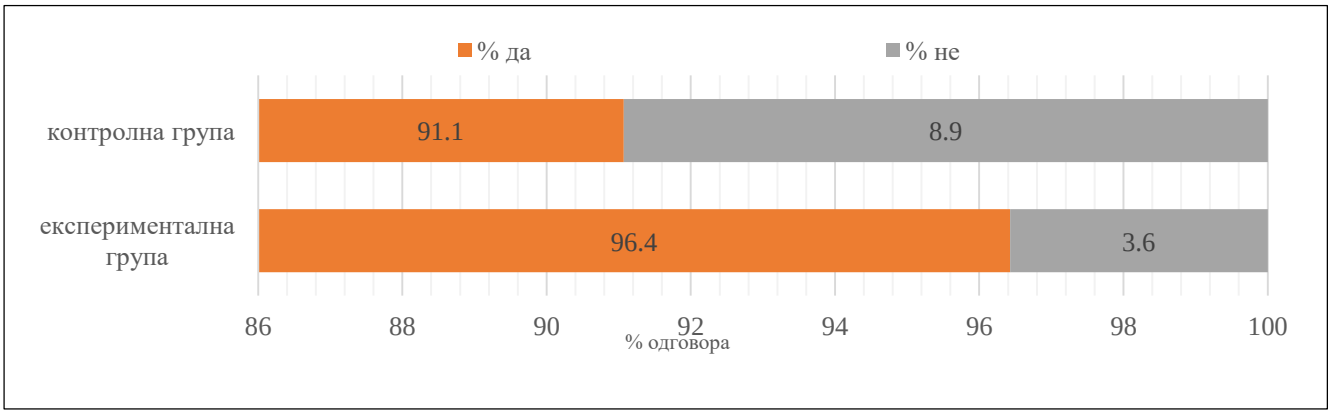
Ученике који имају потешкоћа са учењем математике понекад карактерише синдром страха и избјегавања, познат као математичка анксиозност. Мосес, Бјорк и Голденберг (према Silver, 1994) тврде да се математичка анксиозност може смањити постављањем проблема, јер учешће ученика у постављеним проблема чини да математика дјелује мање „застрашујуће“. Слаба присутност негативног емоционалног стања, страха од неуспјеха, напетости и нервозе (Слика 22) показује нам да у настави влада позитивна атмосфера, тј. да ученици немају одбојност према рјешавању проблема.



Слика 21. Успјешност рјешавања задатака у 5.разреду



Слика 22. Присутност мотивационих аспеката за развој компетенција рјешавања проблема



Слика 23. Сналажење у свакодневним животним ситуацијама

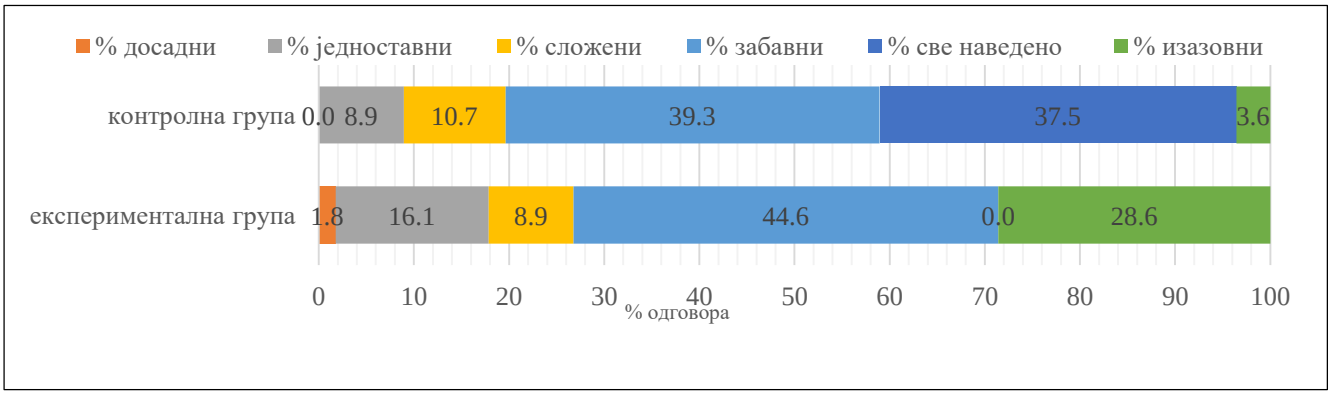
Такође, питањима из Анкетног упитника (3., 4. и 6.) сагледали смо мишљење ученика о избору задатака који се постављају у петом разреду, те да ли рјешавају проблемске задатке

у школи и колико су често проблемски задаци повезани са стварним животним ситуацијама (контекст проблема) (Табела 53).

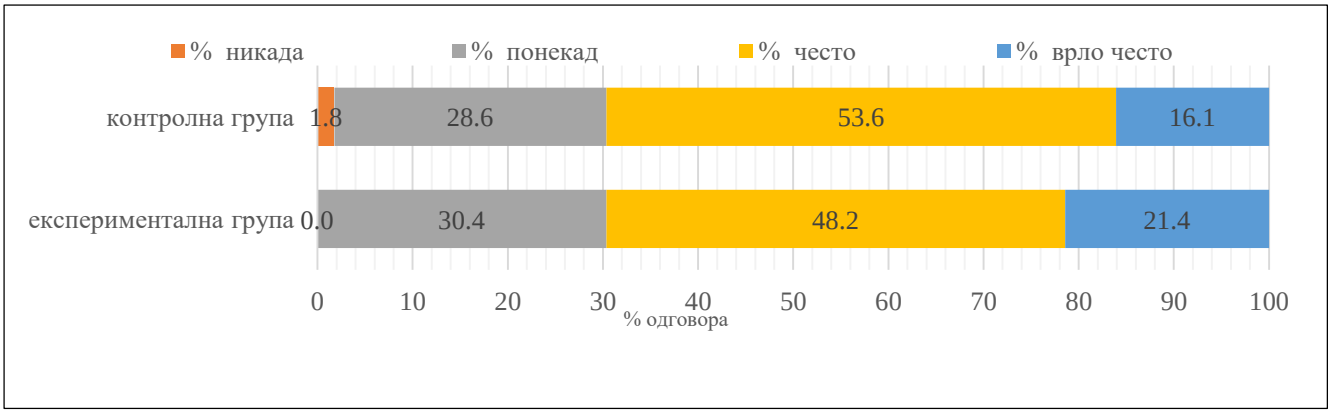
Табела 53. Мишљење ученика о задацима који се постављају у настави математике за 5. разред

	Хи–квадрат	df	Значајност
3.питање Задаци у петом разреду	3.205	3	.361
4.питање Рјешавање проблемских задатака у школи	.586	2	.746
6.питање Повезаност проблема са стварним ситуацијама	.548	2	.760
N	112		

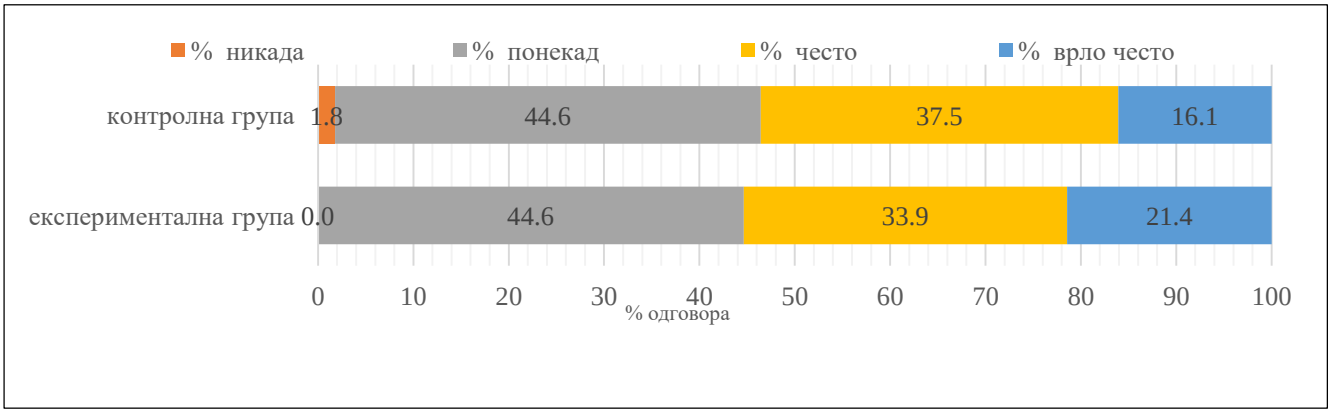
На питање који се типови задатака постављају у 5. разреду, скоро $\frac{3}{4}$ (73,2%) ученика експерименталне групе одговорило је да су забавни и изазовни задаци, док је исте одговоре дало 42,9% ученика контролне групе, што је 30,3 % мање од ученика експерименталне групе (Слика 24). По мишљењу ученика експерименталне групе једноставних задатака у петом разреду има 16,1%, док ученици контролне групе дају мањи проценат одговора, тј. 8,9%. Овдје примјећујемо да је утицај експерименталног фактора (варирање репрезентација и контекста проблема) утицао на мишљење ученика експерименталне групе, тј. на проценат присутности забавних и изазовних задатака. То не значи да ови задаци нијесу у довољној мјери заступљени у контролној групи (42,9%). Заправо, за ово питање нема статистички значајних разлика у одговорима ученика (p= .361) (Табела 53). Одговори ученика се не разликују у погледу повезаности проблемских задатака са стварним животним ситуацијама (p= .760), као ни у учесталости рјешавања проблема у школи (p= .746) (Табела 53). Рјешавање проблемских задатака у школи (Слика 25) је скоро па идентично у експерименталној и контролној групи. Одговор врло често присутан је са 21,4 % код ученика експерименталне групе и 16,1 % код ученика контролне групе, док је одговор често дало 48,2% ученика експерименталне групе и 53,6% контролне групе. За питање повезаности проблема са стварним животним ситуацијама, који се постављају у петом разреду, тј. питање реалног контекста, одговори ученика у обје групе су веома слични (Слика 26). Исти број ученика (44,6%) експерименталне и контролне групе одговорило је да су понекад постављени проблеми повезани са стварним животним ситуацијама, док су, такође, приближно исти одговори за често и врло често код ученика обје групе (експериментална група: врло често 21,4 %, често 33,9 %; контролна група: врло често 16,1 %, често 37,5 %). Према томе, мишљење ученика се не разликује о присутности проблема реалног контекста у настави математике.



Слика 24. Задаци који се постављају у 5. разреду



Слика 25. Рјешавање проблемских задатака у школи



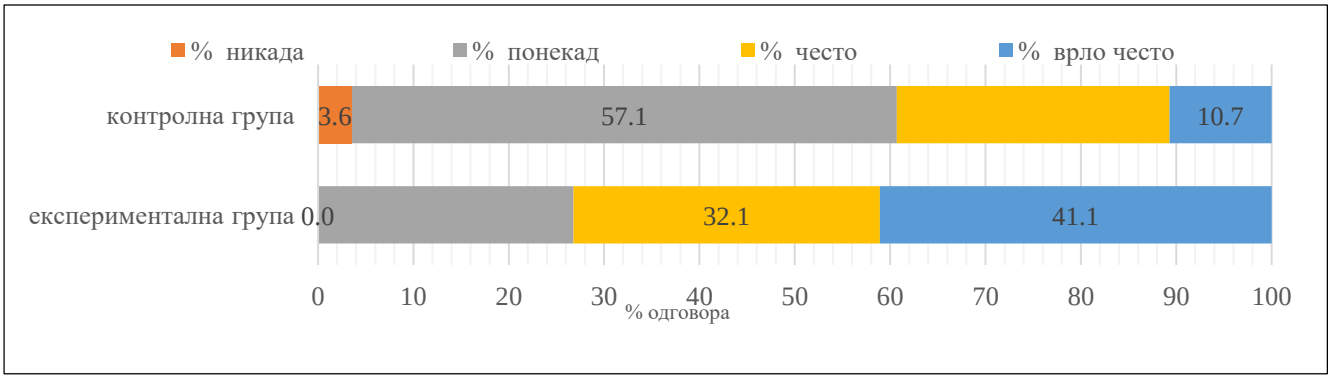
Слика 26. Повезаност проблемских задатака са стварним животним ситуацијама

У тумачењу мишљења ученика о варирању репрезентација проблема у настави математике коришћени су одговори 8., 9., 10., 11., 12. и 14. питања из Анкетног упитника. Изузев одговора на 12. питање, у свим осталим одговорима постоје статистички значајне разлике (Табела 54). Статистичка значајност у одговорима 8., 9., 10., 11. и 14. питања креће се од $p= .000$ до $p= .003$ (Табела 54).

Табела 54. Мишљење ученика о варирању репрезентација проблема у настави математике за 5.разред

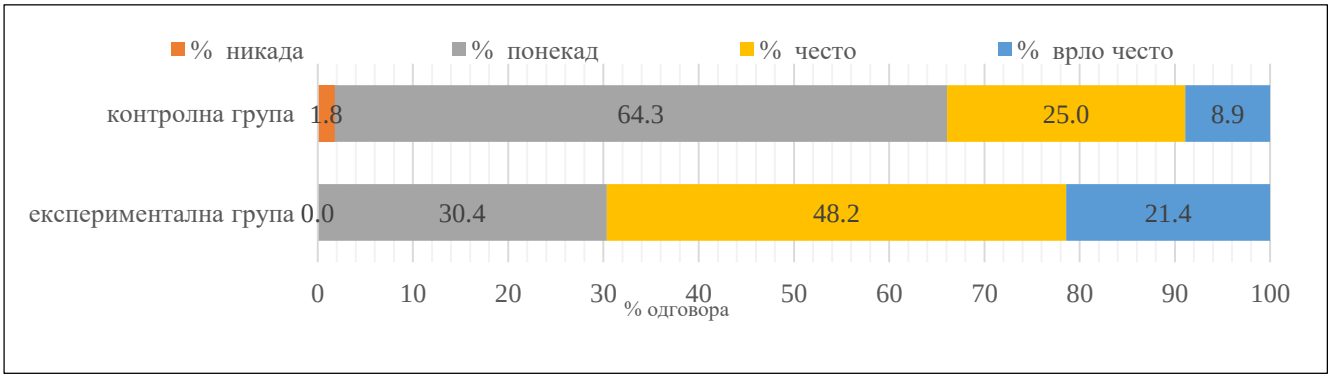
	Хи–квадрат	df	Значајност
8.питање Присутност слике у постављеним проблемима	17.451	2	.000
9.питање Постављање проблема помоћу табеле	14.412	2	.001
10.питање Схематско постављање проблема	39.269	2	.000
11.питање Полупрограмирано постављање проблема	11.511	2	.003
12.питање Рјешавање постављених проблема помоћу једначине	1.583	2	.453
14.питање Колико је у настави присутно састављање проблема?	36.016	2	.000
N	112		

На питање колико се у постављеним проблемским задацима користи слика, која помаже рјешавање задатка, уочавамо знатну разлику у одговорима ученика експерименталне и контролне групе (Слика 27). Наиме, знатан проценат ученика експерименталне групе (41,1 %) указује да врло често сликовни приказ проблема олакшава рјешавање проблема, док је исти одговор дало мали број ученика контролне групе (10,7 %). Најчешће присутан одговор ученика контролне групе јесте да понекад постављени сликовни приказ проблема служи за рјешавање проблема (57,1%). Према наведеном, овдје, можемо закључити да је увођење експерименталног фактора, тј. сликовних репрезентација и реалног контекста проблема утицало на успјешност рјешавања проблема код ученика експерименталне групе, што то није био случај за ученике контролне групе.



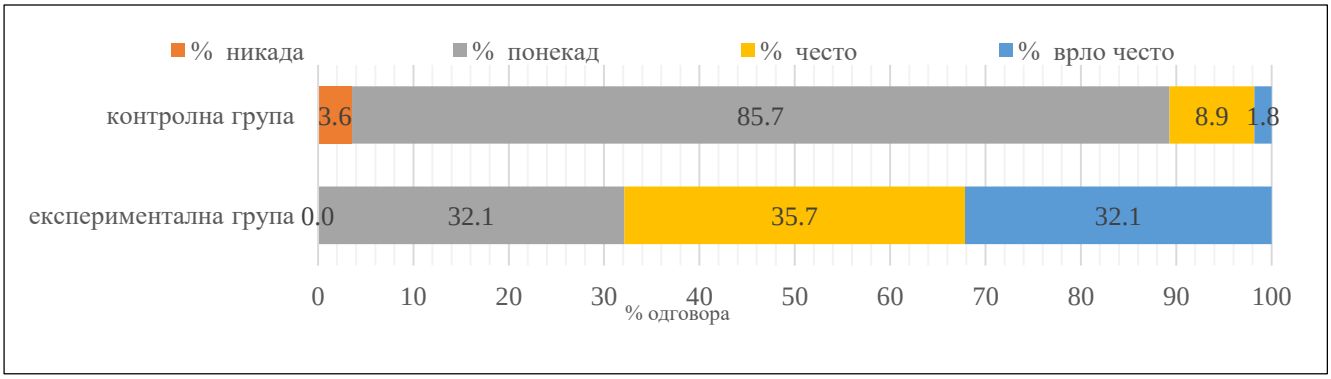
Слика 27. Присутност слике у постављеним проблемским задацима

Када је у питању постављање проблемског задатка помоћу табеле, видимо да је већа присутност табеларног приказа проблема код ученика експерименталне групе него што је то код ученика контролне групе (Слика 28). Већина ученика експерименталне групе одговорила је са врло често и често (69,6%), док су исти одговори упола мање присутни код ученика контролне групе (33,9%). С друге стране, знатан број ученика контролне групе (64,3%) указује да се табела понекад користи у приказу проблема. Дакле, на основу овога можемо претпоставити да је примјена табеларног приказа проблема утицала на постигнућа рјешавања проблема ученика.



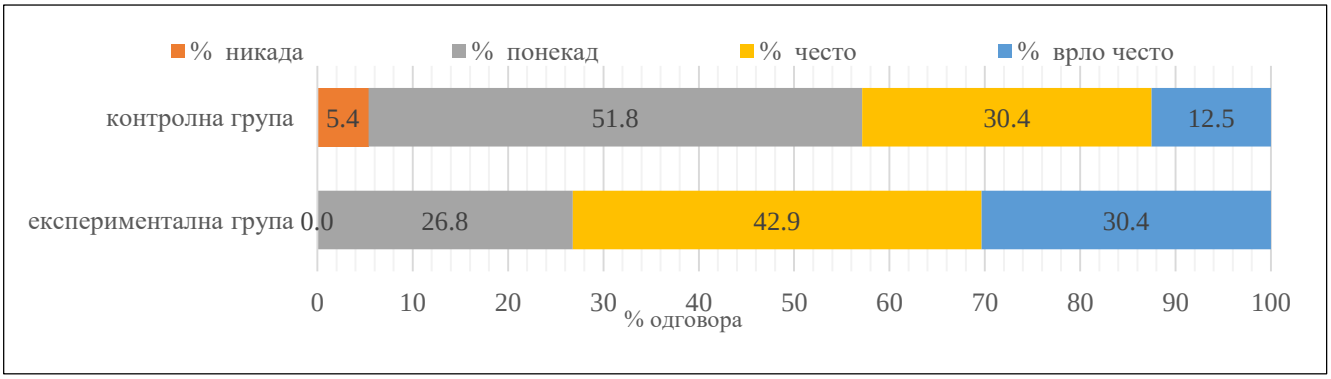
Слика 28. Постављање проблемског задатка помоћу табеле

У подацима за провјеравање присутности схематских приказа проблема, са битним информацијама за рјешавање (Слика 29), уочавамо да већина ученика контролне групе (85,7%) има прилику да понекад рјешава овако постављене проблемске задатке. Поред тога, већина ученика експерименталне групе (67,8%) је одговорило да врло често (32,1%) и често (35,7%) рјешава овај вид проблема. Према томе, разлике у одговорима ученика упућују на већу присутност примјене проблема схематског приказа код ученика експерименталне групе.



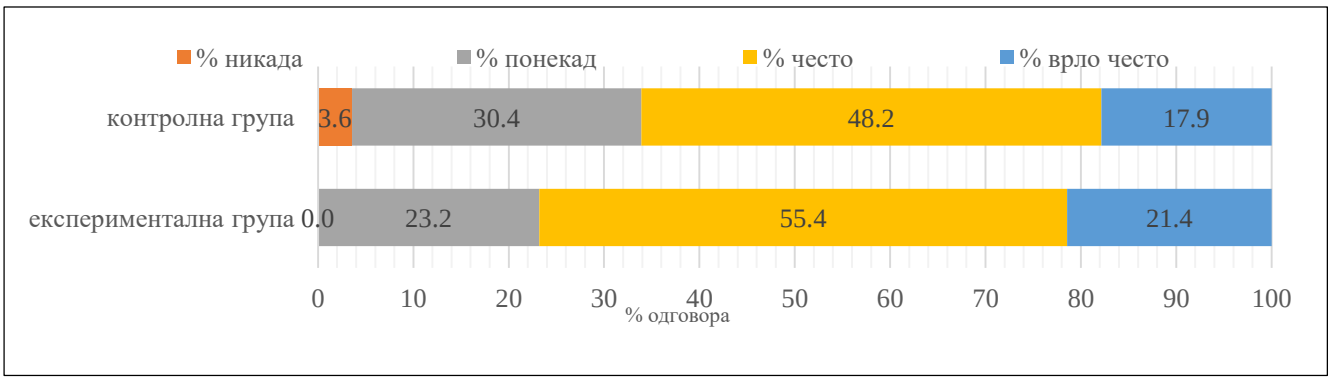
Слика 29. Постављање проблемског задатка помоћу схеме

Из одговора ученика уочавамо да је у настави експерименталног програма више заступљено постављање проблемског задатка који поред текста садржи више питања и/или испланираних поступака рјешавања проблема (Слика 30), тј. 73,3% ученика је одговорило са врло често и често, што је за 30,4% више од заступљености истих одговора ученика контролне групе (42,9%). Тиме, проценат одговора понекад и никад је више присутан код ученика контролне (57,2%) него што је то код ученика експерименталне групе (26,8%).



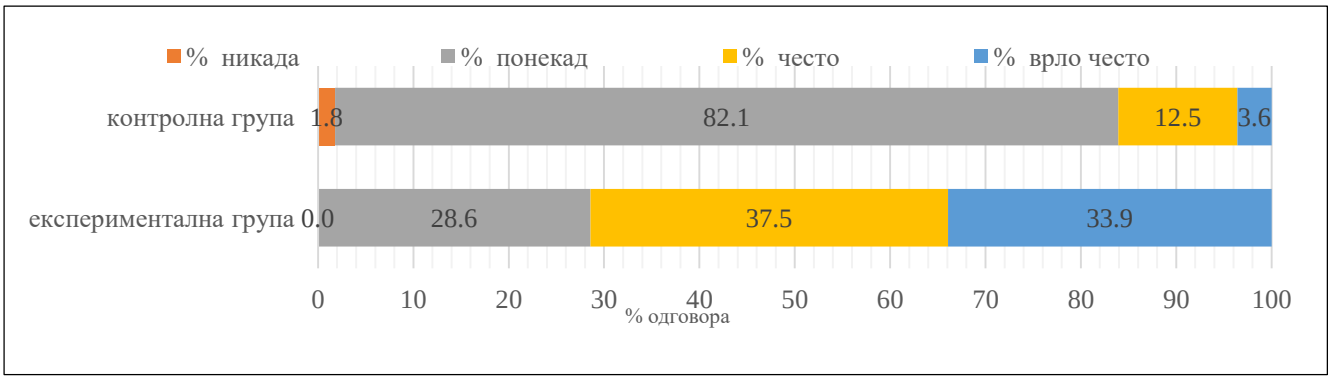
Слика 30. Постављање проблемског задатка помоћу више питања и/или испланираних поступака за рјешавање проблема

Када је у питању испитивање присутности проблемских задатака постављених словним изразима не постоји значајна разлика у одговорима између ученика експерименталне и контролне групе (Слика 31). Већина ученика експерименталне групе (76,8%) указује да често и врло често рјешава проблеме са словним изразима, док су нешто мањи проценти истих одговора присутни код ученика контролне групе (66,1%). Ученици су слично одговорили са понекад (експериментална група 23,2%; контролна група 30,4%), док су са никад одговорила 2 ученика контролне групе, а овог одговора нема код ученика експерименталне групе.



Слика 31. Постављање проблемских задатака помоћу израза са словима

На питање самосталног састављања проблема на основу задате слике (схеме), табеле или израза примјећујемо значајне разлике у одговорима ученика експерименталне и контролне групе (Слика 32). Наиме, већина ученика експерименталне групе (71,4%) одговорило је са врло често и често, док је исте одговоре дало знатно мање ученика контролне групе (16,1%). Међутим, то не значи да ученици контролне групе немају прилику самосталног састављања проблема, тј. већина ученика (82,1%) је одговорила са понекад.



Слика 32. Састављање задатка на основу задате слике (схеме), табеле или израза

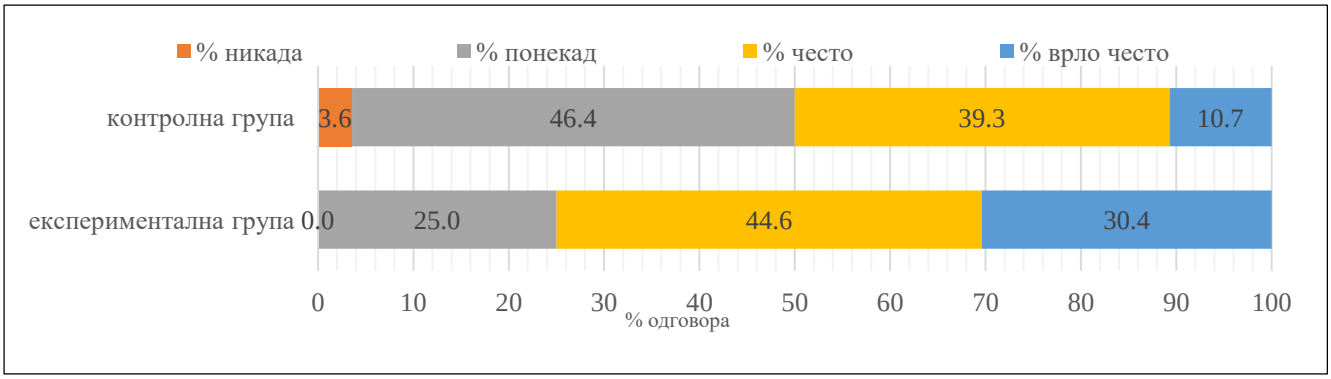
Дакле, одговори ученика о варирању репрезентација проблема у настави математике се статистички значајно разликују, изузев у проблемима словних израза. Из овога можемо закључити да разлике у одговорима ученика произилазе због последица дјеловања експерименталног фактора, односно због веће присутности сликовних (схематских), табеларних, полупрограмираних репрезентација проблема, у оквиру реалистичког или аутентичног контекста, као и захтјева самосталног састављања проблема, у експерименталној групи.

За испитивање мишљења ученика о стратегијама рјешавања проблема користили смо 5., 7., 13., 15., 16. и 17. питање из Анкетног упитника. Одговорима ученика (Табела 55) се показало да постоје статистички значајне разлике за питања: рјешавање проблема на више начина и одабир репрезентације проблема за успјешност рјешавања проблема. Мишљење ученика се не разликује о „ситуацијама“ успјешног рјешавања проблема, као ни за питање значаја самосталног састављања проблема за разумијевање процеса рјешавања проблема. Такође, нијесу присутне разлике у одговорима о томе на шта ученици стављају акценат у рјешавању проблема. И мишљење ученика се не разликује о повратној информацији наставника, тј. на шта наставници најчешће указују у ријешеним проблемима.

Табела 55. Мишљење ученика о стратегијама рјешавања проблема

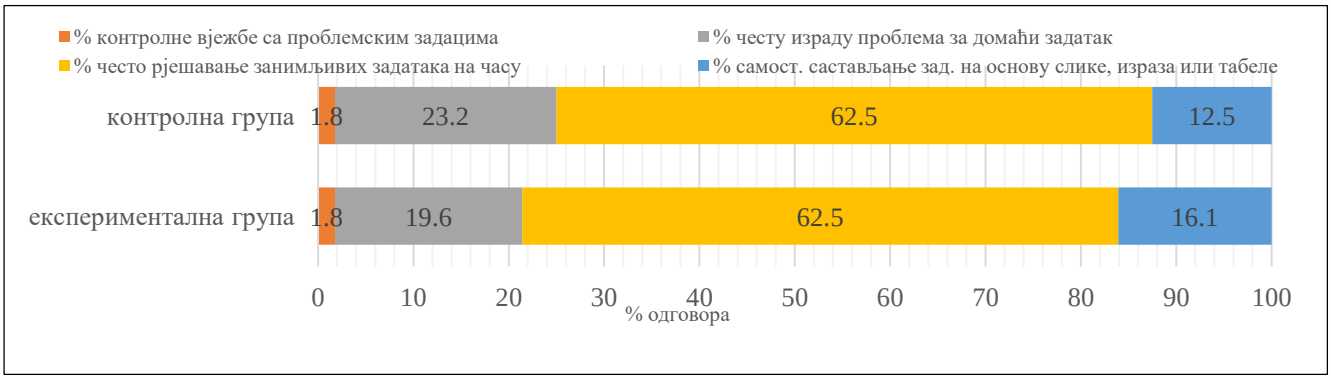
Питања	Хи–квадрат	df	Значајност
5.питање Рјешавање проблемских задатака на више начина	10.119	2	.006
7.питање „Ситуације“ успјешног рјешавања проблема у настави	.404	2	.817
13.питање Репрезентација проблема која највише утиче на успјешност рјешавања проблема	6.038	2	.049
15.питање Самостално састављање проблема за разумијевање процеса рјешавања	2.036	1	.154
16.питање Акценат ученика у рјешавању проблема	2.530	2	.282
17.питање Акценат наставника у анализи рјешења ученика	1.496	2	.473
N	112		

За учесталост рјешавања проблемских задатака на више начина (Слика 33), одговори ученика експерименталне групе указују на изражену присутност оваквог начина учења математике, што доказује 75% одговора врло често и често, док је код ученика контролне групе слабија заступљеност, тј. одговоре врло често и често дало је укупно 50% ученика. Тако, одговори понекад и никад су за 25% више заступљени код ученика контролне групе. Ово показује да је у настави обје групе присутно рјешавање проблема на више начина, али у већем проценту код ученика експерименталне групе, из чега можемо закључити да је то последица дјеловања експерименталног фактора.



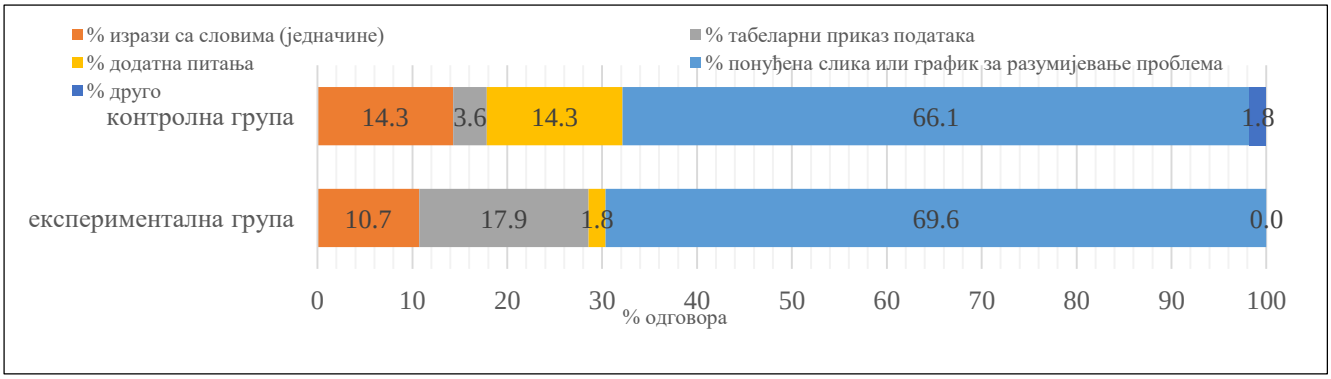
Слика 33.Рјешавање проблемских задатака на више начина

Мишљење ученика се не разликује о питању „ситуација“ наставног процеса за успјешно рјешавање проблемских задатака (Слика 34). Највећи проценат одговора (62,5%), подједнако у обје групе, се односи на често рјешавање проблемских задатака на часу, што показује да је ученицима најзначајнија активност рјешавања проблема на часу. Осим тога, ученици указују на значај рјешавања проблема за домаћи задатак (експериментална група 19,6%; контролна група 23,2%), као и на самостално састављање задатка на основу слике, израза или табеле (експериментална група 16,1%; конторлна група 12,5%). Најмањи проценат одговора, подједнако у обје групе, има рјешавање проблема на контролним вјежбама (1,8%). Овдје, у вези задавања домаћих задатака, Ђерић, Станчић и Ђевић (Ђерић, Станчић & Ђевић, 2017) предлажу да учитељи унапријед планирају колико је оптимално времена потребно за израду домаћих задатака, с обзиром на узрасне и развојне карактеристике ученика четвртог разреда.Такође, они указују да би разматрање домаћих задатака на часу могла бити чешћа пракса учитеља зато што би то омогућило цјеловитији увид у резултате рада ученика, а ученици би били у прилици да утврде, понове и размијене знања.



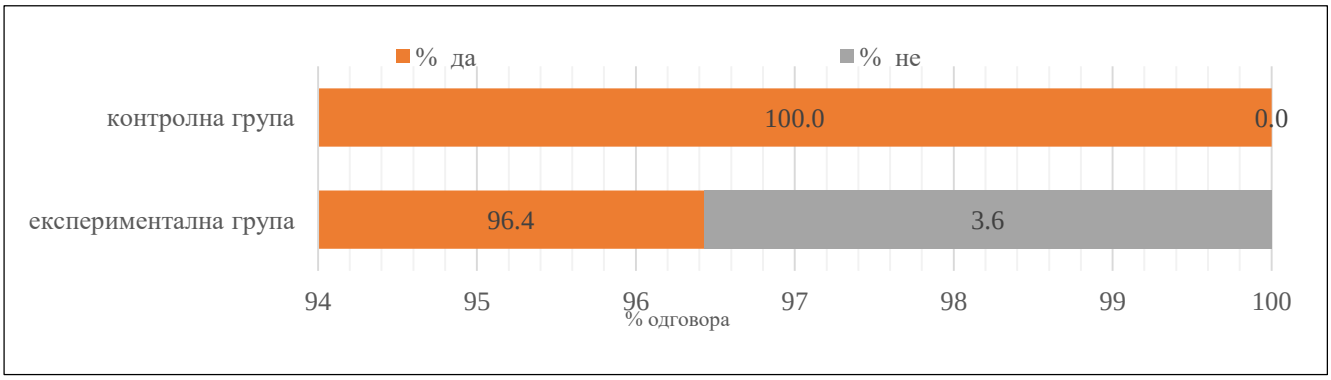
Слика 34. „Ситуације“ за успјешно рјешавање проблемских задатака

На питање која репрезентација проблема највише помаже у процесу рјешавања проблема (Слика 35), ученици обје групе, експериментална 69,6% и контролна 66,1%, наводе понуђену слику или график за разумијевање проблема. Поред тога, за рјешавање проблема, ученици експерименталне групе сматрају важним табеларни приказ података (17,9%) и изразе са словима (10,7%), док се ученици контролне групе подједнако изјашњавају за изразе са словима (14,3%) и додатна питања (14,3%).



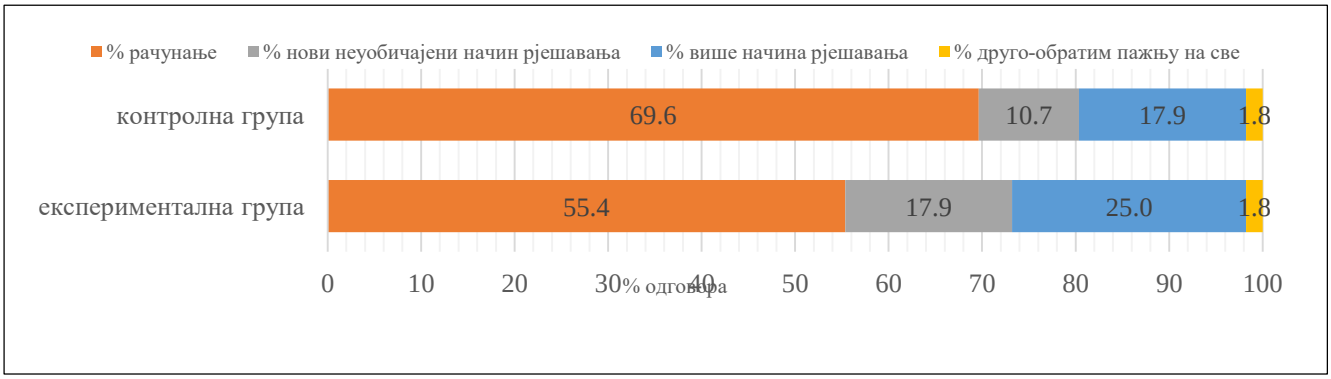
Слика 35. Репрезентација проблема која највише утиче на рјешавање проблема

Са графика (Слика 36) видимо да ученици имају позитивно мишљење о самосталном састављању задатка, на основу датог израза, табеле или слике (схеме), за разумијевање процеса рјешавања тог задатка (експериментална група 96,4%; контролна група 100%).



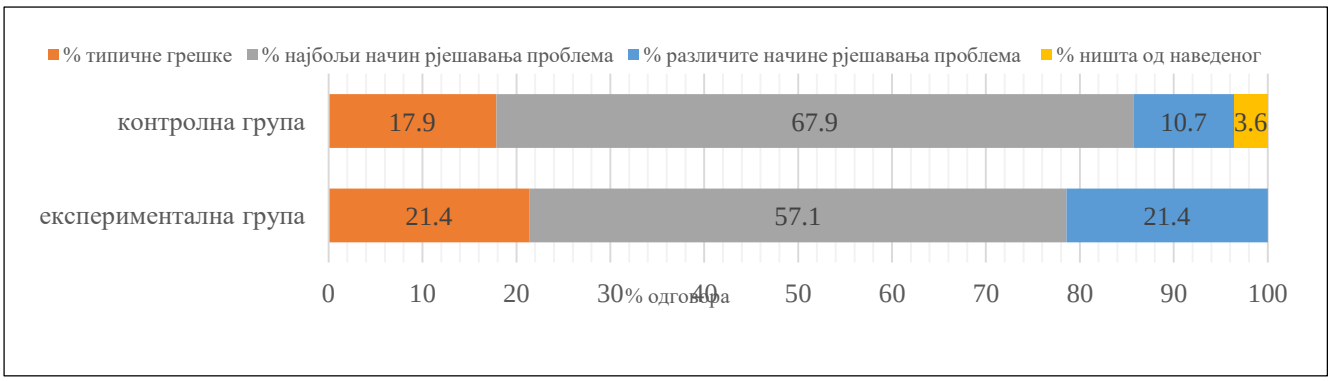
Слика 36. Самостално састављање задатка за разумијевање процеса рјешавања

У рјешавању проблемских задатака (Слика 37), ученици највише обраћају пажњу на рачунање, преко половине ученика експерименталне групе (55,4%) и нешто више ученика контролне групе (69,6%). Такође, примјећујемо да је незнатно већи проценат ученика експерименталне групе (за 7,2%) посвећено рјешавању проблема на нови неуобичајени начин, као и рјешавању проблема на више начина (за 7,1%). Према овоме, можемо закључити да је алгоритамски поступак израчунавања доминантна стратегија рјешавања проблема.



Слика 37. Акценат ученика у рјешавању проблемских задатака

Одговорима ученика (Слика 38) примјећујемо да наставници послије урађеног проблемског задатка најчешће указују на најбољи начин рјешавања проблема и то незнатно више (за 10,8%) у контролној него у експерименталној групи. Осим тога, приближно су исти одговори ученика да наставници указују на типичне грешке (експериментална група 21,4%; контролна група 17,9%). Нешто већи број ученика експерименталне групе (за 10,7%) је одговорило да наставници приказују различите начине рјешавања проблема. Овим, можемо претпоставити да наставник истиче стратегију рјешавања проблема, тј. најбољи начин рјешавања проблема, чиме се мало пажње поклања изналажењу различитих начина рјешавања проблема. Такође, мало се указује на грешке ученика у рјешавању проблема, посебно када се има у виду да грешке показују разумијевање проблема, степен примјене усвојених знања, као и „препреке“ на које ученици наилазе у рјешавању проблема.



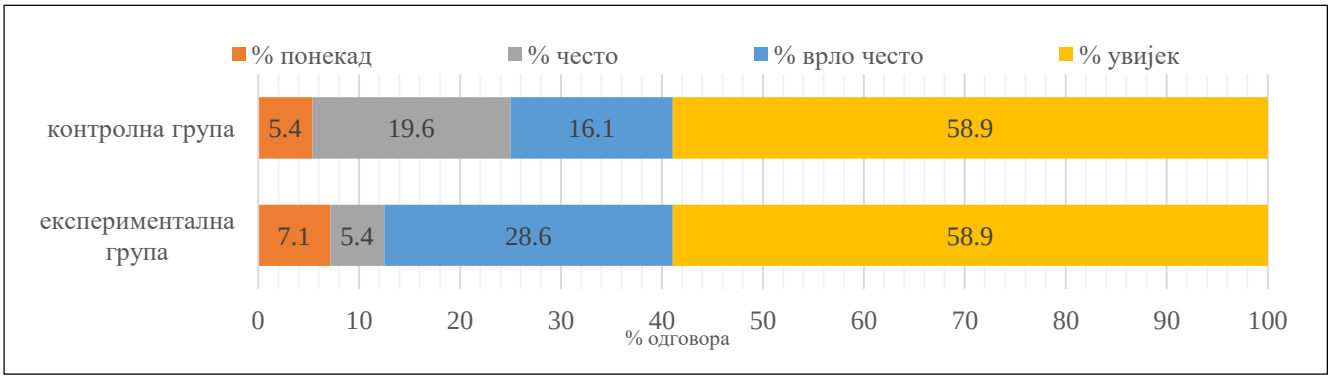
Слика 38. Акценат наставника у рјешењима ученика

У утврђивању мишљења ученика о значају варирања репрезентација у формулацији проблема користили смо 20., 21., 22. и 23. питање из Анкетног упитника. Одговори ученика показују да нема статистички значајне разлике у мишљењу ученика (Табела 56).

Табела 56. Мишљење ученика о значају варирања репрезентација у формулацији проблема

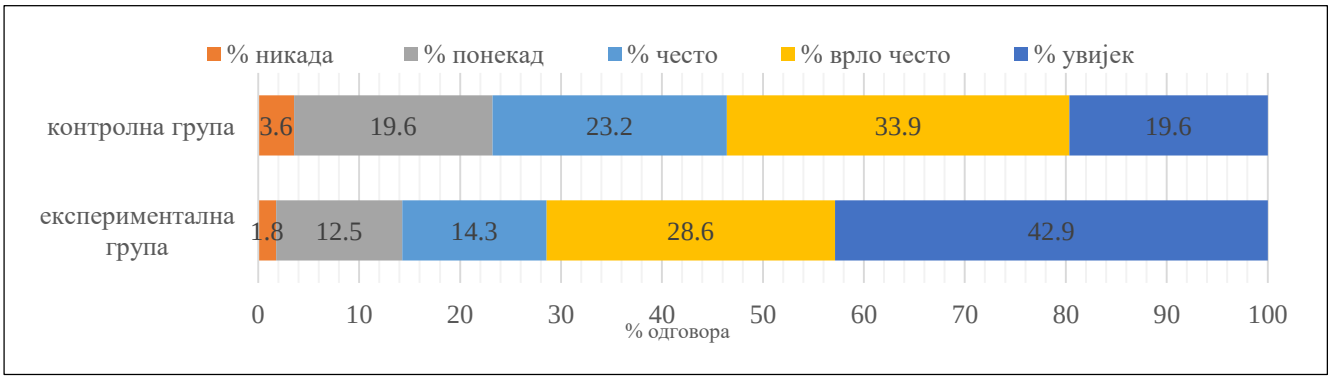
	Хи–квадрат	df	Значајност
20.питање Постављање проблема помоћу слике (схеме)	6.674	3	.083
21.питање Постављање проблема помоћу табеларног приказа података	7.467	3	.058
22.питање Постављање полупрограмираних проблема	6.982	3	.072
23.питање Постављање проблема помоћу словних израза	1.358	3	.716
N	112		

На питање колико би често вољели да се у постављању проблемског задатка користе слике (схеме) које служе за разумијевање тог проблема, ученици су дали приближно сличне одговоре (Слика 39). Највећи број ученика је одговорило са увијек (58,9%), идентично у обје групе, а нешто мање са врло често (експериментална група 28,6%; контролна група 16,1%). Одговор понекад је веома мало присутан код ученика обје групе (експериментална група 7,1%; контролна група 5,4%). Нешто већа заступљеност одговора често је код ученика контролне групе (експериментална 5,4%; контролна 19,6%) и одговор никада није дао ниједан ученик.



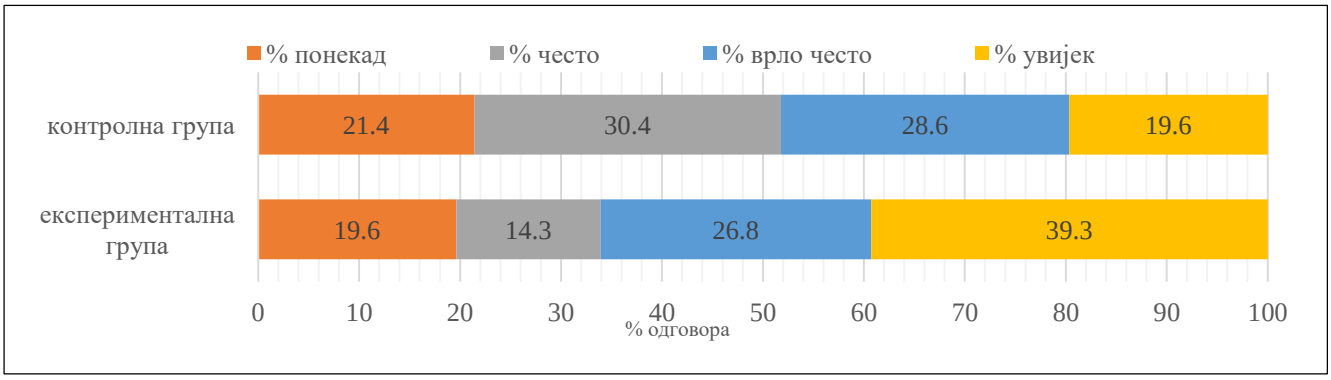
Слика 39. Мишљење ученика о постављању проблемског задатка помоћу слике (схеме)

Мишљење ученика о табеларном приказу података (Слика 40) показује да су ученици експерименталне групе у већем проценту (за 23,3%) одговорили са увијек, тако да је гранична p вриједност ближа граници статистичке значајности (p = .058) (Табела 56). Одговор врло често је приближно исти код ученика обје групе (експериментална група 28,6%; контролна група 33,9%). Слично, присутне су мале разлике у одговорима често и понекад. Такође, веома мали број ученика је одговорило са никада (експериментална група 1,8%; контролна група 3,6%).



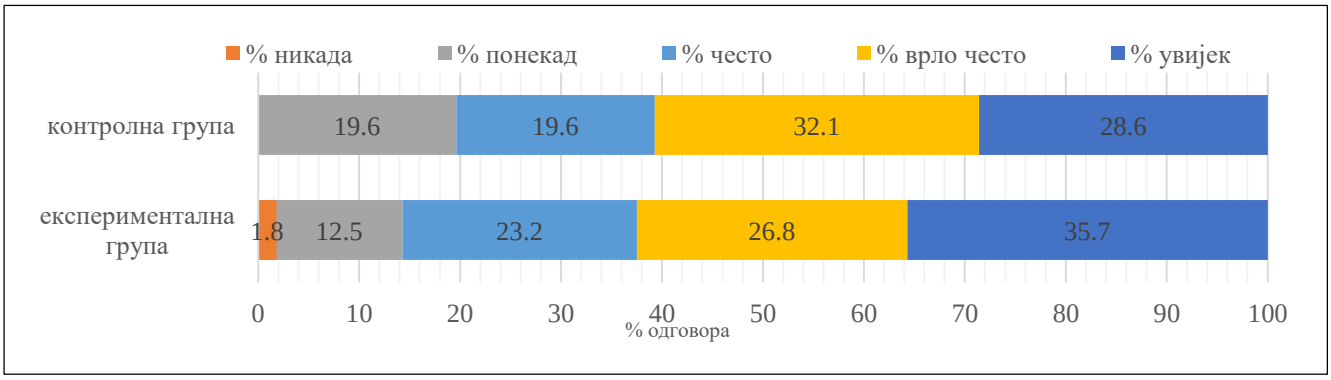
Слика 40. Мишљење ученика о постављању проблемског задатка помоћу табеларног приказа података

Одговори ученика о постављању проблемских задатака помоћу питања и испланираних поступака за његово рјешавање (Слика 41) указују да је већи број ученика експерименталне групе одговорило са увијек, односно за 19,7% више од ученика контролне групе, док су приближно исто, ученици обје групе, одговорили са врло често (експериментална група 26,8%; контролна група 28,6%). Одговор често је дало више ученика контролне групе (контролна група 30,4%; експериментална група 14,3%), док за одговор понекад нема значајне разлике (експериментална група 19,6%; контролна група 21,4%). У обје групе ниједан ученик није одговорио са никада.



Слика 41. Мишљење ученика о постављању проблемског задатка помоћу питања и испланираних поступака

Такође, ученици су дали сличне одговоре о постављању проблема у којем су непознате вриједности издвојене и означене словима (Слика 42). Примјећујемо малу предност у одговорима ученика експерименталне групе за одговор увијек (за 7,1%) и предност контролне групе за одговор врло често (за 5,3%). Овдје, исто, нема значајних разлика за одговоре често (експериментална група 23,2%; контролна група 19,6%) и понекад (експериментална група 12,5%; контролна група 19,6%).



Слика 42. Мишљење ученика о постављању проблемског задатка помоћу словних израза

Дакле, мишљење ученика, експерименталне и контролне групе, о значају варирања репрезентација у формулацији проблема је такво да се ученици највише опредјељују за сликовне (схематске) репрезентације проблема које служе за разумијевање проблема. Сликовна (схематска) репрезентација проблема даје цјеловити преглед проблема и у себи садржи опис процеса рјешавања. Поред тога, схематским приказ проблема показује структурни приступ повезивања математичких знања и истовремено пружа могућност за даље проширивање постојећих знања. Осим тога, ученици експерименталне групе су посебно истакли постављање проблема помоћу табеларног приказа података, што можемо претпоставити да је последица увођења експерименталног програма, односно различитих варијација табеларног приказа података. У нешто мањем проценту, такође, ученици су дали приближно сличне одговоре за постављање проблема помоћу питања и испланираних поступака за његово рјешавање, као и за проблеме са словним изразима. Ово нам показује да полупрограмиране проблеме ученици теже разумију, односно семантичко и синтаксичко значење постављених питања. Слично, одговори о одабиру проблема задатих помоћу словних израза указују да ученици заобилазе алебарски приступ рјешавања проблема.

Поред наведеног, жељели смо да утврдимо да ли мишљење ученика, експерименталне и контролне групе, о постављању проблема у петом разреду основне школе статистички значајно утиче на математичка постигнућа рјешавања проблема. За ово испитивање, из Анкетног упитника смо искључили 15. и 19. питање, а затим на основу одговора ученика формирали нове варијабле позитивно и негативно мишљење (одговори којима су додијељене вриједности 1 и 2 оцијењени су као негативно мишљење, а одговори са вриједностима 3 и више као позитивно мишљење). Статистичком обрадом, примјеном хи–квадрата, утврђено је да нема статистички значајне разлике у одговорима ученика (p= .078) (Табела 57). Дакле, у примјеру нашег истраживања, мишљење ученика о постављању проблема у петом разреду статистички значајно не утиче на постигнућа рјешавања постављених проблема на финалним тестовима знања. Из овога можемо закључити да способност рјешавања проблема и степен примјене и развоја математичких знања ученика зависи од личног ангажовања и стечених знања у рјешавању пажљиво креираних проблема, постављених варирањем репрезентација и контекста.

Табела 57. Мишљење ученика о постављању проблема у настави математике за 5. разред

	Хи–квадрат	Значајност
Мишљење ученика о проблемској настави петог разреда (1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9., 10., 11., 12., 13., 14., 16., 17., 18., 20., 21., 22. и 23. питање)	3.106	.078

Након завршеног истраживачког програма, изјаве ученика експерименталне групе показују шта ученици мисле о проблемским задацима, рјешавању и самосталном састављању проблема:

Александар: „Мени се свиђају проблемски задаци јер ме наводе на већу концентрацију, размишљање и продубљују моје знање. Када треба да саставим нови текст задатка, то ми јако заголица машту и онда се трудим да задатак што боље саставим.“

Анастасија: „За мене је било једно ново искуство са задацима које сам први пут срела и много ми се допало све ово. Допадају ми се ови задаци јер су за размишљање и веома су занимљиви.“

Касијана: „Задаци су били забавни, али и доста тешки“.

Стефан: „Највише ми је помогло што сте ми слике постављали. Задаци су били занимљиви, помагали су да се више концентришемо.“

Кристијан: „Задаци су били занимљиви. Наводили су нас да мислимо, и боље, и брже да размишљамо. Што се тиче самосталног састављања задатка, ту можемо да будемо креативни, маштовити. Веома је занимљиво да сам састављаш задатке.“

V ИМПЛИКАЦИЈЕ И ЗАКЉУЧЦИ

1. Методичке импликације

Теоријска основа спроведеног истраживања и ефикасност емпиријске евалуације постављања проблема варирањем репрезентација и контекста у вредновању математичких знања ученика, доводе нас до методичких импликација истраживања, у виду препорука значајних за науку, организацију и имплементацију наставног процеса, али и за даља истраживања. Дакле, у наредном дијелу представљамо неке од препорука које произилазе из нашег истраживања.

а) Измјене у курикулуму математике

У традиционалним програмима математике, како Зулкарди истиче (према Riyanto et al., 2017), циљеви су класификовани као циљеви ниског нивоа, засновани на вјештинама примјене формула, једноставних алгоритама и дефиниција (Riyanto et al., 2017). Овим приступом учења математике, више пажње је посвећено на механичка и меморијска рјешења, извођење рачунских операција, што није довољно за развој вјештине рјешавања проблема ученика. Међутим, као резултат реформе математичког образовања широм свијета, наставни садржаји се постепено мијењају, како би се прилагодили интересовању ученика за учење математике и повезали са стварним животним ситуацијама (Li, Peng, & Song, 2011). Тако, препоруке о реформама курикулума у почетној настави математике предлажу рано увођење алгебре (Национално вијеће наставника математике 1998, 2000) (према Carpenter et al., 2005). Наводе се два различита приступа изграђивања ране алгебаризације. Прво гледиште је стварање алгебаризације на ономе што већ јесте алгебарско у размишљању ученика, тј. на основама аритметичког резоновања. Друго гледиште је да се бољи развој математичког знања ученика постиже, ако им понудимо различите приказе и дијаграме, који им омогућавају да дјелују на вишем нивоу општости (Lins & Kaput, 2004). Поред наведеног, и даље се сматра да је процедурална флуентност основни циљ курикулума математике, али тако да је она више од рутинског израчунавања, односно да флуентност поступака укључује флексибилност у одабиру како и када користити процедуре. При том, наводи се испитивање основних својстава и односа аритметичких операција, тј. развој релационог разумијевања. Умјесто, искључиво, извођења поступака за добијање одговора, предлаже се учење и подучавање које подстиче учење алгебре, док се истовремено побољшава учење аритметике. Тако, циљ није једноставно додати више тема у курикулум математике, без суштинске реформе начина предавања аритметике (Carpenter et al., 2005). Такође, писци курикулума морају идентификовати које генерализације занимају ученике различитих узраста, а затим формулисати питања о тим генерализацијама (Lins & Kaput, 2004). У том смислу, Речлин (Rachlin, 1989) је истакао да постоји потреба испитивања курикулума алгебре из перспективе садржаја и из перспективе наставника. За промјену наставе алгебре није довољно измијенити само садржај алгебре у уџбенику, јер се већина наставника, углавном, ослања на уџбеник, већ испитати увјерења и ставове наставника, и улоге која та увјерења и ставови имају за подучавање ране алгебре.

Међутим, потребно је нагласити да сам наставни план и програм не може осигурати развој ране алгебре у почетној настави математике. У том погледу, неопходна је наставна пракса која се заснива на испитивању, и то двоструком, ученика, који усвајају математичке садржаје, и наставника, о оцјењивању нивоа знања ученика. Тако, наставници постављају питања како би се покренула размишљања ученика за одређене алгебарске садржаје. Таква искуства и такве „навике ума“ нијесу сами по себи корисни, већ служе за „сусрет ученика са школском алгебром“, и то не као са „непробојном препреком“ већ као са „висином“ којом се могу испитати оствариве животне шансе (Schifter et al., 2008:446).

Поред тога, за учење алгебре разматрају се питања као што је вријеме проведено на подучавању (подучавање за процедуре или за разумијевање), те питање конструктивистичког или бихевиористичког приступа настави (Wang, 2015). Овдје наводимо примјер слабијих резултата ученика из Сједињених Држава, који су користили вербалне или визуелне приказе, од њихових кинеских вршњака, са алгебарским приступима рјешавања проблема. Ови подаци изазивају откривање бољих начина за прелаз од конкретног искуства ка развоју алгебарског мишљења ученика. Према томе, Наставни план и програм почетне наставе математике требало би да садржи учење алгебарских садржаја, како би ученици користили алгебарско мишљење за рјешавање различитих проблема из стварног живота. Развој алгебарског мишљења важан је корак ка математичкој писмености ученика и не би га требало одлагати за старије разреде основне школе или све до средње школе (Cai, 1998). Међутим, начини размишљања или бављења математиком, „математичким навикама ума“ или „математичким навикама“, које аутори сматрају прилично широко „продуктивним“ за ученике, често су препуштени имплицитном курикулуму. Односно, они се обично изричито не подучавају у постојећим школским програмима, а наставници не виде да се такве „навике ума“ могу подучавати (Selden & Selden, 2005).

б) Измјене у методама подучавања наставника

Истовремено, са промјеном курикулума математике јавља се потреба за измјенама традиционалних наставних метода. Наставна пракса се постепено креће ка методи комбиновања учења и откривања, интеракцији наставник–ученик, групном кооперативном учењу итд. (Li, Peng, & Song, 2011). Овдје посебно истичемо перспективе теорије поучавања са варијацијама, коју је развио Гу (према Li, Peng & Song, 2011). Настава са варијацијама је важан метод којим ученици развијају дубоко разумијевање концепта из више перспектива. Тако, употребом различитих визуелних репрезентација илуструју се суштинске карактеристике концепта. Циљ је разумијевање суштине појмова и формирање научног концепта, занемарујући небитне особине. Репрезентацијама низа међусобно повезаних проблема, ученици разумију повезаност међу појмовима проблема и овладавају методом рјешавања постављених проблема, развијајући тако математичко знање. Стога је јасно да овај метод наставе подстиче развој релационог разумијевања. Штавише, користећи наставне активности са варијацијама, ученици могу да разумију како концепти настају и како се развијају, затим стичу представу и стратегију рјешавања проблема и граде хијерархијски однос између различитих концепата (Li, Peng & Song, 2011). Према томе, ученицима се може помоћи приликом учења алгебре, ако наставници на одговарајући начин реализују наставу са варијацијама, увођењем различитих варијација репрезентације, у складу са алгебарским циљевима учења, надовезујући се на постојећа знања и способности ученика, и користећи различите наставне садржаје у различитим фазама наставе.

Такође, улога наставника у настави постављања проблема прилично се разликује од улоге наставника у традиционалној настави математике и укључује избор проблема који ће унаприједити математичка знања ученика. Тако, наставник у развоју способности ученика за рјешавање проблема укључује разматрање широког спектра фактора и одлука. На примјер, наставници морају да одаберу такве проблеме у којима ће ученици користити одређена знања, затим, да знају у ком тренутку наставе је потребно посветити посебну пажњу рјешавању проблема, те колико смјерница дати ученицима и како оцијенити знање ученика (Lester, 2013). Због тога, Поља (Polya, 1973) истиче да би наставник требало да, прије свега, подстакне радозналост и жељу рјешавања проблема. Он, такође, треба да прилагоди одређено вријеме за рјешавање проблема. Подучавање рјешавања проблема је образовање воље. Рјешавајући проблеме који нијесу прелаки, ученик учи да истраје кроз неуспјех, цијени мали напредак, проналази битно и учи да се концентрише свом снагом. Ако ученик у школи није имао прилику да се упозна са различитим емоцијама борбе за рјешавање проблема, његово математичко образовање је пропало у најважнијој тачки (Ibid:68).

Стога, Џејкобс и колеге (Jacobs et al., 2007) истичу значај наставника у стварању смисленог приступа учењу, који повезује један математички садржај са другим и са постављањем задатака. С тим у вези, праћење знања ученика подразумијева знање наставника изван традиционалних математичких садржаја, те знање које је више од уважавања постојања вишеструких стратегија рјешавања проблема. Осим тога, потребно је да разликује стратегије рјешавања које ученици користе у односу на одређене математичке садржаје. Ово знање наставника, тј. преплитање сазнања математичких знања ученика и знања математичких садржаја, јесте карактеристика да наставници уче пратећи развој знања ученика. Дакле, да би наставник креирао наставне ситуације које ће подстаћи, осмислити, а тиме и олакшати учење, он мора да познаје идеје активног учења/наставе и да их практично примјењује (Пешикан, 2015). Будући да наставник води рачуна о напорима ученика у властитим конструкцијама знања, учење постаје хеуристичко (Streefland, 1992). Ове активности наставника чине оно што је Мор (Moore, 1995) назвао „наставним занатом“. То је вјешт радник, занатлија који посједује „збирку научених вјештина праћених искусним оцјењивањем“, који тачно зна шта треба да ради, доноси „алате“ који су му потребни, посао обавља са непосредном стручношћу и ужива у добро урађеном послу. Он сваки дан ради свој посао како треба, а сваки дан је усклађен већем плану његовог пројекта“.

в) Развијати стратегије постављања проблема наставника

За развој начина размишљања и резоновања ученика, као и за примјену математичких знања у рјешавању стварних проблема, према Силверу (Silver,1994), неопходно је да постављање проблема буде истакнуто обиљежје наставе. Посебно, као циљ образовања наставника, изражава се потреба за умијећем постављања проблема, на основу којег се изграђују критеријуми идентификовања сложености математичких задатака. Међутим, анализа математичких задатака не може остати само на класификацији и сортирању задатака по степену сложености. Потребне су измјене у задацима, тј. преформулисање проблема на начине који повећавају квалитет наставе математике. Тако стандард репрезентације проблема у математици може имати различите облике и служити у различите сврхе. Приказ проблема је, на примјер, график, једначина, табела, дијаграм, симбол или слика, који се користе за визуелизацију и темељно разумијевање наставног садржаја. Са друге стране, избори које ученици користе за представљање рјешења показују колико добро разумију постављени проблем. У том смислу, ученицима су корисне вишеструке репрезентације истог проблема (Jones, 2012).

Приликом постављања проблема у циљу провјеравања процеса рјешавања проблема важно је како представити проблем ученицима. Односно, креатори проблема преузимају одговорност за „изграђивање проблемског простора“ за ученике, тј. они пружају или ограничавају контекстуалне знакове, упутства или друге приказе информација, који треба да буду укључени у простор рјешавања проблема. Колико су доследни и отворени ови подаци одредиће сложеност рјешавања проблема. Поред тога, значајан је модалитет и медијум за представљање различитих компоненти проблема (Jonassen, 2000). Такође, наставник комбинује знање о садржају и способностима рјешавања проблема ученика. Када постављају проблем, наставници морају да предвиде шта ће ученици мислити, шта ће урадити и да ли су постојећа знања довољна за рјешавање проблема. Такође, при избору примјера, наставници треба да предвиде шта ће ученицима бити занимљиво, шта их може збунити и шта ће их мотивисати. Они морају бити способни да чују и тумаче новонастало и непотпуно знање, изражено начином на који ученици користе математички језик. Сваки од ових задатака захтијева интеракцију између специфичног математичког знања наставника и „познавања“ ученика, тј. нивоа математичких знања ученика (Vondrova, 2004).

г) Развијање стратегија рјешавања проблема ученика

Стандард за рјешавање проблема ученика наглашава важност рјешавања проблема као главног процеса кроз који ученици уче математику. Циљ овог стандарда је да ученици науче како да разумију проблеме и користе разне стратегије рјешавања проблема. У том смислу, када наставници помажу ученицима да повежу математичка знања одређених области са другим областима математике и са областима изван математике, они ученицима пружају контекст за учење (Jones, 2012).

Ученике треба подстицати на развој и откривање властитих стратегија рјешавања проблема и да, при том, постану вјешти у њиховој употреби. То ће им помоћи да са самопоуздањем рјешавају проблеме у било којој ситуацији и побољшају вјештине расуђивања. Чим ученици развију и усаврше сопствени репертоар стратегија рјешавања проблема, наставници могу да истакну одређену стратегију и разговарају о аспектима и примјени те стратегије. По потреби, ученици би требало да развијају флексибилност примјене стратегија, тј. да између научених стратегија одаберу одговарајуће стратегије рјешавања проблема (Florida Department of Education, 2010:2). На примјер, једна од стратегија која се сматра значајним поступком рјешавања проблема јесте анализа својстава рачунских операција. Према принципима и стандардима за школску математику (Национални Савјет учитеља математике, 2000): Дискусија о својствима рачунских операција, као начина рјешавања низа проблема, важна је ако ученици желе да учврсте своје интуитивне појмове и унаприједе знање. Анализа својстава основних рачунских операција даје ученицима прилику да прошире своје знање и да изграде основу за примјену ових знања у другим ситуацијама (према Schifter et al., 2008). Такође, практична импликација за инструкције рјешавања проблема јесте да би наставници требали више да подстичу ученике у развоју вјештина разумијевања и организовања информација датих у нерутинском проблему него да их пожурију за доношење одлуке о стратегијама рјешавања проблема (Elia, Van den Heuvel–Panhuizen & Kolovou, 2009). У том погледу, Капут, Блантон и Морено (Kaput, Blanton, Moreno 2008) истичу да ученици морају добро искористити постојеће менталне функције, укључити концептуалну и језичку економичност, које се користе у широком спектру случајева, и, што је најважније, логички кохерентно ускладити у односу на постојећу структуру система на коју се примјењују.

Осим тога, према Инглишу (English, 1997), подстицање ученика да изразе своје виђење различитих проблема није пресудно само за рјешавање проблема већ и за укупан развој математичких знања. Стога, ширење перцепције математичких ситуација чини се главним подручјем којем је потребно обратити пажњу, за развој способности рјешавања проблема ученика.

д) Вредновање математичких постигнућа ученика усмјерено на развој знања

Оцјењивање школске математике, како Морган наводи (према Teledahl, 2017), се у великој мјери ослања на писмене одговоре ученика. Тако, од ученика се тражи да писменим одговорима рјешавања проблема објасне како разумијевање проблема тако и предложено рјешење. Такав писани материјал мора бити јасан и свеобухватан, како би представљао ваљан доказ, из којег се оцјењују процес рјешавања проблема и математичка знања ученика. У погледу разликовања математичких способности, према Килпатрику и сарадницима (према Wang, 2015), процедурална флуентност је само један дио математичке способности, док се други дио односи на разумијевање математичких садржаја, чија је кључна карактеристика повезаност знања. Тако, оцјењивање повезаности знања, тј. релационог разумијевања, може се сматрати једним од кључних начина за анализу веза које су „продуктивне“ у учењу са разумијевањем. Дакле, потребно је вредновање математичких постигнућа ученика са акцентом на разумијевање, као и на даљи развој знања, при чему се јавља неизоставна потреба за

професионалним унапређивањем праксе оцјењивања наставника. Такође, у будућности је потребно проучити однос наставника према начину оцјењивања и испитати праксу оцјењивања наставника из математике.

Дакле, наставницима је потребно више од посједовања „добрих“ инструмената оцјењивања. Потребно им је знање о методама тумачења остварених резултата ученика, као и „реаговање“ на формативан начин. Један од захтјева за такав приступ развоја знања ученика јесте примјена модела којим се критеријуми формативних стратегија оцјењивања усклађују са методама учења ученика (Black & Wiliam, 1998). Пружање стручних знања оцјењивања математичких постигнућа ученика, наставницима, прије свега, помаже у прикупљању што више информација о знању ученика, разумијевању и вјештинама рјешавања постављених задатака. Према томе, на основу ових сазнања настава математике се прилагођава потребама ученика, што би заузврат требало да доведе до побољшања математичких постигнућа ученика. У сваком случају, треба имати у виду, што потврђује и низ експеримената, да су ученици усмјерени на учење, а не на оцјене, много успјешнији и у школи и у животу. И кад добију слабу оцјену, њихов свијет се не руши. Напротив, они траже разлог за такву оцјену и начин да следећи пут не праве исте грешке (Шпијуновић & Маричић, 2015).

Важна компонента оцјењивања јесте да ученици разумију циљ свог рада и да схвате шта се од њих очекује, што значи да ученици морају разумјети критеријуме оцјењивања. Појашњавањем критеријума и циљева учења, ученици имају прилику да стекну перцепцију различитих квалитета у свом раду и раду других (Balan, 2012). Поред тога, задати критеријуми вредновања математичких постигнућа одређују примјену одговарајућих техника вредновања. Посебно указујемо на важност примјене компаративне процјене, новије аутентичне технике, која омогућава постављање задатака, помоћу којих се, у великој мјери, постиже укупна валидност процеса оцјењивања. На овај начин отвара се пут ка вредновању рјешавања проблема и ка контекстуализованим приступима вредновања математичких постигнућа. Овај приступ је користан у настави математике, гдје се умјесто тачних или нетачних одговора, могу оцијенити отворенији конструкти, као што су разумијевање ученика из математике или рјешавање проблема. Као инструмент за вредновање квалитативног знања, предлаже се бодовна табела, у којој су јасно формулисани критеријуми садржаја, који се усвајају, и сваки критеријум је описан са неколико стандарда знања (Balan, 2012). Ријеч је о информацијама које обухватају различите димензије процеса рјешавања проблема, и, као такве, могу се користити за анализу и извођење закључака о промјенама математичких постигнућа ученика. За квалитативно оцјењивање појединачних писмених тестова предлаже се употреба „мини рубрике“, којом ученик добија диференцирану оцјену о његовим способностима рјешавања проблема и о томе шта је потребно побољшати.

Поред тога, као на драгоцјен облик оцјењивања, указује се значај рефлексије о учењу ученика (Jones, 2012). Наставници треба да анализирају шта ученици знају и који степен знања показују. Ова врста рефлексије се дешава током и након наставе. Током наставе наставник мора бити спреман да одбаци цио план лекције, уколико не може да се примијени, или да користи различите приказе, примјере и стратегије. Након предавања, рефлексија служи за даље планирање наставе. При том, у избору техника за формативно вредновање наводи се самопроцјена, посматрање, интервјуисање, портфолио, пројекат и писање извјештаја (Ibid).

Праћење постигнућа из математике, на овај начин, пружа информације о учинку појединачног ученика и обавјештава наставника о његовом успјеху, способностима рјешавања проблема, али, и, у којим дјеловима курикулума показује неразумијевање концепата, и због чега је ученику потребна додатна „пажња“, за разлику од типичног начина оцјењивања, који једино приказује информацију о укупном броју бодова и бројчану или словну оцјену.

2. Закључци

Математичко знање се не може сматрати еквивалентом познавања низа математичких чињеница, већ захтијева усвајање и разумијевање математичких концепата, при чему развијање способности рјешавања проблема, у најширем смислу, заузима преовладавајући положај. Чини се да постоји опште слагање, како истичу Блум и Нис (Blum & Niss, 1991), да се таква знања и вјештине могу предавати и учити, под условом да им се посвети изричита пажња у настави. Тако, на свим нивоима математичког образовања, широм земаља свијета, разматра се питање рјешавања проблема ученика. Наставници у школама и на универзитетима све више усмјеравају пажњу ка ширем распону циљева, апликацијама, затим, аутентичним примјерима и отвореним проблемима (Blum, 1993). Посебно, у раним фазама наставе математике указује се на доступност сложених, примијењених, проблема, са реалним подацима. Такође, показало се да апликативни процеси рјешавања проблема пружају ослобађање од заморне рутине и омогућавају бољу концентрацију ученика. Осим тога, проблеми се могу боље анализирати и разумјети промјеном параметара и проучавањем насталих ефеката, помоћу нумеричких, алгебарских или графичких приказа, што одговара такозваном оперативном принципу: „Шта се дешава, ако ...?“. Исто тако, проблеми који су недоступни из дате теоријске основе, тако што су, на примјер, сувише сложени или математички превише захтјевни, за дати узраст, могу се симулирати нумеричким или графичким приказима (Blum & Niss, 1991).

Подучавање математике кроз рјешавање проблема, према Ламбдину и колегама (према Jones, 2012), много је више од одабира забавних проблема из стварног живота. То је у основи нови педагошки приступ настави математике, који трансформише „природу“ наставног предмета, улоге ученика и улоге наставника. Наставници укључују проблеме којима изазивају претходно знање ученика за примјену и развој нових идеја рјешавања проблема. Тако, овај приступ, тј. моделовање, као интегрални дио наставе, доприноси смисленом учењу и подучавању математике, ако су формирање одговарајућих основних појмова и развој знања суштински циљеви наставе математике (Blum, 1993). У том смислу, развој математичког знања не мора бити једноставно линеарно гомилање концепата и вјештина, већ то може бити „скуп“ знања и вјештина који ученицима омогућава да наизглед међусобно одвојене дјелове садржаја повежу у кохерентну цјелину (McNeil et al., 2019).

Лерон и Дубински (Leron & Dubinsky, 1995) тврде да је неуспјех ученика у настави математике, макар дјелимично, последица преуско конципираног погледа на наставу, и далеко од тога да је последица непромјенљиве неспособности ученика за учење математике. Питање више није у томе да ли су ученици способни да разумију математику, већ у томе како искористити њихово знање, не смањујући или прикривајући проблем, нити рјешавајући проблем умјесто ученика. Како Мејсон (Mason, 2008) истиче коришћење властитих способности је мотивационо, односно креативно коришћење властитих снага ученицима је забавно. Ствара се могућност да ученици сами направе уопштавања, заснована на сопственим поступцима и докажу их, изводећи операције са бројевима, физичким материјалима или визуелним приказима. Тако, настава са варијацијама, кроз „узорне проблеме“, примјеном различитих репрезентација, ученицима помаже да науче како да пронађу ефикасне стратегије за „квантитативне односе“ и формирају различите методе рјешавања проблема. Више рјешења за један проблем помаже разумијевање значења проблема и однос између величина из различитих углова, што заправо обогаћује вишеструке репрезентације рјешавања проблема и развија алгебарско мишљење ученика (Li, Peng & Song, 2011). Конкретно, без рада у учионици, који покреће идеје за уочавање својстава рачунских операција и бројева, изванредне могућности за учење остале би непримијећене (Schifter et al., 2008).

Све наведено подстакло нас је на више питања за истраживање, најприје, на провјеравање степена примјене математичких знања ученика у рјешавању проблема: Која математичка знања вредновати код ученика? На који начин ученицима пружити прилику за примјену усвојених знања? Које стратегије примијенити у постављању проблема и како их ускладити са предвиђеним наставним садржајима? Како мотивисати ученике у рјешавању проблема? Које друштвено корисне проблеме из реалног окружења приказати ученицима? Оно што је важно за овај експериментални програм јесте да смо истовремено приликом креирања проблема, варирањем репрезентације и контекста, водили рачуна о начину размишљања ученика о предвиђеним математичким садржајима. Током експерименталног програма пратимо како ученици користе стечена знања и које им варирање репрезентације и контекста проблема највише помаже у разумијевању и успјешном рјешавању проблема, затим да ли у рјешавању проблема ученици само механички примјењују знање научених дефиниција или конструисањем стечених знања изграђују нова. Такође, испитујемо колико варирање репрезентације и контекста проблема ученицима помаже у самосталном састављању новог проблема. Осим тога, жељели смо да испитамо да ли варирање репрезентације и контекста проблема утиче на развој способности рјешавања проблема ученика, односно на даљи развој математичких знања.

Овај рад карактерише увођење аутентичних података у формулацију проблема. То су задаци намијењени за утврђивање аритметичких и алгебарских садржаја, којим се испитује примјена стечених знања и истовремено директно приказује степен разумијевања. Питања која постављамо у задацима, као „мјери“ математичког знања, осмишљена су тако да ставе знање у контекст његове примјене. Анализирајући одговоре ученика настојимо да идентификујемо математичко знање које је „извучено из наставе“, другим ријечима стечено математичко знање потребно за рјешавање постављених захтјева на финалним тестовима знања. У свим овим активностима, нагласак је био да ученици буду креативни, дивергентни и флексибилни у примјени усвојених знања о аритметичким и алгебарским садржајима.

Дакле, након 11 седмица примјене експерименталног програма, резултати спроведеног истраживања показују да између ученика експерименталне и контролне групе постоје разлике у математичким постигнућима рјешавања проблема на свим финалним тестовима знања и скоро у свим постављеним проблемима (Табела 9, Табела 20, Табела 21; Слика 16, Слика 19). Поред тога, за разлику од ученика контролне групе, ученици експерименталне групе приказују пораст у резултатима рјешавања проблема, постепено, од првог до трећег финалног теста знања. Тиме, потврђујемо основну хипотезу: Варирање репрезентација и контекста проблема утиче на математичка постигнућа рјешавања проблема, ефикасност примјене и развоја математичких знања, из аритметичких и алгебарских садржаја, код ученика петог разреда основне школе црногорског образовног система. Овим, такође, потврђена је прва посебна хипотеза, тј. да постоје статистички значајне разлике у просјечним постигнућима ученика, из аритметичких и алгебарских садржаја, за које је наставник постављао и вредновао проблеме на уобичајени начин и ученика са којима су се исти садржаји увјежбавали и вредновали примјеном проблема постављених техником варирања репрезентација и контекста у формулацији захтјева задатка (Табела 9, Слика16). Примјећујемо да успјешна постигнућа рјешавања проблема ученика експерименталне групе показују да је сваки наредни тест знања у корелацији са претходним тестом знања, што значи да је повезаност структуре експерименталног програма постављања проблема, са сваким наредним тестом знања, утицала на пораст постигнућа на тестовима знања, односно на развој способности рјешавања проблема (Табела 10, Слика 17. *а, б, в*). Супротно, резултати слабијих постигнућа рјешавања проблема ученика контролне групе показују да је сваки наредни тест знања у приближно истој корелацији са претходним тестом знања, односно да повезаност структуре експерименталног програма постављања проблема, са сваким наредним тестом знања, није значајно утицала на промјене постигнућа рјешавања проблема (Табела 11, Слика 18. *а, б, в*).

Слично, скоро у свим постављеним проблемима, примјеном варирања репрезентација и контекста, утврђене су значајне разлике у приказаним рјешењима, тј. одговорима ученика, експерименталне и контролне групе. Дакле, потврђена је друга посебна хипотеза, тј. да између ученика за које је наставник постављао и вредновао проблеме на уобичајени начин и ученика са којима су се исти садржаји увјежбавали и вредновали примјеном проблема постављених техником варирања репрезентација и контекста у формулацији захтјева задатка, постоје статистички значајне разлике у рјешењима проблема, из аритметичких и алгебарских садржаја. Анализа је спроведена по групама задатака, које смо навели у поглављу *Финално тестирање*. Ниво постигнућа ученика, тј. степен примјене усвојених математичких знања, аритметичких и алгебарских садржаја, у рјешавању проблема, вреднујемо у односу на варирање репрезентације и контекста проблема и категорије добијеног одговора. У циљу праћења развоја математичких знања, аритметичких и алгебарских садржаја, упоредили смо одговоре ученика у рјешавању проблема на истом и различитим финалним тестовима знања.

Одговори ученика у примјерима примјене својства дистрибутивности као олакшице у рачунању (1.1.а; 1.1.в) (Табела 22) показују слабу присутност овог својства, испод 10% за примјер 1.1.а, односно од 10 до 20% за примјер 1.1.в., односно већином присутност алгоритамског поступка израчунавања. Изузетак је примјер множења разлике бројем (1.1.б), у којем су, у примјени својства дистрибутивности, успјешнији ученици експерименталне групе (50%) (контролна група 16,1%), што можемо приписати ефекту увођења експерименталног фактора, примјерима симболичког записа проблема, тј. бројевних израза са захтјевом примјене својства дистрибутивности.

Слично, *у израчунавању задате бројевне једнакости* (2.5.б$_2$), са систематском употребом записивања степена броја 10 током Другог модела, а које је претходно усвојено у Првом моделу, одговори ученика се значајно разликују (Табела 26). Наиме, висок проценат нетачног одговора присутан је код ученика контролне групе (82,1%), док је код ученика експерименталне групе знатно нижи (42,9%). Из овога можемо закључити да се у настави математике не повезују, у довољној мјери, усвојена математичка знања са новим наставним садржајима. На примјер, поређењем проблема симболичког записа, израчунавање бројевне једнакости са двије рачунске операције (примјена производа једнаких чиналаца–степен), са првог и другог финалног теста (1.1.г, 2.4.а) примјећујемо да су разлике у одговорима изражене у задатку са другог финалног теста (2.4.а) (Табела 38), док нема значајних разлика у рјешењима задатка са првог финалног теста (1.1.г) (Табела 37). Дакле, постоји ефекат експерименталног фактора, тј. систематска примјена производа једнаких чинилаца Првог модела на Други модел експерименталног програма. Уколико одговоре наведених проблема симболичког записа, израчунавање бројевне једнакости са двије рачунске операције (1.1.г, 2.4.а) (Табела 37, Табела 38) упоредимо са истим типом проблема (2.5.б$_2$), који укључује три рачунске операције и заграду (Табела 26), уочавамо највећу изражену разлику у одговорима симболички постављеног проблема словних израза, превођење словног у бројевни израз са двије операције и израчунавање израза (2.4.а) (Табела 38). Ово показује да ученици не уочавају повезаност словних и бројевних израза, избјегавају трансформацију ових израза и не разумију слово као ознаку за одређену вриједност промјенљиве.

Разлике су присутне у одговорима *разумијевања својстава рачунских операција*, односно правила зависности производа од промјене чинилаца, на другом (2.3.б) и трећем финалном тесту (3.2.б$_2$). Подаци показују да су бољи резултати ученика код формулисаних питања са вишеструким избором одговора (2.3.б) (експериментална група 78,6%; контролна група 48,2%) (Табела 35) него ли у постављеном полупрограмираном проблему (3.2.б$_2$) (експериментална група 67,9%; контролна група 7,1%) (Табела 36), што нам указује да сложеност захтјева задатка утиче на добијање тачног одговора. Поред тога, можемо закључити да се полупрограмирани приказ задатка ријетко користи у контролној групи, на шта упућују подаци Анкетног упитника (Табела 54, Слика 30). Међутим, *рјешавањем полупрограмираног*

проблема (2.1.б) (аутентични проблем дијељења са остатком) ученици су показали висок ниво успјешности (експериментална група 78,6%; контролна група 62,5%) (Табела 24), тако да између ученика нема статистички значајне разлике у математичким постигнућима. Поређењем овог резултата (2.1.б) (Табела 24) са полупрограмираним захтјевом разумијевања зависности производа од промјене чинилаца ($3.2.б_2$) (Табела 36) можемо закључити да ученици контролне групе не разумију и не примјењују ово својство.

Успјешност рјешавања текстуалних задатака (1.2.) (1.4.б), који описују реалне ситуације, се знатно разликује између ученика експерименталне и контролне групе (Табела 27, Табела 30). Ово показује да текстуално постављене проблеме ученици теже разумију, те је стога, поред текста проблема, ученицима неопходно понудити различите визуелне репрезенатције проблема. Осим тога, у прилог овоме, разумијевање аритметичких проблема, код једанаестогодишњака, који су дати кроз текстуалне задатке, Моро и Кокан–Виено (према Стевановић & Ивковић, 2017) објашњавају да на постављање математичког задатка и његов резултат може утицати начин на који ученици разумију специфичне језичке конструкције помоћу којих је задатак формулисан.

Анализа одговора ученика се значајно разликује у *рјешавању проблема постављених помоћу схеме* (2.1.а, $2.5.а_2$, 2.2.) (Табела 23, Табела 25, Табела 28). Према наведеним подацима, можемо закључити да, за разлику од ученика експерименталне групе, ученици контролне групе немају прилику за рјешавањем схематски постављених проблема, што, такође, потврђују разлике у одговорима ученика о присутности схематских репрезентација проблемима у настави математике (одговори ученика из Анкетног упитника, Табела 54, Слика 29). То значи да се у настави углавном рјешавају текстуални проблеми, па поменуте разлике у постигнућима ученика можемо приписати увођењу експерименталног фактора (варирање репрезентације и контекста проблема).

Рјешења проблема постављеног помоћу слике (2.3.а) (Табела 29) се значајно разликују. Проценат нетачног одговора је изражен код ученика контролне групе (80,4%), односно успјешност рјешавања овако постављеног проблема је значајно већа код ученика експерименталне групе (за 59%). У поређењу са претходно наведеним примјерима, тј. постављеним текстуалним и схематским проблемима (1.2. и 2.2.) (Табела 27, Табела 28), можемо закључити да је највећа разлика присутна у одговорима сликовне (2.3.а), а најмања у одговорима текстуалне репрезентације проблема (1.2.). Такође, ови подаци потврђују да ученици контролне групе не разумију схематске и сликовне репрезентације постављених проблема, јер нијесу ни имали прилике за рјешавањем овако формулисаних проблема, као и да се у настави углавном рјешавају текстуално постављени проблеми (Табела 54).

Када упоређујемо резултате одговора текстуалног проблема са првог финалног теста (1.4.б) и схематског проблема са другог финалног теста (2.2.) (Табела 30, Табела 28), уочавамо изражену разлику у бољим постигнућима ученика експерименталне групе, у одговорима за схематски постављени проблем. С друге стране, слабија постигнућа ученика контролне групе, на истом задатку, су последица дјеловања експерименталног фактора, који је примијењен у Другом моделу, тј. схематске репрезентације проблема, што, такође, потврђују одговори ученика са Анкетног упитника (Табела 54, Слика 30).

Слично, упоређивањем одговора ученика текстуалног проблема, који се односи на примјену новца у свакодневним ситуацијама (1.3.б) (Табела 31), са аутентичним текстуалним проблемом, приказаног помоћу слике (2.3.а) (Табела 29), примјећујемо већу успјешност ученика у рјешавању проблема сликовног приказа него ли текстуалног проблема (експериментална група за 44,7%; контролна група за 3,5%). И ово потврђује појачани ефекат експерименталног фактора, увођења визуелних (схематских) репрезентација и реалног контекста у Другом моделу.

Поређењем одговора ученика *у рјешавању проблема који су постављени помоћу табеле*, на свим финалним тестовима знања (1.4.а, 2.4.б, 3.3) (Табела 32, Табела 33, Табела 34), показало се да су највеће разлике присутне у рјешењима на трећем финалном тесту, тј. приликом рјешавања сложене једначине (Табела 34), а најмање на првом тесту, тј. у проналажењу правила (Табела 32). Анализом одговора рјешавања овако постављених проблема можемо закључити да сложеност постављених захтјева задатка утиче на успјешност процеса рјешавања проблема.

Одговори ученика у *рјешавању просте схематски постављене и сложене симболички записане једначине* показују да нема значајних разлика у рјешавању просте једначине схематског приказа, док су изражене разлике у рјешавању сложене симболички записане једначине. Успјешност рјешавања схематског приказа просте једначине, тачна поставка рјешавања и тачно рјешење (експериментална група 92,9%; контролна група 87,5%) (Табела 39) показује да ученици схематски приказ успјешно преводе у симболички запис. Разлике у успјешности рјешавања сложене симболички записане једначине (експериментална група 80,4%; контролна група 48,2%) (Табела 40) можемо приписати утицају експерименталног програма, варирању репрезентација и контекста једначина, тј. већем искуству и ангажовању ученика у рјешавању једначина.

Упоређивањем одговора ученика схематског (3.1.а) (Табела 39), табеларног (3.3.) (Табела 34) и симболичког приказа једначине (3.5.а$_2$) (Табела 40) примјећујемо највеће разлике у рјешавању сложене једначине табеларног приказа података, а најмање у схематском приказу једначине са једном рачунском операцијом. Према томе, успјешност рјешавања једначине схематског приказа указује да схеме помажу разумијевање и рјешавање проблема.

Поређењем одговора ученика *схематски* (3.2.а, 3.4.) (Табела 41, Табела 42) *и симболички записане неједначине* (3.5.б$_2$) (Табела 43) уочавамо да ниво сложености постављеног захтјева утиче на успјешност рјешавања неједначине. Највише проблема ученици имају у рјешавању двоструке неједначине схематског приказа података. То указује да ученици наилазе на проблем превођења схематског приказа неједначине у симболички запис, што потврђује одговор нема рјешења или нетачно рјешење (експериментална група 21,4%; контролна група 58,9%) (Табела 42). Међутим, схематски приказ неједначине са једном рачунском операцијом (3.2.а) ученици успјешно трансформишу у симболички запис и тачно долазе до рјешења (експериментална група 80,4%; контролна група 66,1%) (Табела 41). То потврђује способност ученика за разумијевање схематског приказа неједначине, те да су неопходне схемаске репрезентације у процесу учења ових садржаја. Такође, можемо закључити да се у поступку одређивања скупа рјешења неједначине ученици не ослањају на примјену правила зависности резултата од промјене компоненти израза, као ни на схематске репрезентације рјешавања неједначина, већ искључиво на симболичку процедуру израчунавања вриједности промјенљиве. Према томе, доводи се у питање изграђивања значења појма неједначине у скупу природних бројева.

Резултати истраживања потврђују трећу помоћну хипотезу, тј. да постоје статистички значајне разлике у самосталном састављању проблема, из аритметичких и алгебарских садржаја, између ученика за које је наставник постављао и вредновао проблеме на уобичајени начин и ученика са којима су се исти садржаји увјежбавали и вредновали примјеном проблема постављених техником варирања репрезентација и контекста у формулацији захтјева задатка.

Одговори ученика у самосталном састављању проблема на основу задатог бројевног израза, на првом (1.5.а) и другом финалном тесту знања (2.5. б$_1$), показују висок проценат неуспјешности (Табела 44, Табела 45). Такође, подаци указују на пораст одговора – нема одговора или нетачно састављен проблем на другом финалном тесту. Уколико наведене примјере састављања проблема са првог и другог финалног теста (1.5.а, 2.5. б$_1$) (Табела 44,

Табела 45) упоредимо са састављањем проблема на основу задате схеме (2.5.$а_1$) (Табела 46), са другог финалног теста, примјећујемо већи проценат неуспјешности у примјеру схематског приказа проблема. Дакле, ученици имају изражене потешкоће у састављању проблема, тешко перципирају структуру задатог проблема, што им ствара проблем у описивању проблемске ситуације и формулисању питања. Осим тога, у односу на задати бројевни израз, схематски постављен проблем је сложенијег захтјева, те стога имамо слабија постигнућа ученика.

У састављању проблема схематског (3.1.б) и симболичког приказа једначине (3.5.$а_1$) одговори ученика се значајно разликују (Табела 47, Табела 48). Наиме, висока успјешност потпуно састављеног проблема схематски постављене једначине, са једном рачунском операцијом (3.1.б), је присутна код ученика експерименталне групе (83,9%), док је слабија код ученика контролне групе (48,2%) (Табела 47). С друге стране, састављање проблема симболички постављене једначине, са двије рачунске операције (3.5.$а_1$), је тежи захтјев, због чега су и слабија постигнућа ученика (експериментална група 48,2%; контролна група 12,5%) (Табела 48).

Подаци састављања проблема неједначина, схематског (3.2.$б_1$–Табела 49) и симболичког (3.5.$б_1$–Табела 50) приказа, показују да су ученици успјешнији у састављању схематски постављене неједначине са једном рачунском операцијом (3.2.$б_1$) (експериментална група 55,4%; контролна група 16,1%) (Табела 49). За неједначину задату симболичким записом са двије рачунске операције (3.5.$б_1$), знатно већи проценат успјешности састављања проблема је код ученика експерименталне групе (41,1%), док ниједан ученик контролне групе није тачно саставио проблем (Табела 50). Поред наведеног, подаци (Табела 41, Табела 43) указују да су ученици успјешнији у рјешавању него у састављању овако постављених неједначина.

Дакле, након 11 седмица примјене експерименталног програма, за разлику од ученика контролне групе, код ученика експерименталне групе уочава се значајан помак у способностима састављања проблема. Постављање проблема, на часовима утврђивања аритметичких и алгебарских садржаја, варирањем репрезентација и контекста проблема, који су били мање „традиционални“, како би се изазвало математичко мишљење, довело је до промјене „природе“ садржаја у састављеним проблемима. То се посебно показало у способностима реалног сагледавања контекста и избора теме састављања проблема. Према Креспу (према Osana & Pelczer, 2015), овом промјеном аутентичне природе састављања проблема, наставницима се даје „права“ публика, тј. како је схватила и ријешила своје проблеме. Уједно, захтјев самосталног састављања проблема је највише утицао на постигнућа ученика на финалним тестовима знања (Прилог 11 – Табела 5.а),..., Табела 18.а) и тиме можемо закључити да је састављање проблема задатак са најсложенијим захтјевима. Ученици имају проблем вербализације математичког записа, тј. избјегавају или нетачно користе математички језик. Стога је ученике неопходно подстицати да математички опишу сваки записани израз, једнакост и неједнакост. Такође, математички израз треба увијек превести на ситуације из свакодневног живота. На овај начин, ученици стварају представу да се један запис може односити на више проблема и тиме стварати више могућности састављања проблема. Дакле, варирањем репрезентација и контекста проблема ученици примјењују и проширују потојећа знања и истовремено развијају стратегије рјешавања проблема.

Одговори ученика из Анкетног упитника показују да мишљење ученика о постављању проблема у настави математике петог разреда, статистички значајно не утиче на математичка постигнућа рјешавања проблема на финалним тестовима знања (Табела 57), чиме није потврђена четврта помоћна хипотеза, тј. мишљење ученика о постављању проблема у настави математике петог разреда утиче на математичка постигнућа рјешавања проблема. Према томе, способност рјешавања проблема у настави математике, као и степен примјене и развоја математичких знања, аритметичких и алгебарских садржаја, зависи од личног ангажовања и стечених знања и вјештина ученика у рјешавању пажљиво креираних проблема, постављених

варирањем репрезентација и контекста. У прилог томе су подаци који показују да се не разликује мишљење ученика о значају варирања репрезентација у формулацији проблема (Табела 56, Слика 39, Слика 40, Слика 41, Слика 42). Дакле, одговори упућују на потребу постављања проблема варирањем репрезентација и контекста. Поред наведеног, као резултат дјеловања експерименталног програма, одговори показују да се мишљење ученика о варирању репрезентација проблема у настави математике за пети разред статистички значајно разликује (Слика 27, Слика 28, Слика 29, Слика 30, Слика 32). Другим ријечима, разлике у одговорима произилазе због веће присутности сликовног, схематског, табеларног, полупрограмираног приказа проблема, као и захтјева самосталног састављања проблема код ученика експерименталне групе. Такође, између ученика су присутне разлике у одговорима о рјешавању проблемских задатака на више начина (Табела 55, Слика 33), тј. ученици експерименталне групе указују на изражену присутност оваквог приступа рјешавања проблема.

Овдје, позитивно мишљење ученика петог разреда о математичким компетенцијама подудара се са мишљењем ученика четвртог разреда, на нивоу међународног просјека, о својим способностима из математике, кроз два истраживачка циклуса TIMSS 2015 и TIMSS 2019. Интересантно, у студији TIMSS 2019, ученици из Црне Горе су први на међународној листи по степену израженості самопоуздања из математике, али не и толико високог просјечног постигнућа из математике (Ђерић и сар., 2020). Истраживања доследно показују да став према математици и вјеровање ученика у властите способности значајно предвиђа математичко постигнуће (Black & Wiliam, 1998; Јакшић, Марушић Јаблановић & Гутвајн, 2017; Максић, Весић & Тењовић, 2017; Џиновић & Вујачић, 2017 Стевановић & Ивковић, 2017; Ђерић и сар., 2020). Ученици који имају позитивне ставове према математици и који се осјећају компетентно у погледу учења математике остварују и веће постигнуће из математике. Сматра се да позитивна увјерења мотивишу ученике да се ангажују током наставе и испоље упорност, труд и пажњу приликом учења нових садржаја. Поредећи налазе наведених студија о повезаности увјерења ученика у властите математичке компетенције и остварених математичких постигнућа, можемо закључити да се подаци TIMSS 2019 студије за Црну Гору подударају са оствареним резултатима, тј. подацима ученика контролне групе, док су подаци експерименталне групе у складу са подацима међународног просјека, односно, уопштено говорећи, они ученици који су изразили да имају веће самопоуздање у математичке компетенције имали су и знатно већа просјечна постигнућа из математике од оних ученика који нијесу изразили повјерење у сопствене способности рјешавања проблема (Стевановић & Ивковић, 2017; Ђерић и сар., 2020).

Дакле, све наведено показује да су у настави математике потребне различите визуелне репрезентације проблема са реалистичким, аутентичним и математичким контекстом проблемске ситуације. То су, такође, структурирани проблеми разложени на низ питања и различитих варијација истог проблема. Посебно је важно истаћи значај метода постепеног увођења промјенљиве у процес рјешавања једначина и неједначина, као и развој алгебарског мишљења на основама аритметичких правила. Овим приступом, ученици, перцепцијом различитог нивоа сложености постављених проблема и превођењем једне репрезентације проблема у другу, долазе до развоја релационог разумијевања математичких знања. И као последицу наведеног имамо постепено изграђивање свијести ученика о реалној процјени властитих способности рјешавања проблема.

Иако се овај експериментални програм показао успјешним у развијању способности рјешавања и састављања проблема ученика, постоји много начина којим би се могао побољшати. На примјер, потребно је у програмске активности укључити више времена за вредновање постигнућа рјешавања и самосталног састављања проблема. То тражи примјену иновативних техника у формативном вредновању математичких знања ученика, о којима је више описано у поглављу *Аутентичне технике вредновања*. При том, потребно је увођење

више обучених истраживача за вредновање разумијевања математичких знања и подршка друштвене заједнице одређеног образовног система. С друге стране, за развој математичких знања ученика, ово је драгоцјен начин изграђивања свијести ученика о „природи и улози“ структуре репрезентације и контекста проблема. То значи да је потребно више пажње посветити перцепцији, разумијевању и процесима рјешавања проблема ученика. Такође, састављање проблема ученика требало би да постане важан процес учења у укупном курикулуму математике.

Ипак, треба бити опрезан са добијеним резултатима истраживања. Прво, резултати су ограничени на релативно мали узорак, што значи да би требало укључити више ученика и истраживача за праћење и прикупљање података. Да би се добили увјерљивији докази за резултате ове студије, потребан је дужи временски период извођења експерименталног програма. Такође, добијени резултати истраживања леже на различитим тачкама, између „нормалне“ учионице и посебних услова истраживања. Посебно, наставници који предају у експерименталној групи нијесу исти као и наставници у контролној групи. Осим тога, током истраживања жељели смо да наградама, које нијесу присутне у настави, што више мотивишемо ученике експерименталне групе. Из овога можемо претпоставити да се обећаним наградама за најбоља постигнућа, као и вредновањем активности ученика током извођења експерименталног програма, једним дијелом, подстакло ангажовање ученика у рјешавању проблема. Наиме, успјешни одговори ученика су континуирано праћени и биљежени на сваком часу. Исто тако, прегледани су и исправљани проблеми домаћих задатака, и регистовани тачни одговори ученика.

Начин на који ученици усвајају наставне садржаје математике утиче на остварени циљ, а то је успјешност примјене стечених знања у рјешавању проблема. Прикази рјешења проблема одражавају математичко знање ученика, тј. откривају разумијевање проблема, метод рјешавања, односно, начине на које ученици преносе своје математичке идеје и процесе размишљања (Jonassen, 2000). Такође, процеси рјешавања проблема зависе од спољних смјерница за учење, тј. сваког новог „начина да ученик стигне до циља“ (Skemp, 2002). Стога, чини се да је ширење перцепције математичких ситуација главно подручје којем је потребно обратити пажњу у развоју рјешавања проблема ученика. Како примећује Елиот (према Mason, 2008:72) у есеју о Томасу Карлајлу: „Добро је речено да је највиши циљ у образовању аналоган највишем циљу у математици, наиме, не ради постизања резултата већ способности, не одређених рјешења, већ начина помоћу којих се може остварати бесконачно много рјешења“. Зашто се онда и даље математика показује толико „тешком“ за већину ученика? Једна од тврдњи јесте, према Мејсону (Mason, 2008), да образовни системи испољавају толику жељу за контролом, стандардизацијом, понекад маскираном реториком једнакости, али увијек чинећи исту грешку: не подстичући наставнике да користе властите способности и креативно доносе одлуке, како би исте подстакли код својих ученика. Ова промјена концепције о томе шта значи предавати математику захтијева храброст и посвећеност (Jones, 2012).

Дакле, и поред свих препрека примјене постављања проблема у настави математике, неопходно је да наставимо улагање напора за њихово превазилажење. То би се могло постићи адекватним образовањем наставника, прије извођења наставног процеса. Тиме би наставници стекли знање, способности, искуства, а посебно ставове да на жељени начин испуњавају захтјеве у настави математике, за шта је, такође, потребно стимулисање сваке врсте контаката и сарадње између наставника математике у школи и наставника универзитета, као и њихових колега из других сродних предмета (Blum & Niss, 1991). Темпо ових промјена је спор јер је наставницима веома тешко да промијене праксу, која је већ устаљена у настави математике. Међутим, постављање проблема повезаних са стварним свијетом треба да постану и остану битни дјелови наставе математике на свим нивоима.

Харлен и Дикен–Крек (према Black & Wiliam, 1998) истичу да на вољу, жељу и способност ученика за учење утичу процеси оцјењивања, тако да је за будућа истраживања неопходно испитати стратегије оцјењивања математичких постигнућа ученика. Многим наставницима недостају интерпретативни оквири који су неопходни за оцјењивање математичких знања ученика у различитим апликативним проблемима, односно технике формативног вредновања. Заправо, за наставу математике, оцјењивање и тестови повезани са моделовањем и апликацијама су и даље у експерименталној фази. Свеукупна слика је да врло мало наставних програма математике чини значајне искораке за моделовање и примјену систематског вредновања. Стога, неопходно је посветити више пажње креирању техника вредновања математичких знања које се подударају са основним аспектима моделовања, али које су, при том, реалне и изводљиве, у односу на нормалну популацију ученика (Blum & Niss, 1991). Коначно, питање о којем треба даље размишљати јесте како „измјерити“ употребу и флексибилност стратегија рјешавања проблема ученика.

Задатак наставника јесте да подстакну ученике да користе своју природну радозналост и способности рјешавања проблема како би постали свјесни улоге коју математика игра у свакодневном животу. За примјену и повезивање математичких знања, ученицима не само да је потребно да разумију математичке садржаје, већ, такође, да користе различите репрезентације математичких садржаја. Осим тога, одговоре ученика потребно је прецизно идентификовати и континуирано пратити. Тако, истовремено наставници развијају инструкције вредновања остварених математичких постигнућа ученика и стратегије постављања проблема, како би се математички садржаји користили боље, корисније и одговорније и тиме развијала математичка знања и компетенције ученика одређеног узраста. То значи да су потребне провјере знања различитог формата које више пута испитују повезане математичке садржаје. Заправо, знање ученика није одређено једном већ се открива у варирању репрезентација и контекста проблема. Наведени приступ наставе математике ученицима даје прилику да постану свјесни развоја математичких знања, подложних сталним промјенама, као и да развијају аутономију и флексибилност рјешавања проблема различитих репрезентација и контекста.

Поред наведеног стручног доприноса идеје постављања проблема варирањем репрезентација и контекста у вредновању остварених математичких постигнућа ученика, научни допринос се огледа у освјетљавању аспеката вредновања не само за процјену математичких знања ученика, већ и за учење математике кроз процес вредновања. Осим тога, идеја нашег рада развија научни приступ постављања проблема са аспекта наставника и аспекта ученика, односно научни допринос ефеката постављања проблема наставника, као и активности постављања проблема ученика у развијању математичких знања.

VI ЛИТЕРАТУРА

1. Andersson, C. (2017). Formative assessment – and the component of adjusted teacher instruction. In: Dooley, T. & Gueudet, G. (Eds.): *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education; CERME10* (3419–3426), February 1–5, 2017, Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.
2. Balan, A. (2012). *Assessment for learning, A case study in mathematics education* (doctoral dissertation in education). Malmö: Malmö University.
3. Ball, D. L. (1993). With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary School Mathematics. *The Elementary School Journal*, 93(4), 373–397. DOI:10.1086/461730
4. Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389–407. DOI:10.1177/0022487108324554
5. Ball, D. L., & Forzani, F. (2009). The work of teaching and the challenge for teacher education. *Journal of Teacher Education*, 60 (5), 497–511.
6. Balacheff, N. (2001). Symbolic arithmetic vs algebra: The core of a didactical dilemma. In: Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A. & Lins, R. (Eds.), *Perspectives on school algebra* (249–260). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
7. Банђур, В. (1978). Идентификовање способности учења математике. *Психологија*, XI (1-2), 53–69.
8. Банђур, В. & Поткоњак, Н. (1999). *Методологија педагогије*. Београд: Савез педагошких друштава Југославије.
9. Barmby, P. (2019). Using a variety of methods for mathematics education research. In: Milinković, J. & Kadelburg, Z. (Eds.): *Research in Mathematics Education* (16–30). Scientific Conference *Research in Mathematics Education*, May 10–11, 2019. Belgrade: Mathematical Society of Serbia.
10. Bastable, V. & Schifter, D. (2008).Classroom Stories: Examples of Elementary Students Engaged in Early Algebra. In: Kaput, J. J., Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (165–184). New York, NY: Routledge.
11. Bell, A., Burkhardt, H. & Swan, M. (1992a). Balanced Assessment of Mathematical Performance. In: Lesh, R. A. & Lamon, S. J. (Eds.), *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics* (119–144). Washington: American Association for the Advancement of Science.
12. Bell, A., Burkhardt, H. & Swan, M.(1992b). Assessment of Extended Tasks. In: Lesh, R. A. & Lamon, S. J. (Eds.), *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics* (145–176). Washington: American Association for the Advancement of Science.
13. Bell, A., Burkhardt, H. & Swan, M.(1992c). Moving the System: The Contributions of Assessment. In: Lesh, R. A. & Lamon, S. J. (Eds.), *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics* (177–193). Washington: American Association for the Advancement of Science.
14. Bisson, M. J., Gilmore, C., Inglis, M., & Jones, I. (2016). Measuring conceptual understanding using comparative judgement. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(2), 141−164.
15. Black, P. & Wiliam, D. (1998). Assessment and Classroom Learning. *Assessment in Education: Principles, Policy and Practise*, 5 (1), 7−74.
16. Blum, W. (1993). *Mathematical modelling in mathematics education and instruction.* Retrieved May 22, 2020. from: https://www.researchgate.net/publication/36410733
17. Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), 37–68.
18. Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1 (1), 45–58.

19. Bodin, A. (1993). What Does to Assess Mean? The Case of Assessing Mathematical Knowledge. In: Niss, M. (Ed.), *Investigations into Assessment in Mathematics Education (An ICMI Study)* (113–141). Dordrecht:Springer.
20. Boero, P., & Bazzini, L. (2004). Inequalities in mathematics education: The need for complementary perspectives. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (139–143), July 14–18, 2004, Bergen, Norway: Bergen University College.
21. Bonotto, C. & Santo D.L. (2015). On the Relationship Between Problem Posing, Problem Solving, and Creativity in the Primary School. In: Singer, M. F., Ellerton, F. N. & Cai, J. (Eds.), *Mathematical Problem Posing (From Research to Effective Practice)* (103−125). New York: Springer Reference. DOI 10.1007/978-1-4614-6258-3.
22. Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. Windsor, UK: NFER–Nelson.
23. Booth, L. R. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. In: Coxford, A. F. (Ed.), *The Ideas of Algebra, K–12* (20–32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
24. Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. A. (2006). Effects of classroom instruction on student performance on, and understanding of, linear equations and linear inequalities. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(2), 113–147.
25. Verschaffel, L., Corte, E. de, Lasure, S., van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H. & Ratinckx, E. (1999). Learning to solve mathematical application problems: A design experiment with fifth graders. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(3), 195–229.
26. Вилотијевић, М. (2000). *Дидактика*. Београд: Научна књига и Учитељски факултет.
27. Vondrova, N. (2004). *Structural understanding in advanced mathematical thinking.* Retrieved May 27, 2020. from: https://www.researchgate.net/publication/40334012.
28. Вулфолк, А., Хјуз, М. & Волкап, В. (2014). *Психологија у образовању II*. Превела са енглеског Марина Вицановић. Београд: Clio.
29. Гаврилов, В. И., Михајлов, Е. Н. & Павићевић, Ж. (1990). О скупу природних бројева. *Васпитање и образовање*, 5–6, 57–60.
30. Gattegno, C. (2010). *The Common Sense of Teaching Mathematics*. New York: Educational Solutions.
31. Gereti, L. C. V. & Savioli, A. M. P. (2015). *Advanced Mathematical Thinking Processes Evidenced in Resolutions of Questions of ENADE*. Retrieved May 22, 2020. from: https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11.
32. Ginsburg, H. P., Lopez, L. S., Mukhopadhyay, S., Yamamoto, T., Willis, M. & Kelly, M. S. (1992). Assessing Understandings of Arithmetic. In: Lesh, R. A. & Lamon, S. J. (Eds.), *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics* (265–289). Washington: American Association for the Advancement of Science.
33. Ginsburg, H. P., Jacobs, S. F. & Lopez, L. S. (1993). Assessing Mathematical Thinking and Learning Potential in Primary Grade Children. In: Niss, M. (Ed.), *Investigations into Assessment in Mathematics Education (An ICMI Study)* (157–167). Dordrecht:Springer.
34. Глишић, Т., Илић, Ј. & Јадријевић Младар, Д. (2013). *Оцењивање засновано на компетенцијама у стручном образовању*. Београд: Завод за унапређивање образовања и васпитања.
35. Goldin, G. A. (1992). Toward an Assessment Framework for School Mathematics. In: Lesh, R. A. & Lamon, S. J. (Eds.), *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics* (63–88). Washington: American Association for the Advancement of Science.
36. Grapin, N. & Sayac, N. (2017). Using external assessments for improving assessment practice of primary school teachers: A first study and some methodological questions. In: Dooley, T. & Gueudet, G. (Eds.): *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education; CERME10* (3508–3516), February 1–5, 2017, Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.
37. Davies, B. (2017). A case for a new approach to establishing the validity of comparative judgement as an assessment tool for mathematics. In: Dooley, T. & Gueudet, G. (Eds.),

Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education; CERME10 (3476−3484), February 1−5, 2017, Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.
38. Davis, P. J. (1985) What do I know? A study of mathematical self-awareness. *College Mathematics Journal*, 16 (1), 22–41. DOI:10.1080/07468342.1985.11972847
39. De Lange, J. (1992). Assessing Mathematical Skills, Understanding, and Thinking. In: Lesh, R. A. & Lamon, S. J. (Eds.), *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics* (195–214). Washington: American Association for the Advancement of Science.
40. Дејић, М. & Егерић, М. (2003). *Методика наставе математике*. Јагодина: Учитељски факултет.
41. Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. In: Tall, D. (Ed.): *Advanced mathematical thinking* (25−41). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
42. Dreyfus, T. (1994). Imagery and reasoning in mathematics and mathematics education. In Robitaille, D., Wheeler, D. & Kieran, C. (Eds.), *Selected Lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education* (107−122). Sainte-Foy, Québec, Canada: Les presses de l'université Laval.
43. Duffin, J. M. & Simpson, A. P. (2000). A Search for Understanding. *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(4), 415–427. DOI:10.1016/s0732-3123(00)00028-6
44. Ђерић, И., Станчић, М. & Ђевић, Р. (2017). Квалитет наставе и постигнуће ученика у математици и природним наукама. У: Марушић Јаблановић, М., Гутвајн, Н. & Јакшић, И. (ур.), *TIMSS 2015 у Србији* (149–181). Београд. Институт за педагошка истраживања.
45. Ђерић, И., Гутвајн, Н., Јошић, С. & Шева, Н. (2020). *Национални извештај: TIMSS 2019 у Србији – преглед основних налаза*. Београд. Институт за педагошка истраживања.
46. Ђокић, О. (2017). *Реално окружење у почетној настави геометрије.* Београд: Учитељски факултет.
47. Ђорђевић, Ј. (1986). *Иновације у настави*. Београд: Просвета.
48. Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly*, 111(5), 411– 424. DOI: 10.1080/00029890.2004.11920092
49. Elia, I., Van den Heuvel–Panhuizen, M. & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM – Mathematics Education*, 41 (5), 605–618.
50. Ellerton, N. F. & Clements, M. A. (2011). Prospective Middle–School Mathematics Teachers' Knowledge of Equations and Inequalities. In: Cai, J. & Knuth, E. (Eds.). *Early Algebraization* (379–409). Berlin Heidelberg: Springer–Verlag.
51. English, L. D. (1997). The Development of Fifthgrade Children's Problem Posing Abilities. *Educational Studies in Mathematics*, 34 (3), 183−217.
52. English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29 (1), 83–106.
53. Зељић, М. (2014). *Методички аспекти ране алгебре*. Београд: Учитељски факултет.
54. Зељић, М. (2011). Методичка трансформација алгебарских садржаја у почетној настави математике (Необјављена докторска дисертација). Београд: Учитељски факултет.
55. Zhao, X., Heuvel–Panhuizen, M. & Veldhuis, M. (2017). Using classroom assessment techniques in Chinese primary schools: Effects on student achievement. In: Dooley, T., & Gueudet, G. (Eds.): *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education; CERME10* (3604–3612), February 1–5, 2017, Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.
56. Iannone P. & Simpson A. (2019). *Key aspects of teaching and learning in mathematics and statistics*. Retrieved December 26, 2020. from: https://www.researchgate.net/publication/335022008.

57. Izard, J. (1993). Challenges to the Improvement of Assessment Practice. In: Niss, M. (Ed.), *Investigations into Assessment in Mathematics Education (An ICMI Study)* (185–194). Dordrecht:Springer.
58. Јакшић, И., Марушић Јаблановић, М. & Гутвајн, Н. (2017). Чиниоци постигнућа ученика из Србије у области математике. У: Марушић Јаблановић, М., Гутвајн, Н. & Јакшић, И. (ур.), *TIMSS 2015 у Србији* (67–94). Београд. Институт за педагошка истраживања.
59. Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L. & Battey (2007). Professional Development Focused on Chidren's Algebraic Reasoning in Elementary School. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (3), 258–288.
60. Jones, J.C. (2012). *Visualizing Elementary and Middle School Mathematics Methods.* Hoboken: John Wiley & Sons.
61. Jones, I. & Inglis, M. (2015). The problem of assessing problem solving: can comparative judgement help? *Educational Studies in Mathematics*, 89, 337–355.
62. Jonassen, D. H. (1997). Instructional design model for well–structured and ill–structured problem–solving learning outcomes. *Educational Technology Research and Development*, 45 (1), 65–95.
63. Jonassen, D. H. (2000). Toward a design theory of problem solving. *Educational Technology Research and Development*, 48 (4), 63–85. DOI:10.1007/BF02300500
64. Johansson, B. (1993). Diagnostic Assessment in Arithmetic. In: Niss, M. (Ed.), *Investigations into Assessment in Mathematics Education (An ICMI Study)* (169–184). Dordrecht:Springer.
65. Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? In: Kaput, J. J., Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (5–19). New York, NY: Routledge.
66. Kaput, J. J., Blanton, M. L. & Moreno, L. (2008). Algebra From a Symbolization Point of View. In: Kaput, J. J., Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (19–56). New York, NY: Routledge.
67. Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317–326.
68. Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It?. *The Mathematics Educator*, 8 (1), 139–151.
69. Kilpatrick, J. (1993). The Chain and the Arrow: From the History of Mathematics Assessment. In: Niss, M. (Ed.), *Investigations into Assessment in Mathematics Education (An ICMI Study)* (31–46). Dordrecht:Springer.
70. Knott, L. (2010). Problem posing from the foundations of mathematics. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 7 (2–3), 413–432.
71. Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. & Stephens, A. C. (2011). Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equivalence & Variable. In: Cai, J. & Knuth, E. (Eds.). *Early Algebraization* (259–276). Berlin Heidelberg: Springer–Verlag.
72. Koleza, E. (2015). The bar model as a visual aid for developing complementary/variation problems. In: Krainer, K. & Vondrov´a, N. (Eds.): *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education; CERME9* (1940–1946), February 4–8, 2015, Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.
73. Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31 (1), 149–161.
74. Khng, K. H. & Lee, K. (2009). Inhibiting Interference from Prior Knowledge: Arithmetic Intrusions in Algebra Word Problem Solving. *Learning and Individual Differences*, 19 (2), 262–268.
75. Kwek, M. L. (2015). Using Problem Posing as a Formative Assessment Tool. In: Singer, M. F., Ellerton, F. N. & Cai, J. (Eds.), *Mathematical Problem Posing (From Research to Effective Practice)* (273−293). New York: Springer Reference. DOI 10.1007/978-1-4614-6258-3.
76. Kyriacou, C. (1995). Temeljna nastavna umijeća: metodički priručnik za uspješno poučavanje i učenje. Prevela s engleskog Božica Jakovlev. Zagreb: Educa. (Originalni rad objavljen 1991.).

77. Лазаревић, Е. (2015). *Специфичне сметње у учењу*. Београд: Институт за педагошка истраживања.
78. Lamon, S. J. & Lesh, R. (1992). Interpreting Responses to Problems with Several Levels and Types of Correct Answers. In: Lesh, R. A. & Lamon, S. J. (Eds.), *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics* (319–342). Washington: American Association for the Advancement of Science.
79. Larkin, J. H. & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, 11, 65–99.
80. Leron, U. & Dubinsky, E. (1995). An abstract algebra story. *The American Mathematical Monthly*, 102(3), 227–242. DOI: 10.2307/2975010
81. Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem − solving instruction. *The Mathematics Enthusiast*, 10 (1&2), 245−278.
82. Lesh, R. & Lamon, S. J. (1992). Assessing Authentic Mathematical Performance. In: Lesh, R. A. & Lamon, S. J. (Eds.), *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics* (17–62). Washington: American Association for the Advancement of Science.
83. Leung, S. S. & Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 9 (1), 5–24.
84. Li, J., Peng, A. & Song, N. (2011). Teaching Algebraic Equations with Variation in Chinese Classroom. In: Cai, J. & Knuth, E. (Eds.). *Early Algebraization* (529–556). Berlin Heidelberg: Springer–Verlag.
85. Lin, P.J. & Tsai, W.H. (2013). A Task Design for Conjecturing in Primary Classroom Contexts. In: Margolinas, C. (Ed.), *Proceedings of ICMI Study 22 Task Design in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 251–261). Oxford, UK.
86. Lins, R. & Kaput, J. (2004). The Early Development of Algebraic Reasoning: The Current State of the Field. In: Stacey, K., Chick, H. & Kendal, M. (Eds.), The Future of the Teaching and Learning of Algebra, *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (47–70). Boston: Kluwer Academic Publishers.
87. Lithner, J. et al. (2013). Designing tasks that enhance mathematics learning through creative reasoning. In: Margolinas, C. (Ed.), *Proceedings of ICMI Study 22 Task Design in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 223–233). Oxford, UK.
88. Максић, С., Весић, Д. & Тењовић, Л. (2017). Профил ученика који су остварили највише постигнуће у математици и природним наукама. У: Марушић Јаблановић, М., Гутвајн, Н. & Јакшић, И. (ур.), *TIMSS 2015 у Србији* (183–206). Београд. Институт за педагошка истраживања.
89. Малиновић, Т. & Малиновић Јовановић, Н. (2002). *Методика наставе математике*. Врање: Учитељски факултет.
90. Marascuilo, L. A. & Serlin, C. S. (1995). *Statistical Methods for the social and behavioral sciences*. New York: W. H. Freeman and Company.
91. Maričić, S., Špijunović, K. & Lazić, B. (2016). The Influence of Content on the Development of Students' Critical Thinking in the Initial Teaching of Mathematics. *Croatian Journal of Education*, 18 (1), 11–40.
92. Марјановић, М. (1996а). *Методика математике (први део)*. Београд: Учитељски факултет.
93. Марјановић, М. (1996б). *Методика математике (други део)*. Београд: Учитељски факултет.
94. Marjanovic, M. & Kadijevich, Dj. (2001). Linking arithmetic to algebra. In: Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. & Vincent, J. (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra (Proceedings of the ICMI Study Conference)* (425–429), December 9–14, 2001, Melbourne, Australia: The University of Melbourne.
95. Марушић Јаблановић М. (2017). TIMSS 2015: Методолошки оквир истраживања. У: Марушић Јаблановић, М., Гутвајн, Н. & Јакшић, И. (ур.), *TIMSS 2015 у Србији* (13–25). Београд. Институт за педагошка истраживања.

96. Mason, J. (2008). Making Use of Children's Powers to Produce Algebraic Thinking. In: Kaput, J. J., Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (57–95). New York, NY: Routledge.
97. Matsko, J.V. & Thomas, J. (2015). Beyond Routine: Fostering Creativity in Mathematics Classrooms. In: Singer, M. F., Ellerton, F. N. & Cai, J. (Eds.), *Mathematical Problem Posing (From Research to Effective Practice)* (125–141). New York: Springer Reference. DOI 10.1007/978-1-4614-6258-3
98. Maher, C. A., Davis, R. B. & Alston, A. (1992). A Teacher's Struggle to Assess Student Cognitive Growth. In: Lesh, R. A. & Lamon, S. J. (Eds.), *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics* (249–264). Washington: American Association for the Advancement of Science.
99. Mellone, M., Ribeiro, M. & Jakobsen, A. (2018). *Characterizing prospective teachers' knowledge in/for interpreting students' Solutions*. Retrieved May 27, 2020. from: https://www.researchgate.net/publication/331604369
100. Милинковић, Д. & Пикула, М. (2015). Математички задаци у контексту евалуације ученичких постигнућа у разредној настави. У: Маринковић, С. & Стаматовић, Ј. (ур.). *Настава и учење – евалуација васпитно – образовног рада* (373–386). Ужице: Учитељски факултет.
101. Милинковић, Ј. (1998). О вредновању математичких знања. *Настава математике,* XLIII (3), 1–6.
102. Милинковић, Ј. (2013). Аутентичне технике праћења напретка ученика у процесу наставе математике. У: Николић, Р. (ур.). *Настава и учење – квалитет васпитно образовног процеса* (513–522). Међународни научни скуп Настава и учење, 13.11.2013. Ужице: Учитељски факултет.
103. Милинковић, Ј. (2015a). Постављање проблема – нова област у методици наставе математике. У: Милинковић, Ј. & Требјешанин, Б. (ур.). *Имплементација иновација у образовању и васпитању – изазови и дилеме* (561–571). Београд: Учитељски факултет.
104. Milinković, J. (2015b). Conceptualizing Problem Posing via Transformation. In: Singer, M. F., Ellerton, F. N.& Cai, J. (Eds.), *Mathematical Problem Posing (From Research to Effective Practice)* (47–71). New York: Springer Reference. DOI 10.1007/978-1-4614-6258-3
105. Милинковић, Ј. & Дабић Боричић, М. (2018). Визуелна комуникација у настави математике. *Педагогија*, LXXIII (4), 620–635.
106. Михајловић, А. (2014). Постављање проблема у почетној настави математике. Преузето 14. септембра 2019. са: https://www.researchgate.net/publication/331210455
107. Moore, D. S. (1995). The craft of teaching. *MAA Focus*, 15 (2), 5–8.
108. McDonald, J.H. (2014). *Handbook of Biological Statistics (3rd ed.)*. Baltimore: Sparky House Publishing.
109. McNeil, N. M., Hornburg, C. B., Devlin, B. L., Carrazza, C. & McKeever, M. O. (2019). Consequences of Individual Differences in Children's Formal Understanding of Mathematical Equivalence. *Child Development*, 90 (3), 940–956.
110. National Research Council (1993). *Measuring What Counts: A Conceptual Guide for Mathematics Assessment*. Washington, DC: The National Academies Press.https://doi.org/10.17226/2235.
111. Nimac, E. (2010). Vrednovanje postignuća učenika na kognitivnom području. Preuzeto 4. decembra 2021. sa: geoskolazg.weebly.com/uploads/1/8/2/5/18250091/...
112. Обрадовић, Д. Р. & Зељић, М. Ж. (2015). Методе и стратегије решавања текстуалних задатака у почетној настави математике. *Иновације у настави*, 28 (1), 69–81.
113. Osana, P. H. & Pelczer, I. (2015). A Review on Problem Posing in Teacher Education. In: Singer, M. F., Ellerton, F. N. & Cai, J. (Eds.), *Mathematical Problem Posing (From Research to Effective Practice)* (469−493). New York: Springer Reference. DOI 10.1007/978-1-4614-6258-3.
114. Palhares, P., Vieira, L. & Gimenez, J. (2013). Order of tasks in sequences of early algebra. In: Margolinas, C. (Ed.), *Proceedings of ICMI Study 22 Task Design in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 243–251). Oxford, UK.

115. Пешикан, А. (2015). Школски задаци за ефикасно учење. У: Маринковић, С. & Стаматовић, Ј. (ур.). *Настава и учење – евалуација васпитно–образовног рада* (13–28). Ужице: Учитељски факултет.
116. Pilet, J. & Horoks, J. (2017). Assessment in mathematics as a lever to promote students' learning and teachers' professional development. In: Dooley, T. & Gueudet, G. (Eds.): *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education; CERME10* (3572–3579), February 1–5, 2017, Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.
117. Пинтер, Ј., Крекић, В. & Ћетковић, А. (2002). *Методички приручник из математике за разредну наставу*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
118. Pollitt, A. (2012). The method of adaptive comparative judgement. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 19 (3), 281−300.
119. Polya, G. (1973). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
120. Popper, K. (1962). *Conjectures and refutations: The growth of scientific knowledge*. New York, NY: Routledge.
121. Prabhu, V. & Czarnocha, B. (2015). Problem–Posing/Problem–Solving Dynamics in the Context of a Teaching–Research and Discovery Method. In: Singer, M. F., Ellerton, F. N. & Cai, J. (Eds.), *Mathematical Problem Posing (From Research to Effective Practice)* (355–373). New York: Springer Reference. DOI 10.1007/978-1-4614-6258-3
122. Правилник о начину оцјењивања ученика у основној школи (2019), Службени лист ЦГ, бр. 062/19 од 12. 11. 2019. Преузето 14. децембра 2020. са www.skolskiportal.edu.me
123. Rachlin, S. L. (1989). Using Research to Design a Problem–Solving Approach for Teaching Algebra. In: Ong, S. T. (Ed.), *Proceedings of the 4th Southeast Asian Conference on Mathematical Education* (156–161). Singapore: Singapore Institute of Education.
124. Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice–oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 51–73. DOI: 10.1207/s15327833mtl0701_4
125. Reit, X. R. (2017). Towards an empirical validation of mathematics teachers' intuitive assessment practice exemplified by modelling tasks. In: Dooley, T. & Gueudet, G. (Eds.): *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education; CERME10* (3588–3596), February 1–5, 2017, Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.
126. Reynaldo, J. & Santos, A. (1999). Cronbach's Alpha: A Tool for Assessing the Reliability of Scales. *The Journal of Extension*, 37 (2). Retreived from http://www.joe.org/joe/1999april/index.php May, 2020.
127. Riyanto, B., Zulkardi, Z. Putri, R. I. I. & Darmawijoyo, D. (2017). Mathematical modeling in realistic mathematics education. *Journal of Physics: Conference Series.* 943, 1−7. DOI :10.1088/1742-6596/943/1/012049.
128. Romberg, T. A. (1993). How One Comes to Know: Models and Theories of the Learning of Mathematics. In: Niss, M. (Ed.), *Investigations into Assessment in Mathematics Education (An ICMI Study)* (97–111). Dordrecht:Springer.
129. Rosli, R., Goldsby, D. & Capraro, M. M. (2013). Assessing Students' Mathematical Problem–Solving and Problem–Posing Skills. *Asian Social Science*, 9 (16), 54–60.
130. Rosli, R. et al. (2015). Middle Grade Preservice Teachers' Mathematical Problem Solving and Problem Posing. In: Singer, M. F., Ellerton, F. N. & Cai, J. (Eds.), *Mathematical Problem Posing (From Research to Effective Practice)* (333–355). New York: Springer Reference. DOI 10.1007/978-1-4614-6258-3
131. Russell, S. J., Schifter, D. & Bastable, V. (2011). Developing Algebraic Thinking in the Context of Arithmetic. In: Cai, J. & Knuth, E. (Eds.). *Early Algebraization* (43–70). Berlin Heidelberg: Springer–Verlag.
132. Selden, A. & Selden, J. (2005). Perspectives on Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning* 7 (1), 1−13. DOI: 10.1207/s15327833mtl0701_1
133. Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.

134. Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19−28.
135. Silver, E. A., & Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics*. 12 (3), 129–135.
136. Singer, F. M. (2009). The dynamic infrastructure of mind – A hypothesis and some of its applications. *New Ideas in Psychology*, 27 (1), 48–74.
137. Singer, F. M., Ellerton, N., Cai, J. & Leung, E. C. K. (2011). Problem Posing in Mathematics Learning and Teaching: a Research Agenda. In: Ubuz, B. (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, 137–166. Ankara, Turkey: PME.
138. Singer, M. F. & Voica, C. (2015). Is Problem Posing a Tool for Identifying and Developing Mathematical Creativity? In: Singer, M. F., Ellerton, F. N. & Cai, J. (Eds.), *Mathematical Problem Posing (From Research to Effective Practice)* (140–175). New York: Springer Reference. DOI 10.1007/978-1-4614-6258-3
139. Skemp, R. (2002). Relational Understanding and Instrumental Understanding. In: Tall, D. & Thomas, M. (Eds.): *Intelligence, learning and understanding in mathematics: a tribute to Richard Skemp*, (1−16), Flaxton : Post Pressed.
140. Спасић, Р. (2013). Оцењивање, у: Lorin W. Anderson (ур.), *Настава оријентисана на учење*, (161–189), Београд: Центар за демократију и помирење у југоисточној Европи.
141. Станојевић, Д. & Милинковић, Ј. (2013). *ТИМСС 2011. Математика: преглед наставног програма и збирка задатака за 4. разред*. Београд: Институт за педагошка истраживања.
142. Стевановић, Ј. & Ивковић, Б. (2017). Значај језичке компетенције за постигнуће ученика из математике и природних наука. У: Марушић Јаблановић, М., Гутвајн, Н. & Јакшић, И. (ур.), *TIMSS 2015 у Србији* (207–219). Београд. Институт за педагошка истраживања.
143. Stoyanova, E. N. (1997). Extending and exploring students' problem solving via problem posing (doctoral dissertation). Retrieved May 27, 2019. from https://ro.ecu.edu.au/theses/885
144. Streefland, L. (1992). Thinking Strategies in Mathematics Instruction: How Is It Possible? In: Lesh, R. A. & Lamon, S. J. (Eds.), *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics* (215–246). Washington: American Association for the Advancement of Science.
145. Suurtamm, C., Thompson, D. R., Kim, R. Y., Moreno, L. D., Sayac, N., Schukajlow, S., et al. (2016). Assessment in Mathematics Education: Large–Scale Assessment and Classroom Assessment. In: Kaiser, G. (Series ed.), *Part of the series ICME–13* (1–36). Hamburg: Springer Open. DOI: 10.1007/978-3-319-32394-7_1.
146. Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), 1–36.
147. Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4–14.
148. Schifter D., Monk S., Russell, S. J. & Bastable, V. (2008). Early Algebra: What Does Understanding the Laws of Arithmetic Mean in the Elementary Grades? In: Kaput, J. J., Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (413–449). New York, NY: Routledge.
149. Schoenfeld, A. H. (2008). Early Algebra as Mathematical Sense Making. In: Kaput, J. J., Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (479–511). New York, NY: Routledge.
150. Sun, Y. & Suzuki, M. (2013). Diagnostic Assessment for Improving Teaching Practice. *International Journal of Information and Education Technology*, 3 (6), 607–610.
151. Swan, M. (1993). Improving the Design and Balance of Mathematical Assessment. In: Niss, M. (Ed.), *Investigations into Assessment in Mathematics Education (An ICMI Study)* (195–216). Dordrecht:Springer.
152. Tall, D. (1996a). *Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking*. Retrieved May 22, 2020. from: https://www.researchgate.net/publication/307927776

153. Tall, D. (1996b). *Advanced Mathematical Thinking & The Computer*. Retrieved May 22, 2020. from: https://www.researchgate.net/publication/228817138
154. Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151–169.
155. Teledahl, A. (2017). Mathematics teachers' assessment of accounts of problem solving. In: Dooley, T., & Gueudet, G. (Eds.): *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education; CERME10* (3596−3604), February 1−5, 2017, Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.
156. Тодоровић, Д. (2016). *Методологија психолошких истраживања, (треће издање)*. Београд: Центар за примењену психологију.
157. Требјешанин, Б. (2012). *Теоријско–методолошке оријентације у проучавању мотивације за учење и њихове практичне импликације* (Theoretical and metothodological tendencies in the study of learning motivation and their practical implications). Theoretical and practical dimensions of contemporary education. Selected issues. Nowy Sacz: State higher vocational school & Belgrade: Faculty of teacher education.
158. Требјешанин, Б. (2015). *Дидактичко–методичка подршка учењу и развоју у уџбеницима за млађи основношколски узраст*. Уводно излагање на скупу међународног значаја одржаног на Учитељском факултету у Београду.
159. Tsamir, P., Almog, N., & Tirosh, D. (1998). Students' solutions to inequalities. In A. Oliver & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 129–136). Stellenbosch, South Africa: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
160. Florida Department of Education (2010). *Classroom Cognitive and Meta–Cognitive Strategies for Teachers: Research–Based Strategies for Problem–Solving in Mathematics K–12*. Tallahassee, FL: Florida Department of Education.
161. Franke, M. L., Carpenter, T. P. & Battey, D. (2008). Content Matters: Algebraic Reasoning in Teacher Professional Development. In: Kaput, J. J., Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (333–361). New York, NY: Routledge.
162. Franke, T. H., Ho, T. & Christie, C. A. (2012). The Chi-Square Test: Often Used and More Often Misinterpreted. *American Journal of Evaluation*, 33(3), 448–458.
163. Henningsen, M. & Stein, M.K. (1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom–Based Factors That Support and Inhibit High–Level Mathematical Thinking and Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*. 28 (5), 524–549.
164. Hiebert, J. et al. (1997). *Making Sense: Teaching and Learning Mathematics with Understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.
165. Hunjek, M. (2015). Vrednovanje kao strategija učenja matematike (Neobjavljen master rad). Zagreb; Prirodno–matematički fakultet.
166. Cai, J. (1998). Developing Algebraic Reasoning in the Elementary Grades. *Teaching Children Mathematics*, 5 (4), 225–229.
167. Cai, J. (2003). Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: an exploratory study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34 (5), 719–737. DOI:10.1080/00207390310001595401
168. Cai, J., & Moyer, J. (2008). Developing Algebraic Thinking in Earlier Grades: Someinsights from International Comparative Studies. In: Greenes, C. & Rubenstein, R. (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics* (169–180). Reston, VA: NCTM.
169. Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N. & Nie, B. (2011). Examining Students' Algebraic Thinking in a Curricular Context: A Longitudinal Study. In: Cai, J. & Knuth, E. (Eds.). *Early Algebraization* (161–186). Berlin Heidelberg: Springer–Verlag.
170. Carpenter, T. P., Madison, L. L., Franke, M. L. & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking. *ZDM*, 37 (1), 53–59.

171. Carraher, D. W., Schliemann, A. D. & Schwartz, J. L. (2008). Early Algebra Is Not the Same as Algebra Early. In: Kaput, J. J., Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (235–273). New York, NY: Routledge.
172. Церовић, Б. (2001). *Математика*. Подгорица: Универзитет Црне Горе.
173. Crespo, S. (2015). A Collection of Problem–Posing Experiences for Prospective Mathematics Teachers that Make a Difference. In: Singer, M. F., Ellerton, F. N. & Cai, J. (Eds.), *Mathematical Problem Posing (From Research to Effective Practice)* (493–512). New York: Springer Reference. DOI 10.1007/978-1-4614-6258-3
174. Crespo, S., & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11 (5), 395–415.
175. Cronbach, L. J., Gleser, G. C., Nanda, H. & Rajaratnam, N. (1972). *The Dependability of Behavioral Measurments: Theory of Generalizability of Scores and Profiles*. New York: Wiley.
176. Cusi, A., Morselli, F. & Sabena, C. (2017). Designing and analysing the role of digital resources in supporting formative assessment processes in the classroom: The helping worksheets. In: Dooley, T. & Gueudet, G. (Eds.): *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education; CERME10* (3452–3460), February 1–5, 2017, Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.
177. Chanudet, M. (2017). Teachers' formative assessment practices: The case of an IBME–centered course. In: Dooley, T. & Gueudet, G. (Eds.): *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education; CERME10* (3436–3444), February 1–5, 2017, Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.
178. Чутура, И. & Вуловић, Н. (2016). Формулисање текстуалних задатака на основу математичких израза у четвртом разреду основне школе. *Зборник Института за педагошка истраживања*, 48 (1), 106–126.
179. Џиновић, В. & Вујачић, М. (2017). Самоуверења ученика о компетентности у математици и природним наукама. У: Марушић Јаблановић, М., Гутвајн, Н. & Јакшић, И. (ур.), *TIMSS 2015 у Србији* (115–127). Београд. Институт за педагошка истраживања.
180. Шевкушић, С. & Картал, В. (2017). Постигнуће ученика из природних наука: главни налази, трендови и наставни програм. У: Марушић Јаблановић, М., Гутвајн, Н. & Јакшић, И. (ур.), *TIMSS 2015 у Србији* (51–65). Београд. Институт за педагошка истраживања.
181. Шпијуновић, К. & Маричић, С. (2015). Оцењивање у почетној настави математике усмерено на развој и напредовање ученика. У: Маринковић, С. & Стаматовић, Ј. (ур.). *Настава и учење – евалуација васпитно–образовног рада* (347–356). Ужице: Учитељски факултет.
182. Wang, X. (2015). The Literature Review of Algebra Learning: Focusing on the Contributions to Students' Difficulties. *Creative Education*, 6 (2), 144–153.
183. Wiliam, D. (2011). What is assessment for learning? Studies in Educational Evaluation. 37 (1) , 3-14. DOI:10.1016/j.stueduc.2011.03.001
184. Wheeler, D. (1993). Epistemological Issues and Challenges to Assessment: What is Mathematical Knowledge? In: Niss, M. (Ed.), *Investigations into Assessment in Mathematics Education (An ICMI Study)* (87–95). Dordrecht:Springer.

VII ПРИЛОЗИ

Прилог 1. Иницијални тест
Група А

Задаци:

1. а) Напиши цифрама осамсто педесет шест хиљада шездесет пет _____

   б) Дате бројеве напиши у облику вишеструке декадне јединице.

   $7 \cdot 10^2 =$ _____

   $15 \cdot 10^4 =$ _____

   $147 \cdot 10^6 =$ _____

2. Поређај од највећег до најмањег ове бројеве: 15 000, 14 864 100, 3 009, 25, 175 200.

   _____

3. Умјесто * упиши одговарајуће цифре тако да добијеш тачну разлику.

```
   9*1  *2*
–        6*7
  *0*  323
```

4. а) Како је промијењен збир ако се један сабирак повећао за 100, а други остао непромијењен?

   _____

   б) Ако је $x - y = 95\,300$ израчунај $(x - 200) - y$.

   $(x - 200) - y =$ _____

5. Допуни, тако да једнакост буде тачна.

   32 751 + 51 812 = 84 563
   (32 751+ _____) + (51 812 – 1 345) = 84 563

6. На основу слике постави једначину и ријеши.

15 100	
x	**9 100**

_____
_____
_____
_____

Састави један текстуални задатак који одговара слици.

_____
_____
_____

7. Одреди решења неједначине у скупу N_0.
   $x - 25\ 300 < 15\ 200$

8. Укупна производња вина у Црној Гори за три године, 2009., 2010. и 2011.годину је 467 985 hl.

У 2009. и 2011. год. произведено је 288 120 hl вина, а у 2010. и 2011. год. 297 044 hl. Израчунај колико је литара вина произведено за сваку годину посебно (1 *hl* =100 *l*).

467 985 hl		
2009	2010	2011
	297 044 hl	

2009. год. _____

2010. год. _____

2011. год. _____

9. Напиши израз који је 5 пута већи од израза 90−n _____

   Напиши израз који је 5 пута мањи од израза 90−n _____

10. Запиши израз који је за 200 већи од израза 3·15 _____

Прилог 2. Иницијални тест
Група Б

Задаци:

1. а) Напиши цифрама четиристо четири хиљаде четиристо четрдесет _____

   б) Дате бројеве напиши у облику вишеструке декадне јединице.

   $5 \cdot 10^2 =$ _____

   $12 \cdot 10^4 =$ _____

   $103 \cdot 10^6 =$ _____

2. Поређај од најмањег до највећег ове бројеве: 5 256 000, 14 000, 2 009, 175 200, 303.

   _____

3. Умјесто * упиши одговарајућу цифру тако да добијеш тачну разлику.

```
  *70  0**
-   * *68
  4*0  245
```

4. а) Како је промијењена разлика ако је умањилац повећан за 100, а умањеник остао непромијењен?

   _____

   б) Ако је $a+b=$ 52 300, израчунај $(a-200) + b$.

   $(a-200) + b =$ _____

5. Допуни, тако да једнакост буде тачна.

   75 647 – 28 328 = 47 219
   (75 647 + 18 437) – (28 328 + _____) = 47 219

6. На основу дате слике напиши једначину и ријеши.

12 500	
8 500	***x***

_____
_____
_____
_____

Састави један текстуални задатак који одговара слици.

_____
_____
_____

7. Одреди решења неједначине у скупу N_0.

$$19\ 800 - x > 15\ 400$$

8. У Европи за 2017. годину, укупна годишња продаја аутомобила бренда Шкоде, Тојоте и Аудија је 1 689 017, од чега је продато 1 165 527 аутомобила Шкоде и Аудија, а 1 160 609 аутомобила Тојоте и Аудија. Израчунај колика је годишња продаја аутомобила за сваки бренд посебно (Шкода, Тојота, Ауди).

1 689 017		
Ауди	Тојота	Шкода
1 160 609		

Шкода	
Ауди	
Тојота	

9. Напиши израз који је 3 пута већи од израза 40+n _____

   Напиши израз који је 3 пута мањи од израза 40+n _____

10. Запиши израз који је за 100 већи од израза 5·10 _____

Прилог 3. Финални тест 1

Група А

Задаци:

1.Израчунај на најлакши начин:

а) $250 \cdot 3 =$

б) $4\,148 \cdot 29 - 4\,148 \cdot 19 =$

в) $23\,760 \cdot 101 =$

г) $10^2 \cdot 2^3 + 5^1 \cdot 4^2 =$

2.Из пристаништа испловили су истовремено у сусрет један другом теретни и путнички брод. Теретни брод пловио је брзином 37 km 200 m, а путнички 42 km 800 m. Колико је растојање између два пристаништа, ако су се теретни и путнички брод срели послије 5 сати вожње?

3.Теретни брод превози 37 контејнера банана и 27 контејнера јабука. У сваком контејнеру може да стане терет 1 t 300 kg.

а) Чега се више превезе и за колико килограма?

б) Колика је укупна вриједност превезеног воћа, ако је 100 килограма банана 100 €, а 10 килограма јабука 5 € (500 центи)?

4.а) На првом спрату путничког брода има 120 прозора, на другом 160, а на трећем спрату 200 прозора. Колико је прозора на седмом спрату, ако се на сваком спрату број прозора повећава за исту вриједност у односу на претходни спрат?

Спрат	Број прозора	Правило
1.	120	80 + 1·
2.	160	80 +__ ·__
3.	200	
⋮		
7.		

б) Путнички брод за 1 минут прелази 700 m, а теретни за исто вријеме 500 m. Послије колико минута ће путнички брод стићи теретни, **ако је теретни брод кренуо 6 минута раније**?

5.За дати израз састави текстуални задатак и ријеши: 25 924 · 365 – 25 924 · 7.

Прилог 4. Финални тест 1

Група Б

Задаци:

1. Израчунај на најлакши начин:

   а) $125 \cdot 5 =$

   б) $5\,379 \cdot 28 - 5\,379 \cdot 18 =$

   в) $79\,340 \cdot 101 =$

   г) $10^3 \cdot 7^1 - 5^2 \cdot 2^2 =$

2. Два камиона кренула су истовремено из мјеста А и В један другом у сусрет. Први камион прелази за 1 сат просјечно 63 km 500 m, а други 70 km 200 m. Колико је растојање између ова два мјеста ако се возила сретну послије 5 сати вожње?

3. За изградњу зграде допремљено је 27 камиона пијеска и 17 камиона цимента. Сваки камион превози 23 t 500 kg.
   а) Колико је килограма пијеска више допремљено од цимента?

   б) Израчунај укупну вриједност материјала, ако је 100 kg цимента 10€, а 50 kg пијеска 2€ (200 центи)?

4. а) Фабрика за производњу гума „Michelin Group“ мјесечно је производила 500 000 гума. Са отварањем новог погона, производња гума је сваког мјесеца увећана за 50 000 гума у односу на претходни мјесец. У јануару произведено 550 000 гума, фебруару 600 000 гума. Колико је гума произведено у августу?

Мјесец	Производња гума	Правило
Јануар	550 000	500 000 + 1 · 50 000
Фебруар	600 000	500 000 + ___ ·____
Март	270	
⋮		
Август		

б) Камион за 1 минут прелази 600 m, а аутобус 800 m. Послије колико минута ће аутобус стићи камион, **ако је камион кренуо 5 минута раније**?

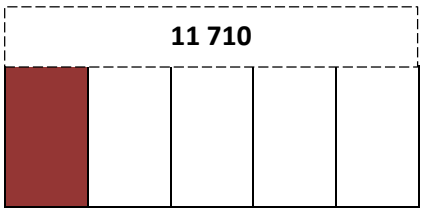
5. За дати израз састави текстуални задатак и ријеши: 18 850 · 365 + 18 850 · 7.

Прилог 5. Финални тест 2

Група А

Задаци:

1. а) На основу слике израчунај вриједност осјенченог дијела фигуре.



Рјешење:

Одговор: Вриједност осјенченог дијела фигуре је _____ .

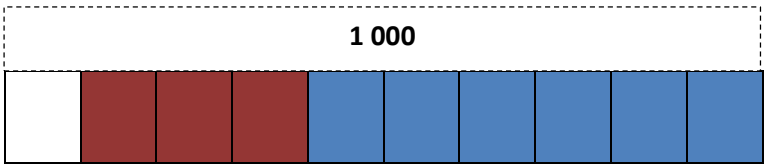
б) Основна школа „Милија Никчевић“ има 822 ученика. Сви ученици су расподијељени по одјељењима, тако да у сваком одјељењу има у просјеку по 25 ученика. Колико је одјељења у школи?

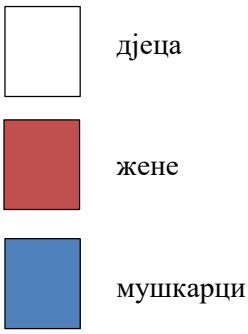
Укупан број ученика:_____ Број одјељења:

Основна школа „Милија Никчевић“ има _____ одјељења, јер _____

_____

2. Олимпијски базен у Никшићу има гледалиште са 1 000 мјеста. На основу слике израчунај колико је дјеце, колико жена, а колико мушкараца, ако су у гледалишту попуњена сва мјеста?



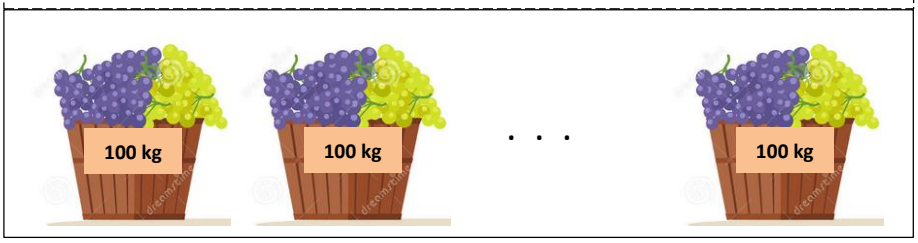


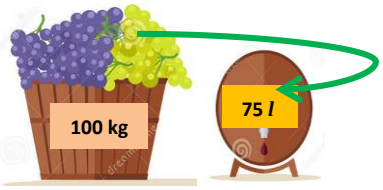
Одговор:_____

_____

3. У 2018.години компанија „13. јул – Плантаже“ произвела је 19 700 t винског грожђа. Од 100 kg грожђа добија се просјечно 75 *l* вина.
   а) Колико се може произвести вина од свог винског грожђа?

19 700 t = _____ **kg**





Рјешење:

Одговор: Од 19 700 t добија се _____

б) Ако се за производњу вина употреби половина побраног грожђа, производња вина је:
а) иста б) за 75 *l* већа в) 2 пута мања г) 2 пута већа.
(Заокружи тачан одговор.)

4. Користећи сталност количника израчунај количник бројева ***a*** и ***b***, за $\boldsymbol{a = 23 \cdot 10^2}$ и $\boldsymbol{b = 5^2}$ а затим попуни табелу.

Количник бројева ***a*** и ***b***: _____

$a : b$	$(a \cdot 10^2) : b$	$a : (b \cdot 2)$	$(a \cdot 2) : (b \cdot 2)$	$(a \cdot 10^2) : (b : 2)$
_____				

5. а) На основу слике напиши текст задатка и ријеши.

520 000				
?				170 400

_____
_____
_____
_____
_____

Рјешење:

б) За дати израз постави текст задатка и прикажи његово рјешење.

$(450 \cdot 10^3 + 900) : 45$

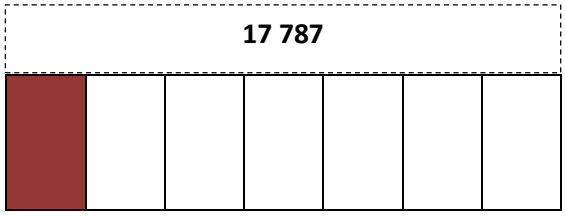
Рјешење:

Прилог 6. Финални тест 2

Група Б

Задаци:

1. На основу слике израчунај вриједност осјенченог дијела фигуре.



Рјешење:

Вриједност осјенченог дијела фигуре је _____ .

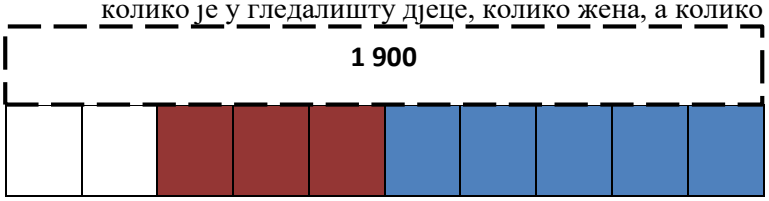
б) Основна школа „Лука Симоновић“ има 702 ученика. Сви ученици су расподијељени по одјељењима, тако да у сваком одјељењу има у просјеку по 22 ученика. Колико је одјељења у школи?

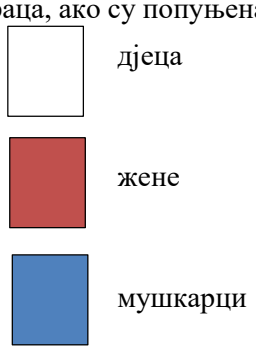
Укупан број ученика: _____ Број одјељења:

Основна школа „Лука Симоновић“ има _____одјељ., јер _____

_____

2. Олимпијски базен у Подгорици има гледалишта са 1 900 мјеста. На основу слике израчунај колико је у гледалишту дјеце, колико жена, а колико мушкараца, ако су попуњена сва мјеста?



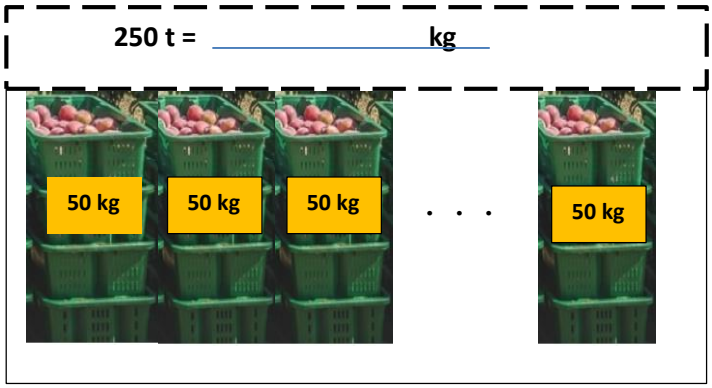


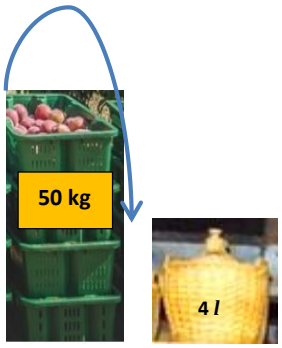
Одговор:_____

_____

3. У првој берби брескви компанија „13. јул – Плантаже“ имала је принос од 250 t. Све побране брескве су намијењене за производњу ракије бресковаче.

а) Ако се од 50 kg брескви добија 4 *l* ракије, колико се литара ракије произведе?





Рјешење:

Одговор: Од 250 t брескви добија се _____

б) Ако се берба брескви удвостручи, производња ракије се:

а) увећа за 4 *l* б) увећа 20 пута в) умањи 2 пута г) увећа 2 пута.

(Заокружи тачан одговор.)

4.Користећи сталност количника израчунај количник бројева ***a*** и ***b***, за ***a*** = $37 \cdot 10^3$ и ***b*** = 20, а затим попуни табелу.

Количник бројева ***a*** и ***b***: _____

a : b	***(a ·10) : b***	***a : (b · 10)***	***(a · 10) : (b · 10)***	***(a · 10^2) : (b : 10)***
_____				

5.На основу слике напиши текст задатка, а затим ријеши постављени задатак.

315 000				
90 000		**?**		

_____
_____
_____
_____
_____

Рјешење:

б) За дати израз постави текст задатка и прикажи његово рјешење.

$(13\ 000 + 42 \cdot 10^2) : 20$

Рјешење:

Прилог 7. Финални тест 3

Група А

Задаци:

1. а) На основу слике постави и ријеши једначину.

16 420				
x	x	x	x	x

_____ · x = 16 420

_____

_____

_____

б) За постављену једначину покушај да осмислиш текст задатка.

_____

_____

_____

2. а) Посматрај слику и упиши шта недостаје, а затим у скупу N_0 ријеши неједначину.

Производ је 1 421						
x	x	x	x	x	x	x

7 · _____ = 1 421

Производ је мањи од 1 421						
x	x	x	x	x	x	x

На основу података са схеме допуни следеће реченице.

Да би вриједност израза _____ била _____ од 1 421, вриједност промјењивог чиниоца треба да се _____ . То је правило зависности производа од промјене _____ .

7 · _____ < 1 421

_____

_____

$x \in$ _____

б) За постављену неједначину покушај да осмислиш текст задатка.

_____

_____

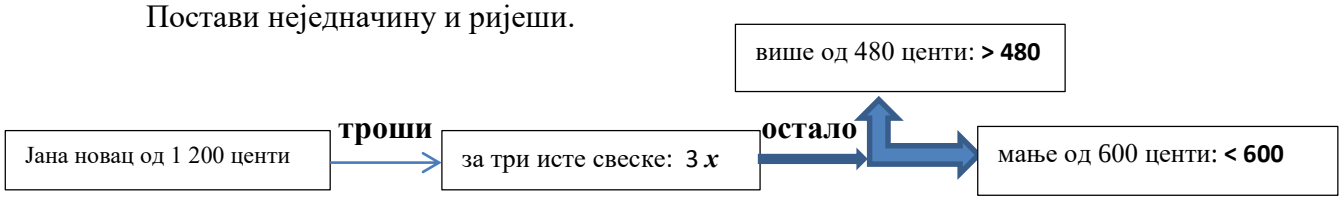
_____

3. Табела приказује број анкетираних ученика о томе који спорт тренирају. Израчунај колико анкетираних ученика тренира фудбал?
Постави и ријеши једначину.

	Спорт			
	ватерполо	**фудбал**	**кошарка**	**Укупно**
Број анкетираних ученика	x	4 пута више од ватерпола _____	ватерполо и фудбал заједно _____	1 600

Одговор: Фудбал тренира _____

4. Јана је од мајке добила 1 200 центи и купила је 3 исте свеске, тако да јој је остало више од 480 а мање од 600 центи. Која је најмања, а која највећа цијена једне свеске?
Постави неједначину и ријеши.



Одговор: Најмања цијена свеске је _____, а највећа _____ .

5. а) Дату једначину прво ријеши, а затим састави њој одговарајући текст.

$25 \cdot x - 10\,000 = 15\,000$ → разлика Непозната x је елеменат _____ .

_____ _____

$25 \cdot x =$ _____

_____

_____

_____

Текст задатка:

б) Дату неједначину прво ријеши у скупу N, а затим састави њој одговарајући текст.

$y \cdot 15 + 120 \leq 1020$

_____

_____

_____

_____

_____

Текст задатка:

Прилог 8. Финални тест 3

Група Б

Задаци:

1. а) На основу слике постави и ријеши једначину.

23 009						
x	x	x	x	x	x	x

____ · x = **23 009**

_____

_____

_____

б) За постављену једначину покушај да осмислиш текст задатка.

_____

_____

_____

2. а) Посматрај слику и упиши шта недостаје, а затим у скупу N_0 ријеши неједначину.

Производ је 3 425				
x	x	x	x	x

____ · x = _____

Производ је већи од 3 425				
x	x	x	x	x

____ · x ____ 3 425

_____

_____

$x \in$ _____

На основу података са схеме допуни следеће реченице.

Да би вриједност израза _____ била _____ од 3 425, вриједност промјенљивог чиниоца треба да се_____.То је правило зависности производа од промјене _____ .

б) За постављену неједначину покушај да осмислиш текст задатка.

_____

_____

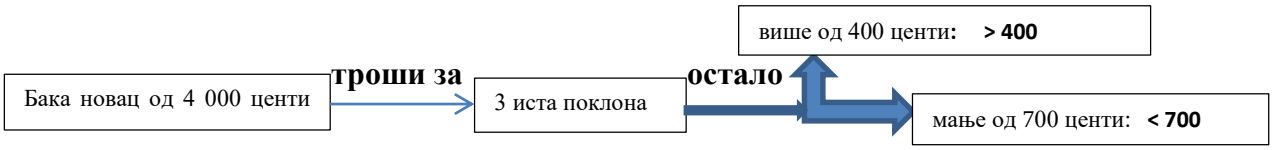
_____

3. Табела приказује број анкетираних ученика о предмету који највише воле. Израчунај колико анкетираних ученика воли математику?
Постави и ријеши једначину.

	Предмет			
	Енглески језик	**Математика**	**Физичко васпитање**	**Укупно**
Број анкетираних ученика	x	4 пута више од енглеског језика _____	заједно енглески језик и математика _____	1 200

Одговор: Математику највише воли _____ .

4. Бака је од 4 000 центи за 3 унука купила исти поклон, тако да јој је остало више од 400, а мање од 700 центи. Колика је највећа, а колика најмања цијена једног поклона? Постави неједначину и ријеши.



Одговор: Најмања цијена поклона је _____ , а највећа _____ .

5. а) Дату једначину прво ријеши, а затим састави њој одговарајући текст.

$\mathbf{1\,000 - 15 \cdot x = 40}$ → разлика Непозната x је елемент _____ .

_____ _____

$15 \cdot x =$ _____

_____

_____

_____

Текст задатка:

б) Дату неједначину прво ријеши у скупу N,а затим састави њој одговарајући текст.

$8 \cdot y + 240 \leq 1\,600$

_____

_____

_____

_____

_____

Текст задатка:

Прилог 9: Наставни листићи за учење

МНОЖЕЊЕ ДЕКАДНОМ ЈЕДИНИЦОМ. МНОЖЕЊЕ ЈЕДНОЦИФРЕНИМ БРОЈЕМ

Припремни задаци:

Примјер 1.

Попуни табелу.

3 · 2 =	**8 · 5 =**
3 · 20 =	**8· 50 =**
3 · 22 =	**8 · 55 =**
3 · 220 =	**8 · 550 =**
3 · 222 =	**8 · 555 =**

Примјер 2. Вриједност следећег израза одреди само једним множењем.

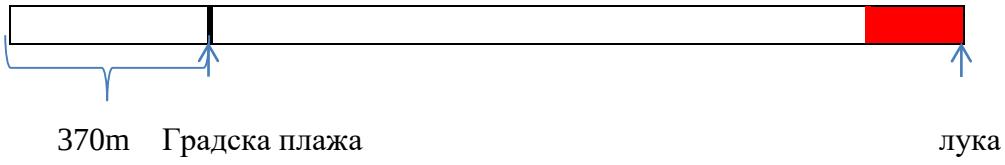
452 · 5 – 452 · 3 =

Проблемски задаци:

1. Димитрије свакодневно плива од градске плаже до луке и назад. Лука је од градске плаже удаљена 1 250m. Ако суботом и недјељом Димитрије не плива, колико километара преплива:
а) седмично
б) за 4 седмице?

2. Путнички брод дневно прелази 102 пута већу раздаљину од удаљености градске плаже од луке. Колико километара путнички брод пређе за 10 дана?

3. Купачима је забрањено пливање на 120m од луке, гдје су постављене бове. Димитрије је одлучио да пливање започиње на ближој
обали која је 370m удаљенија од претходне. Колико Димитрије преплива за једну седмицу, ако плива до постављених бова и назад?



4. Димитрије за 3 минута преплива 150m а његова сестра за исто вријеме120m. Послије колико минута ће Димитрије стићи сестру, ако је она кренула 5 минута раније?

5. За дати израз састави текстуални задатак и ријеши:
125km 850m − 8km 942m·10.

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛАН РАД

1. Попуни табелу.

7 · 6 =	**9 · 10 =**
70 · 6 =	**90 · 10 =**
77 · 6 =	**19 · 10 =**
770 · 6 =	**109 · 10 =**
777 · 6 =	**190 · 10 =**

2. Из куће у исто вријеме кренули су у школу Милош и Андреј. Милош за 5 минута пређе 520m, а Андреј за исто вријеме 430m.
   а) Колико је метара Милошу удаљена школа, ако је у школу стигао за 10 минута уједначеног хода?
   б) Колико је метара Андреју удаљена кућа од школе ако је у школу стигао за 15 минута уједначеног хода?
   в) Коме је удаљенија школа од куће и за колико метара?

3. Милош и Андреј су рачунали да за једну седмицу приближно око 28 km заједно пређу на путу од куће до школе, укључујући и суботу када одлазе на тренинг који се одржава у школској сали. Израчунај колико метара седмично Милош и Андреј заједно пређу на путу од куће до школе?

4. Књижара је од школе удаљена 200m и Милош једном седмично купује неопходни прибор за рад, а Андреј 2 пута. Колико метара, од куће до књижаре, Милош и Андреј пређу за 10 седмица?

5. Вриједност следећих израза одреди само једним множењем:

а) 2 347 · 7 – 2347 · 6
б) 48 291· 19 – 48 291 · 9
в) 84 567 · 520 – 84 567 · 20.

МНОЖЕЊЕ ВИШЕЦИФРЕНОГ БРОЈА ДВОЦИФРЕНИМ И ТРОЦИФРЕНИМ БРОЈЕМ

Припремни задаци:

Примјер 1

Колико километара авион прелети за 7 сати ако за 1 сат прелети 1 070km?
Колико ће километара авион прелетјети за 14 сати?

Примјер 2

Вриједност следећег израза одреди само једним множењем:
а) 71 815 · 29 – 71 815 · 19;
б) 84 567 · 520 – 84 567 · 20.

Проблемски задаци:

1. За 5 дана аутобус је прешао 456 km. Колико метара пута аутобус пређе за 120 дана, ако је иста дневна километража?

2. Аутобус и аутомобил су истовремено кренули из Никшића за Београд. Аутобус за 1 сат просјечно прелази 65 km 500m, а аутомобил 82 km 250 m.

а) Колико је растојање између аутобуса и аутомобила послије 5 сати вожње?

б) Ко је ближи Београду, аутобус или аутомобил, ако је Београд од Никшића удаљен 450km?

в) Колико годишње аутобус прелази на путу од Никшића до Београда. Не рачуна се 7 дана празника током године. Дужину пута изразити у метрима. (Година има 365 дана.)

3. Авион за 1 сат прелази 14 пута већу раздаљинуод просјечне дужине пута коју аутомобил прелази за исто вријеме. Колико метара авион прелази за годину дана. Не рачуна се 7 дана празника током године. Дужину пута изразити у метрима. (Година има 365 дана.)

Колико просјечно годишње авион окружи планету Земљу, ако је обим Земље по еквадору 40 075 km?

4. Аутобус на 100 km троши 20 *l* горива, а аутомобил 10 *l*.

а)Колико горива потроше аутобус и аутомобил послије 10 000 km заједничке вожње?
б) Колико новца је потребно за гориво ако је литар нафте 1, 26 €?

5. Аутобус за 1 минут прелази 800 m, а аутомобил 1 200 m. Послије колико минута ће аутомобил стићи аутобус, ако је аутобус кренуо 3 минута раније?

6. За дати израз састави текстуални задатак и ријеши:
25 850 · 435 − 25 850 · 25.

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛАН РАД

1. Израчунај на најлакши начин:
   а) 27 543 · 39 – 27 543 · 29;
   б) 57 395 · 150 – 57 395 · 50.

2. За 4 дана фабрика је произвела 355 трактора. Колико трактора фабрика произведе за 52 дана, ако је дневна производња иста?

3. Два трактора су истовремено кренула из села у град. Трактор са приколицом за 1 сат просјечно пређе 17km 400m, а трактор без приколице 23 km 200 m. Колико је растојање између ова два трактора послије 4 сата вожње? Који трактор је ближи граду и за колико метара, ако је град од села удаљен 98 km?

4. Трактор са приколицом на 50 km троши 25 *l* горива, а трактор без приколице 17 *l*. Колико горива потроше оба трактора на 150 km?
   Колико је новца потребно за гориво ако је литар нафте 1, 26 €?

5. Трактор са приколицом за 1 минут прелази 350 m, а трактор без приколице 550 m. Послије колико минута ће трактор без приколице стићи трактор са приколицом, ако је трактор са приколицом кренуо 4 минута раније?

6. За дати израз састави текстуални задатак и ријеши:
   125km 850m − 8km 942m·10.

ПРОИЗВОД ЈЕДНАКИХ ЧИНИЛАЦА, СТЕПЕН

Припремни задаци:
Примјер 1. Број 3^3 напиши у облику производа и израчунај његову вриједност.
Примјер 2. Напиши број 125 у облику степена броја 5.

Проблемски задаци:

1.Колика је вриједност степена у датим бројевима:

а) $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000 = 10^n$ n =
б) $10 \cdot 10 \cdot ... \cdot 10 = 1000\,000 = 10^n$ n =
в) $4 \cdot 4 \cdot ... \cdot 4 = 256 = 4^n$ n =

2. Мина је неколико пута број 2 помножила са самим собом и добила:

а) број 8;
б) број 64;
Запиши дужи и краћи запис добијених производа.

3. Који запис је тачан? Провјери и образложи.

а) $1000 + 100 = 10^3 + 10^2 = 10^5$ б) $1000 \cdot 100 = 10^3 \cdot 10^2 = 10^5$

4. Дате бројеве запиши у облику збира вишеструких декадних јединица.

$3\,258 = 3\,000 + 200 + 50 + 8 = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$ ($10^0 = 1$)
4 257 =
97 845 =
385 598 =

5.У датим сабирцима пронађи производе једнаких чинилаца а затим запиши у облику степена тог чиниоца. На примјер:

$64 + 125 = 4 \cdot 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 \cdot 5 = 4^3 + 5^3$
27 + 121 =
81 + 144 + 1000 =

6.Вриједност следећег израза одреди само једним множењем:

а) $5 \cdot 10^2 - 7 \cdot 10^2$;
б) $76 \cdot 10^3 - 8 \cdot 10^3$;

7.Израчунај:

а)$2^3 + 2^2 \cdot 5^3 =$ б) $10^3 \cdot 4^3 - 7^2 \cdot 10^2 =$

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛАН РАД

1. Следеће степене запиши у облику производа једнаких чинилаца и израчунај њихову вриједност:

   $2^4 =$
   $5^3 =$
   $11^2 =$

2. Колика је вриједност степена у датим бројевима:

   а) $10 \cdot 10 = 100 = 10^n$
   $n =$

   б) $6 \cdot 6 \cdot 6 =$_____ $= 6^n$
   $n =$

3. Који запис је тачан? Провјери и образложи.

   а) $1000 + 100\,000 = 10^3 + 10^5 = 10^8$
   б) $1000 \cdot 100\,000 = 10^3 \cdot 10^5 = 10^8$

4. Дате бројеве запиши у облику збира вишеструких декадних јединица.

   $4\,751 = 4\,000 + 700 + 50 + 1 = 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$ $(10^0 = 1)$
   $57\,342 =$
   $962\,575 =$

5. У датим сабирцима пронађи производе једнаких чинилаца а затим запиши у облику степена тог чиниоца. На примјер:

   $8 + 36 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 6 \cdot 6 = 2^3 + 6^2$
   $1000 + 121 =$
   $49 + 144 + 1000\,000 =$

6. Вриједност следећег израза одреди само једним множењем:

   а) $61 \cdot 10^2 - 52 \cdot 10^2$;
   б) $76 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^3$.

7. Израчунај:

   $3^2 \cdot 4^2 + 9^0 =$
   $5 \cdot 7^3 - 2^3 + 6^3 =$

МНОЖЕЊЕ ЗБИРА И РАЗЛИКЕ

Припремни задаци:

Примјер 1.

1. Користећи закон дистрибутивности множења према сабирању (одузимању) израчунај следеће производе:
   $340 \cdot 99 = 340 \cdot (100 - 1) =$
   $465 \cdot 102 =$

Примјер 2.

2. Вриједност следећег израза одреди само једним множењем:
   а) $815 \cdot 2 \cdot 5 - 715 \cdot 10$;
   б) $84\,567 \cdot 350 - 84\,567 \cdot 50 \cdot 7$

Проблемски задаци:

1. Трг је поплочан плочама облика правоугаоника и квадрата. У једном реду има 853 квадрата и 257 правоугаоника. Колико у 120 таквих редова има плоча облика квадрата и правоугаоника?

2. За изградњу трга допремљено је на 8 камиона од по 3 t 250 kg пијеска и 10 камиона цимента од 2 t 500kg цимента. Колико је материјала допремљено?
   Колико је новца издвојено ако је 26 kg пијеска 12 €, а 25 kg цимента 3€?

3. На средини трга поплочана је симетрична фигура. У центру фигуре постављено је ред од 10 округлих плоча а, затим симетрично, са обје стране редови округлих плоча. У првом реду постављено је 12 округлих плоча, у другом 14. Колико се округлих плоча налази у 35 реду?

Ред	Број округлих плоча	Правило
1.	12	
2.	14	
⋮		
35.		

4. Трг је поплочаван у двије смјене. Током прве смјене постави се 335 плоча, а током друге 139 плоча мање. Колико је плоча постављено, ако је трг непрекидно поплочаван за 38 дана? Колико је новца утрошено за постављене плоча, ако је цијена једне плоче 2,85€?

5. За дате изразе састави и ријеши текстуални задатак.

(57 964 – 15 850) · 30;
125 850 · 25 − 8 942 · 25.

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛАН РАД

1. Помножи на најлакши начин:

   425 · 95 =
   78 · 1 010 =

2. На спортском стадиону стигло је 25 аутобуса са атлетичарима и спортским руководиоцима. У сваком аутобусу било је 45 жена и 28 мушкараца. Колико је на стадиону стигло атлетичара и спортских руководиоца?

3. Током једног такмичарског дана стадион је пријеподне просјечно посјетило 570 гледалаца, а послијеподне 1250. Колико је гледалаца у просјеку посјетило такмичење за 7 дана? Колико је стадион добио од улазница за прва три дана, ако је цијена карте 2,50€?

4. За реконструкцију стадиона довезено је 25 камиона са по 350 џакова цимента и 120 џакова пијеска. Колико је материјала довезено ако је у сваком џаку било по 35 kg?

5. На трибинама стадиона у првом реду може да прими 120 гледалаца, у другом 180, а у трећем 270. Колико гледалаца може да сједне у 12 реду?

Ред	Број гледалаца	Правило
1.	120	
2.	180	
3.	270	
⋮		
12.		

6. За дате изразе састави текстуални задатак и ријеши:
   а) (67 850 – 24 500) · 17;
   б) $23 \cdot 10^3 + 745 \cdot 10^3$.

ДИЈЕЉЕЊЕ ДЕКАДНОМ ЈЕДИНИЦОМ. ДИЈЕЉЕЊЕ ЈЕДНОЦИФРЕНИМ БРОЈЕМ СА И БЕЗ ОСТАТКА

Припремни задаци:

1. Број 890 000 умањи хиљаду пута.

2. Бензинску пумпу посјети 2 849 потрошача за 7 дана. Колики је дневни просјек потрошача на бензинској пумпи?

Проблемски задаци:

1.Растојање између два града је $2 \cdot 10^2$ km.
а) Колико је центиметара између ова два града на карти, ако је карта урађена у размјери 1: 10 000 000 ? Размјера је у центиметрима.
Размјера 1: 10 000 000 на карти приказује растојање које је 10 000 000 пута мање од стварног.

Растојање у природи :_____km =_____ m = _____ cm
Растојање на карти (10 000 000 пута мање од стварног):

_____ .

б) Колика је удаљеност између ова два града, ако је карта урађена у размјери 1: 1 000 000 ? Размјера је у центиметрима.
1.начин:
Размјера 1: 1 000 000 показује растојање на карти које је_____
мање од стварног.

Растојање у природи између 2 града: _____
Растојање на карти између 2 града:

_____ .
2.начин: Упореди размјере, за колико се пута разликују?_____
Шта закључујеш, колика ће на карти бити удљеност између 2 града?

_____

2. Обим Земље по Екватору је приближно 40 070 km.
а) Да ли експедиција за 40 дана може бродом обићи планету Земља, ако сваког дана прелази исту дужину пута?
За један дан експедиција прелази: 40 070 km : _____ =

Заокружи један од понуђених одговора и образложи.
Експедиција за 40 дана може/ не може бродом да обиђе планету Земљу, јер _____

3. У табели су дати подаци о храни коју експедиција има на броду.

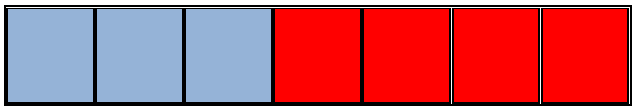
Храна	месо	поврће	млијечни производи
маса	2 t 480 kg= kg	2 t 800 kg= kg	1 t 350 kg= kg
цијена по 1 kg	5 €	2,50 €	4,50 €

а) Да ли се сва храна може једнако распоредити у 5 хладњача?

б) Да ли 27 000 € покрива трошкове хране ако је дата просјечна вриједност хране по 1kg?

4. Експедиција на путу око свијета има 231 члана посаде. Сви чланови посаде смјештени су у трокреветним и четворокреветним собама. У колико је соба на броду смјештена посада?

231



Укупан број соба на броду је _____.___

5. Када пронађеш укупан број соба на броду, на основу следеће слике покушај да саставиш и ријешиш задатак у којем сазнајемо колико има четворокреветних а колико трокреветних соба.

Укупан број соба: _____ .

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛАН РАД

1. Број $37 \cdot 10^3$ умањи 100 пута.

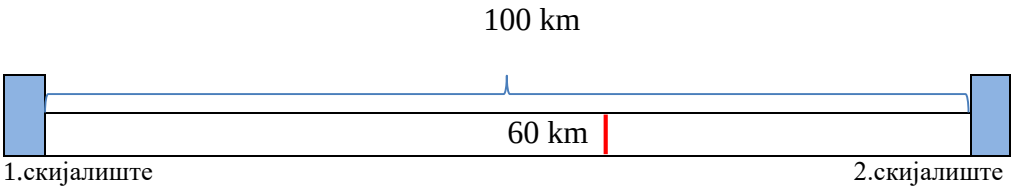
2. Удаљеност између два скијалишта је 100 km. Колико је центиметара на карти између ова 2 скијалишта ако је географска карта урађена у размјери 1:10 000 000. Размјера је у центиметрима.

   Размјера 1 : 10 000 000 показује да растојање од 1 cm на карти представља 10 000 000 cm (100 km) у природи.

   Удаљеност у природи: 100 km = _____ m = _____ cm
   Удаљеност на карти је (10 000 000 пута мања од стварне):

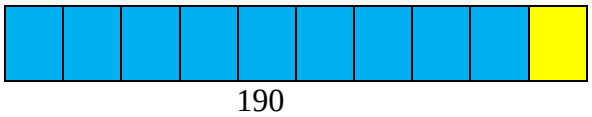
   _____

3. За колико минута аутобус стиже од једног до другог скијалишта ако за 1 сат просјечно прелази 60 km.



пут	100 km	60 km	40 km	30 km	10 km
вријеме		60 мин.			

4. На скијалишту је 190 дјеце и инструктора скијања.
   Колико је дјеце а колико инструктора скијања ако 1 инструктор обучава групу од деветоро дјеце?



   Број група са 1 инструктором: 190 : (___ + 1) =

   Укупан број дјеце:
   Укупан број инструктора:

   б) Једна корпа на жичари може да прими петоро дјеце.
   Колико је корпи потребно да би се 184 дјеце превезло на врх стазе?

Са жичаром се 184 дјеце превезе у _____ корпи са 5 сједишта.

5. На основу података из табеле одговори:
   а) Колико се скијача превезе за 2 минута?
   б) Колико се скијача превезе за 1 дан ако је скијалиште отворено од 9 h до 16 h ?

вријеме	1 сат	2 минута	1 дан
превоз скијача жичаром и ски-лифтом	15 000		

6. На основу података из табеле покушај да поставиш више питања и на њих одговориш.

	Услуге скијалишта		Храна и топли напици		
Број дјеце	цјелодневни ски-пас	полудневни ски-пас	сендвич	топли чај	топла чоколада
184	5,00 €	2,50 €	0,80 €	0,20 €	0,50 €

ДИЈЕЉЕЊЕ ДВА ДВОЦИФРЕНА БРОЈА БЕЗ ОСТАТКА И СА ОСТАТКОМ. ДИЈЕЉЕЊЕ ВИШЕЦИФРЕНОГ БРОЈА ДВОЦИФРЕНИМ БРОЈЕМ БЕЗ ОСТАТКА И СА ОСТАТКОМ

Припремни задаци:

$a : b = c + r$ *(a - дјељеник, b - дјелилац, c - количник, r – остатак)*, $r<b$

$a = b \cdot c + r$

1. Бака је испекла 72 колача од чега се 24 дио колача препекао. Колико је препечених колача?
   $a = 72$ $b =$ ____ $c =$ ____ $r =$ ____
2. Који број при дијељењу са 17 даје количник 3 и остатак 7?
   $a =$ ____ $b =$ 17 $c =$ ____ $r =$ ____

Проблемски задаци:

Примјер 1

За Школу у природи пријавило се 98 ученика и 5 наставника. Ученици и наставници се превозе минибусом са 22 сједишта. Колико је возила потребно за превоз свих ученика и наставника?

Број ученика и наставника:_____

Број сједишта у минибусу:_____

Број возила: _____ : _____ =

За превоз свих ученика и наставника потребно је _____ возила, јер _____

_____

Примјер 2

Школу у природи посјетиле су 3 школе. Из прве школе било је 98 ученика, из друге 2 пута више од прве, а из треће 14 пута мање од друге школе.

а) Колико је ученика посјетило Школу у природи из друге и треће школе?

Број ученика 2. школе:_____

Број ученика 3. школе:_____

Број ученика из 2. и 3. школе: _____

б) Сва дјеца изводе наставу у учионицама које могу да приме по 20 ученика.

Колико је потребно учионица за несметано одвијање наставе, тако да свако дијете има своје мјесто?

Укупан број дјеце у Школу природе: _____. Број дјеце у једној учионици: _____

Број учионица:

За несметано одвијање наставе потребно је _____ учионица јер _____

_____

Примјер 3

На основу података из табеле израчунај колико 1 ученик уплаћује за боравак у Школу природе?

		Цијена боравка	
	Ученици	уплаћује боравак	не уплаћује боравак
	1.	?	
	: .	? ?	
	30.		✓
	: .	? ?	
	60.		✓
	: .	? ?	
	90.		✓
	: 98.	? ?	
Укупно	98	10 045 €	3

Примјер 4

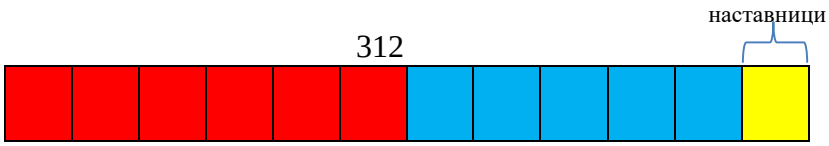
Прочитај податке из табеле. Шта је непознато? _____

	Учесници школе у природи			Укупно
	наставници	дјечаци	дјевојчице	312
Смјештај у одмаралишту	двокреветне собе	шестокреветне собе	петокреветне собе	?

Рješење:

Примјер 5

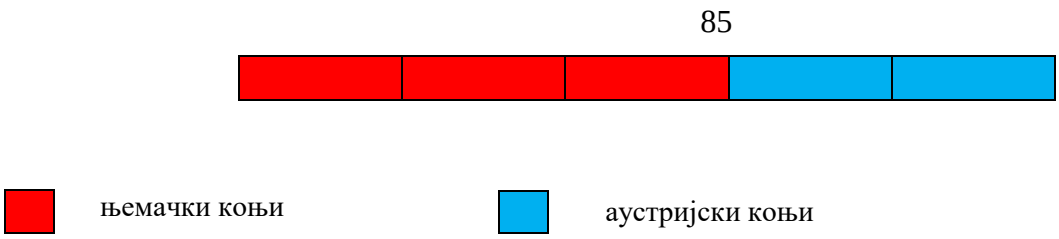
На основу слике покушај да поставиш и ријешиш задатак који ће показати колико је појединачно учесника Школе у природи?



ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛАН РАД

1. Израчунај:
   а) 8 160 : 96 =
   б) 14 559 : 25 =

2. На основу слике одреди колико на фарми има њемачких а колико аустријских коња?



3. На фарми коња је за прва два мјесеца (фебруар има 28 дана) допремљено 47 259 kg сијена и 36 t 757 kg жита.
   а) Колика је дневна потрошња сијена и жита?

   Укупна количина сијена и жита (kg): _____

   Дневна потрошња:

   б) Колико просјечно килограма хране (сијена и жита) дневно поједе један коњ, ако на фарми има 89 коња?

4. Колико воде за један дан попије 50 коња? Кубик воде има 1000 *l* .
   Израчунај колико је то новца.

Број коња	Дневно попије воде	Цијена воде по кубику (1000 *l*) 80 центи
45	1 800 *l*	(1000 + 800) *l*= (1000 + 500 + 300) *l* (80 + 40 + 3 · 8) центи =
50		

5. На основу дате слике покушај да саставиш и ријешиш задатак.

2 400 €	2 400 €	

ДИЈЕЉЕЊЕ ЗБИРА И РАЗЛИКЕ БРОЈЕМ

Припремни задаци:

1. а) Ако је $a + b = 35 \cdot 10^3$, израчунај:
   $a : 50 + b : 50 = (a + b) : 50 =$ _____

   б) Ако је $a - b = 12\,627$, израчунај:
   $a : 23 - b : 23 =$ _____

2. Израчунај користећи једно дијељење:
   14 800 : 20 – 5 300 : 20 = _____

Проблемски задаци:

<u>Примјер 1</u>

Школа спроводи хуманитарну акцију за 56-оро дјеце из сиротишта. Прва смјена је сакупила 672€, а друга 1 008 €. Прикупљени новац једнако се распоређује сваком дјетету за куповину школског прибора.
а) Колико је новца намијењено сваком дјетету?

Прибор	свеска	блок	бојице	оловка	темпера
Цијена у еурима	2,30	1,20	3,00	0,90	4,00

б) Да ли за дати новац свако дијете може купити 4 свеске, блок, бојице , 3 оловке и темпере? (1 € има 100 центи)

<u>Примјер 2</u>

Фабрика колача је у јануару имала приход од 12 700 €, а у фебруару 5 пута мање. Приход од 2 мјесеца дониран је школи за куповину ____ (допуни, види слику) истих рачунара.

12 700 €							5 пута мање 12 700 € : ____ =				
?											

Шта је непознато? _____

_____

Примјер 3

Министарство просвјете најбоље ученике са међународних такмичења награђује екскурзијом. За ученике основне школе цијена екскурзије је 358 €. Користећи податке са слике израчунај колика је цијена екскурзије за ученике средње школе?

16 · ____ = _____	основна /средња школа (заокружи)
24 · 358 € = _____	основна /средња школа (заокружи)

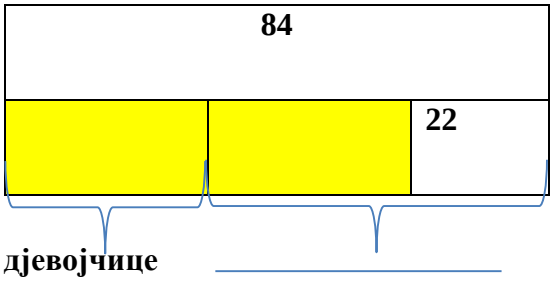
Министарство отплаћује екскурзију у 8 једнаких мјесечних рата. Колика је вриједност 1 мјесечне рате?

Укупна вриједност екскурзије (основна и средња школа):

Вриједност једне мјесечне рате:

Примјер 4

На слици је приказан број ученика петог разреда у твојој школи. Састави текст задатка и ријеши.



ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛАН РАД

1. Вриједност следећег израза одреди само једним дијељењем:

а) 6 821 : 19 + 4 826 : 19 = _____

б) 7 500 : 30 – 430 : 30 = _____

2. Ако је $a - b = 15 \cdot 10^3$, израчунај:

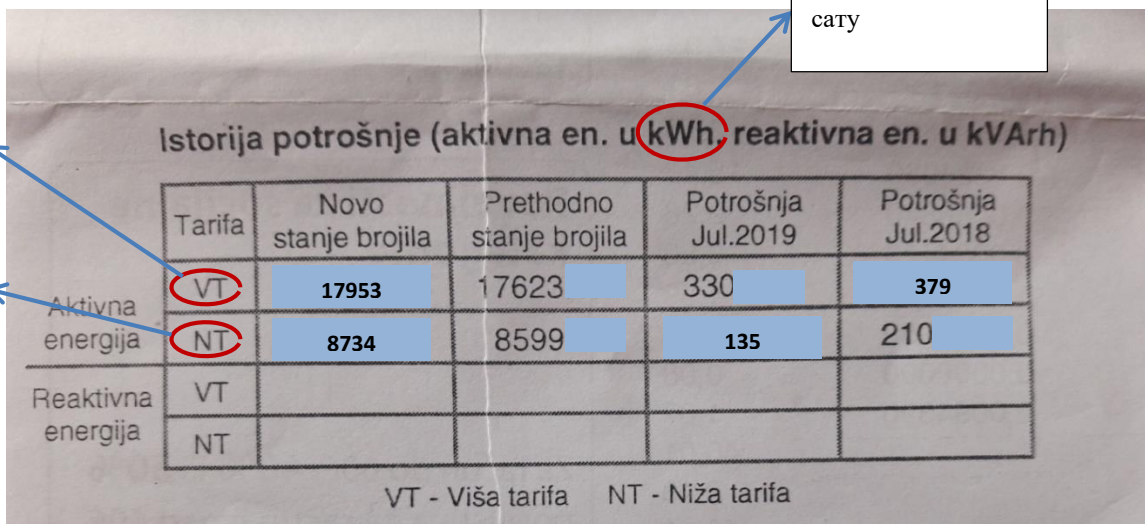
$a : 15 - b : 15$ = _____ .

3. На слици је приказана потрошња струје у домаћинству за јул 2019.

потрошња струја рачуна се у киловатима по сату

скупља струја

јефтина струја



Istorija potrošnje (aktivna en. u kWh, reaktivna en. u kVArh)

	Tarifa	Novo stanje brojila	Prethodno stanje brojila	Potrošnja Jul.2019	Potrošnja Jul.2018
Aktivna energija	VT	17953	17623	330	379
	NT	8734	8599	135	210
Reaktivna energija	VT				
	NT				

VT - Viša tarifa NT - Niža tarifa

VT – виша тарифа показује потрошњу скупље електричне енергије у периоду од 7h до 23 h
NT – нижа тарифа показује потрошњу јефтине електричне енергије у периоду од 23h до 7 h

а) Колика је дневна просјечна потрошња струје за јул 2019. ?

б) Колики је рачун за струју за јул 2019. ако се скупља струја (VT) по 1 киловат сату рачуна 6 центи а јефтина струја (NT)3 цента.
Рачун не укључује трошкове на мрежи и ПДВ (порез на додату вриједност).

в) За колико се разликује дневна просјечна потрошња струје за јул 2018. и 2019.?

4. Реконструкција хидроелектране „Пива“ планирана је за 8 мјесеци, тако да се сваког мјесеца улаже иста вриједност новца. Вриједност улагања је 1 767 400 € без ПДВ-а. Ако је ПДВ пети дио предвиђеног новца, колика је:
а) укупна вриједност инвестиције (улагања) ?

б) вриједност улагања за један мјесец?

Појам: ПДВ је порез на додату вриједност који се законом прописује.

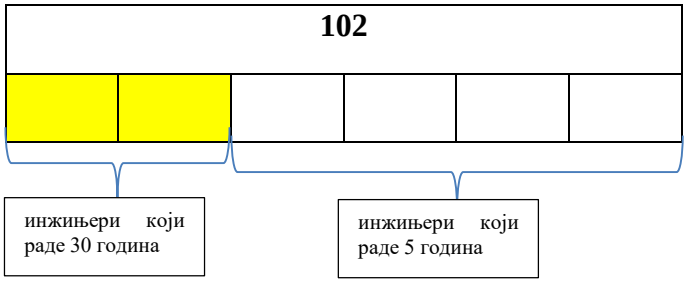
а) Вриједност инвестиције без ПДВ –а:

Вриједност ПДВ – а за дату суму улагања:

Укупна вриједност инвестиције:

б)

5. Слика приказује број запослених инжињера у хидроелектрани „Пива“. Покушај да саставиш и ријешиш постављени задатак.



РЕДОСЛЕД РАЧУНСКИХ ОПЕРАЦИЈА

Припремни задаци:

1. Одреди вриједност израза:
   а) 3 587 + 423 · 5_____
   б) (50 000 – 40 500) : (45 + 55)_____

2. а) Ако су у неком изразу дате операције сабирања, одузимања, множења и дијељења, које операције се прво изводе?

   _____

   б) Кад у изразу треба извршити неку операцију прије друге операције, како то означавамо?

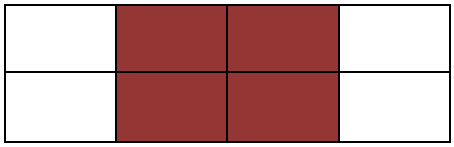
   _____

Проблемски задаци:

Примјер 1

Израчунај вриједност осјенчених поља ако је укупна вриједност свих поља 459 624.

459 624



Укупна вриједност осјенчених поља је_____

Примјер 2

Попуни табелу.

a	b	c	$a + c$	$b - c$	$b \cdot c$	$a : c$	$a + b \cdot c$	$a : c + b - c$	$(a + c) \cdot b$
25 100	100		25 120		2 000				

Примјер 3

Мљекара „Срна“ од 500 домаћинстава свакодневно откупљује у просјеку по 39 *l* млијека. Откупна цијена по 1 литру је 33 цента, а продајна 60 центи. Колика је дневна зарада мљекаре, ако је сву количину откупљеног млијека пласирала на тржиште? (1 € има 100 центи)
Погледај шему испод и покушај у једном изразу да прикажеш решење.

по

дневна количина млијека пласирана на тржиште

цијени зараде

(откупна и продајна цијена)

Решење: _____

Мљекара дневно заради _____ .

Примјер 4

Мљекара за 7 дана произведе 1 t 995 kg сира. Од 1 литра млијека добија се 95g сира. Колико се литара млијека прерађује у сир сваког дана?
У једном изразу постави решење задатка.

колико се пута 95g сира садржи у количину сира произведеног за 1 дан

за свако 95g сира потребно је 1*l* млијека

Производња сира за 7 дана _____ → ○ → Количина млијека за добијање сира

○

(_____ g : _____) : ○ · _____ = _____

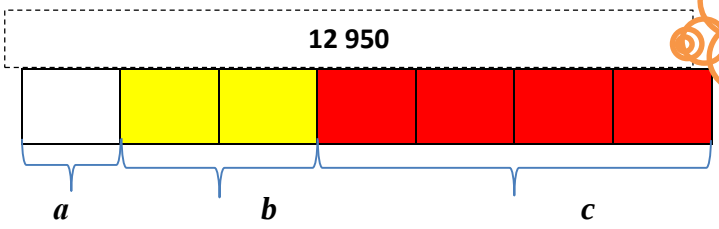
Сваког дана се у сир прерађује _____ млијека.

Примјер 5

На основу слике састави задатак и ријеши.

Нпр. *a*, *b* и *c* могу представљати број чашица јогурта, павлаке, кајмака

***a*, *b* и *c* као број навијача**



ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛАН РАД

1. Одреди вриједност израза:

а) $4\,375 \cdot 0 + 1 \cdot (562 + 0 : 289) - 10^2$ _____

б) $50\,000 - 10\,990 : 14 - 14$ _____

2. Попуни табелу.

a	b	c	$a + b$	$c + b$	$b \cdot c$	$a : c$	$(a + b) \cdot c$	$a : (b \cdot c)$	$a : c - c + b$
60 000		50		250	10 000				

3. Школа има 32 одјељења и у сваком одјељењу у просјеку по 23 ученика. На сајму од ручних радова ученика школа је зарадила 1 245 €. Ако су трошкови материјала за израду радова 285 €, колика је просјечна зарада једног одјељења? У једном изразу запиши решење.

_____

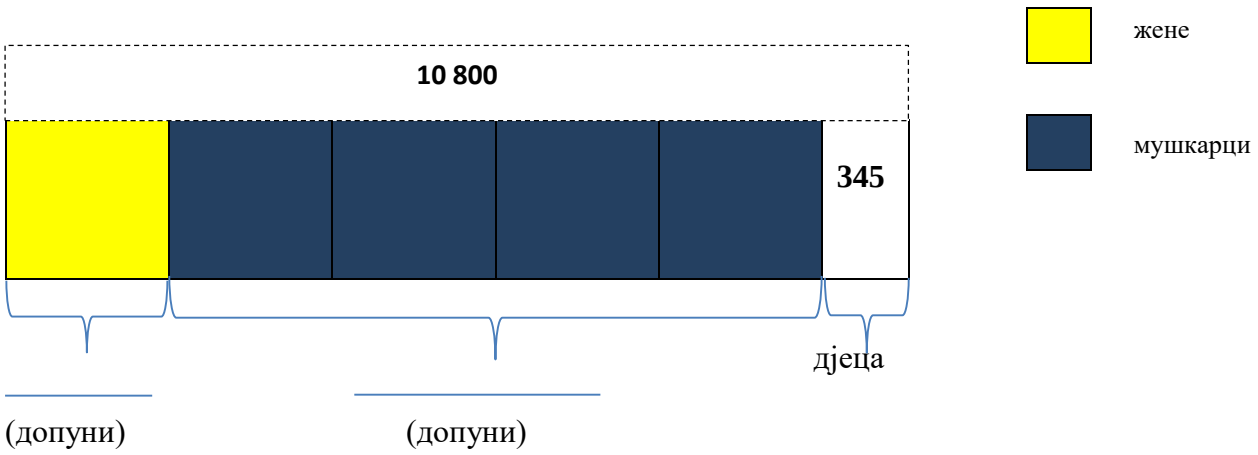
Једно одјељење просјечно заради _____ €.

Да ли 1 одјељење од просјечне зараде може купити карту за утакмицу – 1 € и сок – 30 центи? ***(1€ има 100 центи)***

_____

Од зарађеног новца свако дијете може / не може купити карту за утакмицу и сок. (заокружи)

4. Слика показује број посјетилаца на фудбалском стадиону „Сутјеска“. Састави текст задатка и ријеши.



ЗАВИСНОСТ ПРОИЗВОДА ОД ПРОМЈЕНЕ ЧИНИЛАЦА

Припремни задаци:

1. Први чинилац је 100 а други 25. Како је промијењен производ ако је:
   а) први чинилац повећан 10 пута, а други остао непромијењен?

   _____

   б) други чинилац умањен 5 пута, а први остао непромијењен?

   _____

2. Када ће производ бројева 100 и 25 остати непромијењен?

   _____

Проблемски задаци:

Примјер 1

Попуни табелу.

$a \cdot b$	$a \cdot (b : 10^2)$	$(a \cdot 10^2) \cdot b$	$(a \cdot 10) \cdot (b : 10)$
$125 \cdot 10^2$			

Примјер 2

а) Користећи сталност производа израчунај на најлакши начин производ бројева $36 \cdot 10^2$ и 5^3.

$(36 \cdot 10^2) \cdot 5^3 = (36 \cdot 100) \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$ _____

б) Допуни:

4 580 · 70 = _____

(4 580 : _____) · 70 = 320 600 : 4

4 580 · 35 = 320 600 : _____ .

Примјер 3

Током љетње туристичке сезоне цијена апартмана за један дан је 105 €. Колико је у зимском периоду потребно издвојити за 15 дана смјештаја у апартману ако је цијена дневног смјештаја 3 пута мања?

Цијена смјештаја у зимском периоду: _____

Колико је љети потребно издвојити за 15 дана смјештаја у апартману?

_____

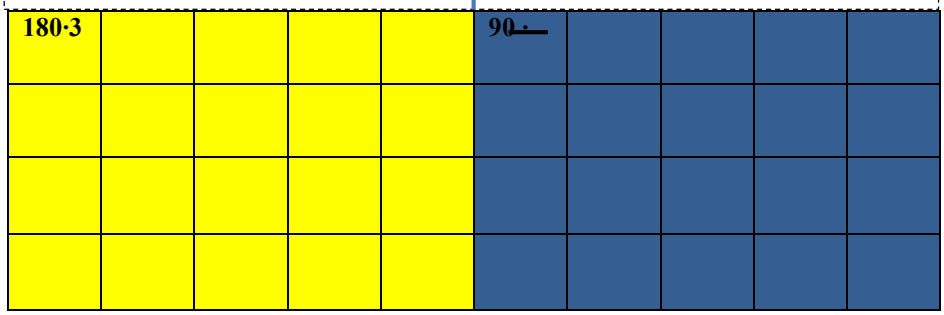
За колико пута се разликују трошкови љетњег и зимског боравка у апартману за 30 дана?

а) 2 пута б) 30 пута в) 3 пута
Заокружи тачан одговор.

Примјер 4

Слика приказује да брат и сестра дневно издвајају исто новца за куповину сладоледа током одмора на мору. (ц. је скраћено од центи)
Постави текст задатка и ријеши.

(180ц. · 3) · 10 =	**(180ц. :____) · (3 ·_____)**



ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛАН РАД

1. Попуни табелу.

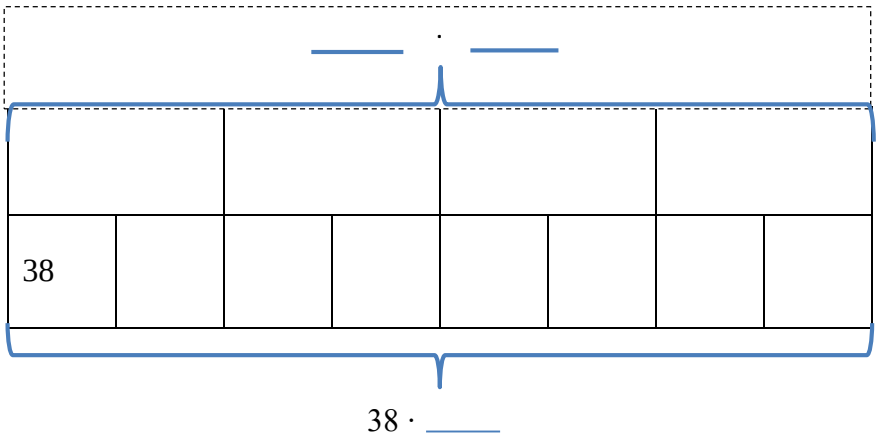
$a \cdot b$	$(a : 10^2) \cdot b$	$a \cdot (b \cdot 10^3)$	$(a \cdot 10) \cdot (b : 10)$
$10 \cdot 10^2$			

2. а) Користећи сталност производа израчунај на најлакши начин производ бројева 80^2 и 5^2 .

б) Допуни:

1 780 · 80 = _____
1 780 · (80 : _____) = 142 400 : 10
89080 = 142 400 : _____ .

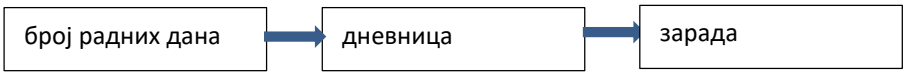
3. На основу слике запиши сталност производа.



4. Јана током љетње сезоне ради сваког дана у туристичкој организацији и има дневницу од 24 €. Одлучила је да у јуну узме неплаћени одмор.

Да ли ће у јуну примити мању плату од предвиђене ако има 3 пута мање радних дана и ако за сваки дан због прековременог рада има 3 пута већу дневницу?

Погледај шему и ријеши задатак.



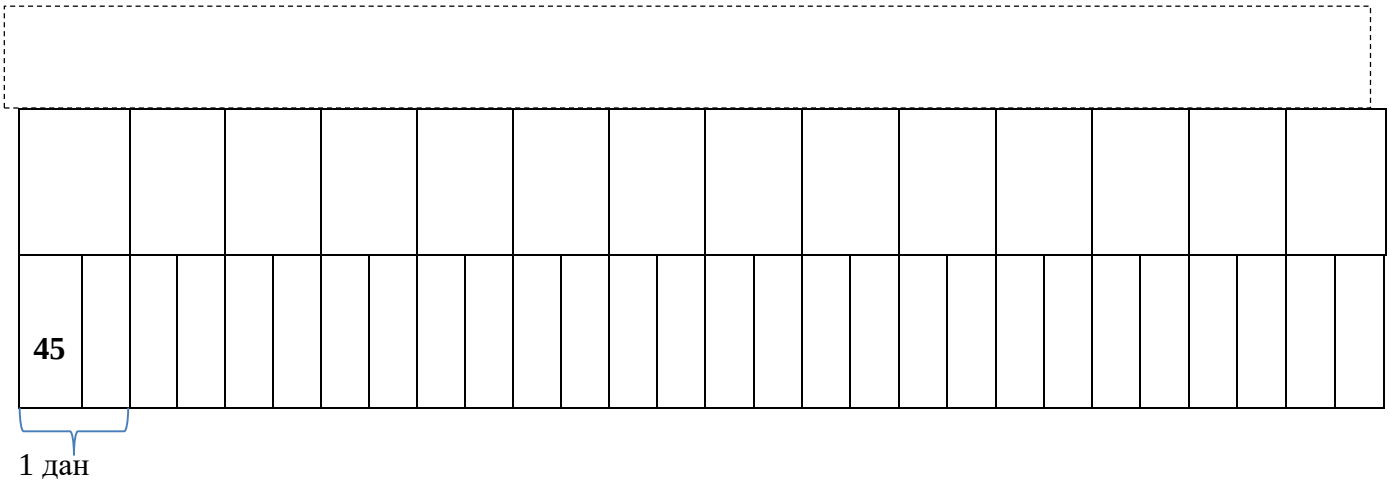
Јун 2020						
По	Ут	Ср	Че	Пе	Су	Не
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

Јана у јуну зарађује / не зарађује мању плату од предвиђене.

(Заокружи тачан одговор.)

Нпр. о твом слободном времену, спортским акт.

5. Помоћу слике покушај да поставиш текст задатка а затим покажеш његово решење.



ЗАВИСНОСТ КОЛИЧНИКА ОД ПРОМЈЕНЕ ДЈЕЉЕНИКА И ДЈЕЛИОЦА

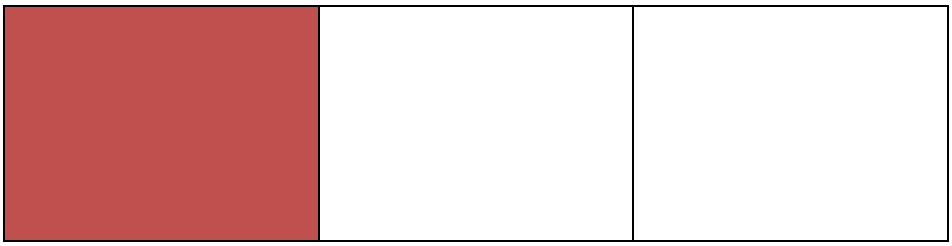
Примјер 1

На основу слике одреди вриједност осјенченог дијела фигуре.

5 400

5 400 : ____ = ____

10 800



2 700

2 700 : ____ = ____

10 800 : ____ = ____

На сликама је приказана зависност количника од промјене _____ .

Примјер 2

Попуни табелу.

a : b *a* – дјељеник *b* - дјелилац	*a : (b : 10^2)* дјелилац умањен _____	*(a · 10^2) : b* дјељеник увећан _____	*(a · 10^3) : (b · 10^3)* и дјељеник и дјелилац увећани по _____
количник $25 \cdot 10^2$	*количник* _____ _____ $25 \cdot 10^2$ _____	*количник* _____ _____ $25 \cdot 10^2$ _____	*количник* _____ _____ _____

Примјер 3

а) Користећи сталност количника израчунај на најлакши начин количник бројева $145 \cdot 10^2$ и 25 .

$(145 \cdot 10^2)$: 25 = _____

б) Допуни:

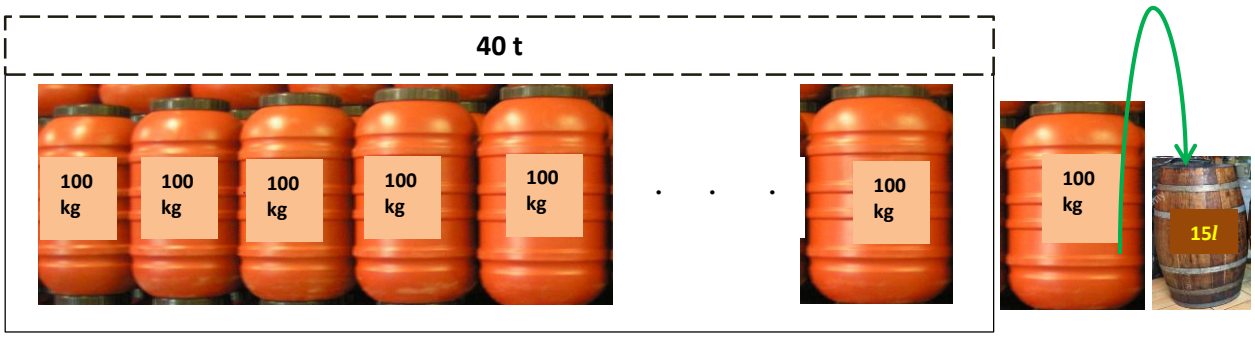
45 200 : 50 = _____

45 200 : (50 · _____) = 904 : 2

135 600 : 50 = 904 · _____ .

Примјер 4

Од 100 kg маслина добија се 15 *l* маслиновог уља. Колико се од 40 t маслина произведе маслиновог уља?



Одговор: _____

а) Ако се количина од 40 t маслина увећа 4 пута, колика је производња маслиновог уља?

_____

Производња маслиновог уља је 4 пута мања/већа. (заокружи)

в) Колика је производња маслиновог уља, ако се због временских неприлика берба маслина умањи 4 пута?

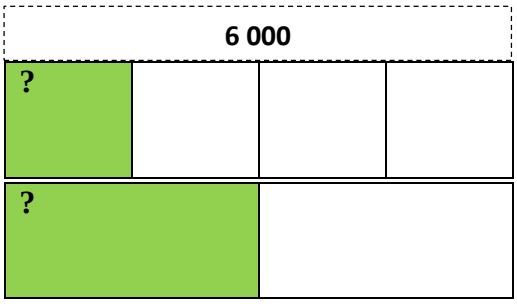
_____

Одговор: _____

Примјер 5

Дата слика приказује зависност количника од промјене _____ .

На основу слике постави текст задатка и ријеши.



ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛАН РАД

1. На основу слике израчунај вриједност осјенченог дијела фигуре.

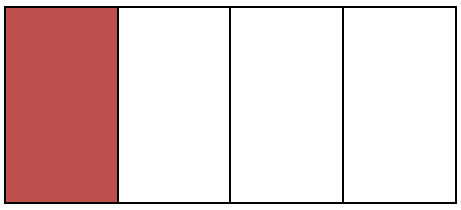
47 120

47 120 : _____ = _____

47 120

47 120 : _____ = _____

47 120



47 120 : _____ = _____

На сликама је приказана зависност количника од промјене _____ .

2. Попуни табелу.

$a : b$ a – дјељеник b - _____	$(a \cdot 10^2) : b$ дјељеник увећан _____	$a : (b \cdot 10^2)$ дјелилац увећан _____	$(a \cdot 10^3) : (b \cdot 10^3)$ и дјељеник и дјелилац _____
количник $53 \cdot 10^2$	количник увећан _____ $53 \cdot 10^2$ _____	количник _____ _____ $53 \cdot 10^2$ _____	_____ _____ _____

3. а) Користећи сталност количника израчунај на најлакши начин количник бројева $23 \cdot 10^2$ и 5^2 .

$(23 \cdot 10^2) : 5^2 =$ _____

б) Допуни:

32 016 : 16 = _____
(32 16 : _____) : 16 = 2 001 : 3
32 016 : 4 = 2 001 · _____ .

4. Компанија „13.јул – Плантаже“ у 2018. години произвела је $14 \cdot 10^6$ флаширaних производа вина и ракије.

а) За колико се сати флаширају сво вино и ракија ако се користи нова линија за флаширање капацитета $5 \cdot 10^3$ флаша на сат?

б) За колико се сати флашира пет пута мања количина вина и ракије старијом машином која је 5 пута спорија?

а)

вријеме флаширања вина и ракије новом машином

$14 \cdot 10^6$: _____ =

Одговор: _____

б)

вријеме флаширања 5 пута мање вина и ракије машином која је 5 пута спорија

Рјешење:

У израчунавању времена флаширања производа користимо својство:

а) зависности производа од промјене чинилаца

б) зависност количника од промјене дјељеника

в) сталност количника.

(заокружи тачан одговор)

Одговор: _____

5. Дата слика приказује својство _____ .

На основу слике састави текст задатка и ријеши.

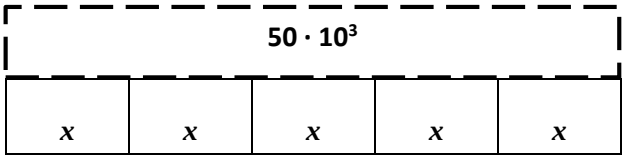
18 984					
?					

?		

ЈЕДНАЧИНЕ СА МНОЖЕЊЕМ И ДИЈЕЉЕЊЕМ
1.дио

Примјер 1

а) На основу слике постави и ријеши једначину.



$x \cdot$ _____ = _____

За постављену једначину покушај да осмислиш текст задатка.

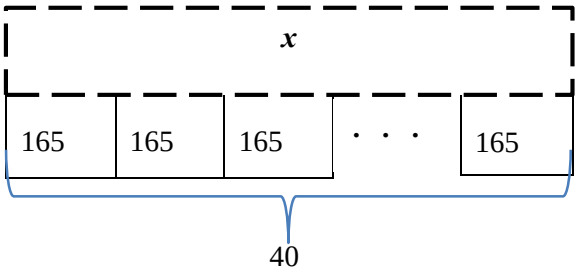
_____

_____

_____

Примјер 2

а) На основу слике постави и ријеши једначину.



$x :$ _____ = 165

б) За дату једначину покушај да осмислиш текст задатка.

_____

_____

_____

Примјер3

Колико секунди путује свјетлосни зрак од Земље до Сунца ако у свакој секунди прелази по $3 \cdot 10^5$ km? Растојање од Земље до Сунца је $15 \cdot 10^6$ km.
Постави једначину и ријеши.

колико секунди?	у свакој секунди по $3 \cdot 10^5$ km	растојање од Земље до Сунца $15 \cdot 10^6$ km

_____

_____

_____

_____

Примјер 4

Производ три броја *a, b* и *c* је 294. Који су то бројеви, ако се зна да је производ првог и трећег 42, а производ другог и трећег 98?
Ријеши а затим попуни табелу.

a	b	c	$a \cdot b \cdot c$	$a \cdot c$	$b \cdot c$
			294	42	98

Производ три броја: $a \cdot b \cdot c = 294$

Производ првог и трећег: $a \cdot c =$ _____

$a \cdot b \cdot c = 294$

$\underbrace{a \cdot c} \cdot b = 294$

_____ $\cdot\, b = 294$

$b =$ _____

Производ другог и трећег: $b \cdot c =$ _____

$a \cdot \underbrace{b \cdot c} = 294$

$a \cdot$ _____ $= 294$

$a =$ _____

Помоћу добијених бројева ***a*** и ***b*** и датог производа 294 израчунавамо број _____.

Решење:

Примјер 5

Дату једначину прво ријеши, а затим састави њој одговарајући текст.

$(y - 40) : 30 = 42 \rightarrow$ количник

Непозната y је елеменат _____ .

_____ _____

$y - 40 =$ _____

_____

_____

_____

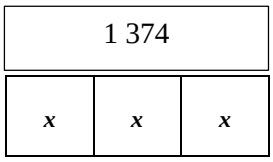
_____

_____

_____

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛАН РАД

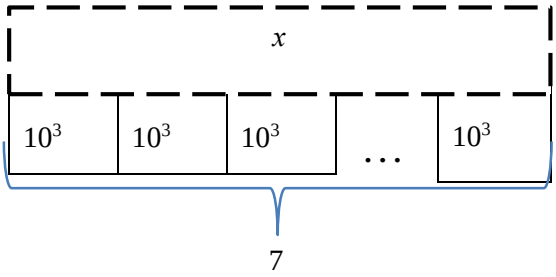
1. а) На основу слике постави и ријеши једначину.



____ · x = _____

б) За постављену једначину покушај да осмислиш текст задатка.

2. а) На основу слике постави и ријеши једначину.



x : _____ = 10^3

б) За постављену једначину покушај да осмислиш текст задатка.

3. Дивљи зец за 1 минут претрчи 850 m. За колико минута уједначеног трчања дивљи зец претрчи 10 km 200 m?
Постави и ријеши једначину.

за 1 минут: 850 m	→ колико минута	→ укупан пут: 10 km 200 m = _____ m

4. Производ три броја је 2 000. Који су то бројеви, ако се зна да је производ првог и трећег 250, а производ другог и трећег 80?
Ријеши и попуни табелу.

a	***b***	***c***	***a · b · c***	***a · c***	***b · c***
			2 000	250	80

5. Дату једначину прво ријеши а затим састави њој одговарајући текст.

$45 \cdot (a - 40) = 11\ 250$ → производ Непозната је елеменат _____

1.чинилац _____

$a - 40 =$ _____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

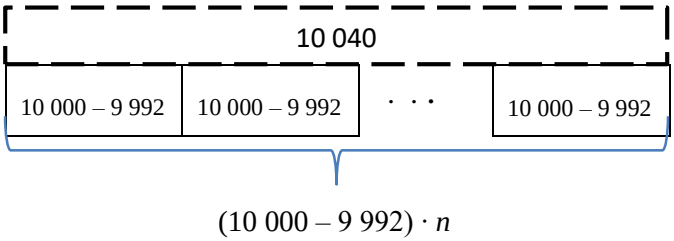
_____

ЈЕДНАЧИНЕ СА МНОЖЕЊЕМ И ДИЈЕЉЕЊЕМ

2.дио

Примјер 1

На основу слике постави и ријеши једначину.



(10 000 – 9 992) · _____ = 10 040

_____

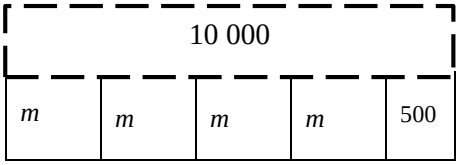
_____

_____

_____

Примјер 2

а) На основу слике постави и ријеши једначину



_____ + 500 = 10 000

_____

_____

_____

_____

б) За дату једначину покушај да осмислиш текст задатка.

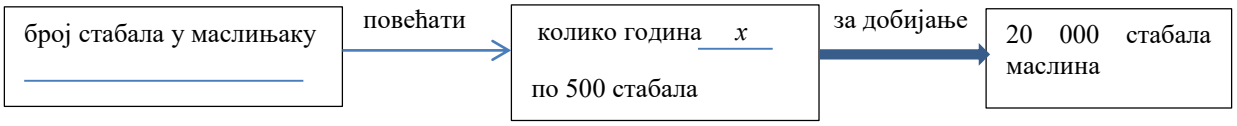
_____

_____

_____

Примјер 3

Компанија „13.јул – Плантаже“ посједује маслињак са 12 000 стабала маслина. За колико година ће маслињак имати 20 000 стабала маслина ако је план да се годишње засади по 500 стабала маслина?
Постави једначину и ријеши.



_____

_____

_____

_____

Примјер 4

Табела приказује број анкетираних грађана о томе које медије прате. Израчунај колико анкетираних грађана прате телевизијски програм?
Постави једначину и ријеши.

	МЕДИЈИ			
	радио-програм	телевизијски програм	штампане медије	УКУПНО
Број анкетираних грађана	3 пута више од штампаних медија _____	заједно радио и штампане медије _____	***x***	1 200

_____

_____

_____

_____

Примјер 5

Дату једначину прво ријеши, а затим састави њој одговарајући текст.

$x : 50 + 4\,520 = 9\,870$ → збир Непозната x је елемент _____ .

_____ *2. сабирак*

x : 50 = _____

_____

_____

_____

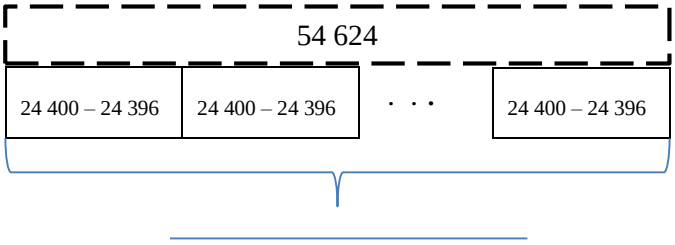
_____

_____

_____

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛАН РАД

1. На основу слике постави и ријеши једначину.



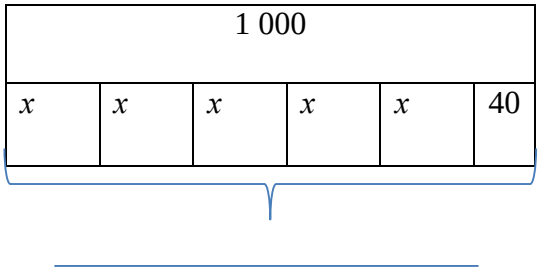
(24 400 – 24 396) · _____ = 54 624

_____

_____

_____

2. а) На основу слике постави и ријеши једначину



_____

_____

_____

_____

_____

_____

б) За дату једначину покушај да осмислиш текст задатка.

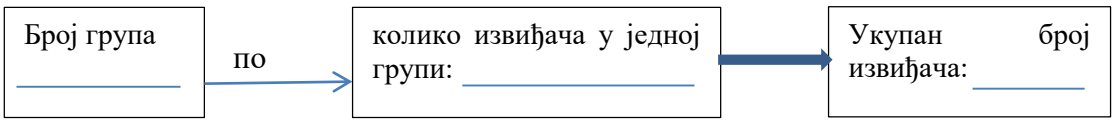
_____

_____

_____

3. За обилазак националног парка Дурмитор планирано је да се 814 извођача једнако распореди у 22 групе.

Ако из сваке групе изостану по 3 извођача, колико је извођача планирано у једној групи? Постави једначину и ријеши



_____

_____

_____

_____

_____

4. Табела приказује број такмичара у атлетици. Израчунај колико се такмичара пријавило за сваку дисциплину посебно.

Постави једначину и ријеши.

	АТЛЕТСКЕ ДИСЦИПЛИНЕ			
	дисциплина 200 m	штафета 4 x 100m	дисциплина на 100m	УКУПНО
Број такмичара	3 пута више од дисциплине на 100 m _____	заједно дисциплине на 100 m и 200 m _____	***x***	960

5. Дату једначину прво ријеши, а затим састави њој одговарајући текст.

2 500 **:** ***x*** **·** ***5*** *= 100* → количник

Непозната ***x*** је елемент _____.

_____ _____

x **·** ***5*** **=** _____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

НЕЈЕДНАЧИНЕ СА МНОЖЕЊЕМ И ДИЈЕЉЕЊЕМ

Примјер 1

Посматрај слику и упиши шта недостаје, а затим у скупу N_0 ријеши неједначину.

Производ је 1 200							
x	***x***	***x***	***x***	***x***	***x***	***x***	***x***

8 · ____ = 1 200

Производ је _____ од 1 200							
x	***x***	***x***	***x***	***x***	***x***	***x***	***x***

8 · ***x*** _____ 1 200

_____

_____

x ∈ _____

Да би вриједност израза 8 · ***x*** била _____ од 1 200, вриједност промјењивог чиниоца треба да се смањи / повећа . (заокружи тачан одговор) То је правило зависности производа од промјене _____ .

Примјер 2

Урош је прије 2 године забиљежио висину од 1 500 mm. Колико милиметара је Урош просјечно растао за један мјесец, ако сада има мање или једнако од 1 740 mm?

Постави неједначину и ријеши.

Урошева висина прије 2 године: _____ → порасла → колико милиметара ***x*** просјечно за сваки мјесец: ***x · 24*** → и достигла → висину мању или једнако од 1 740 mm

_____

_____

_____

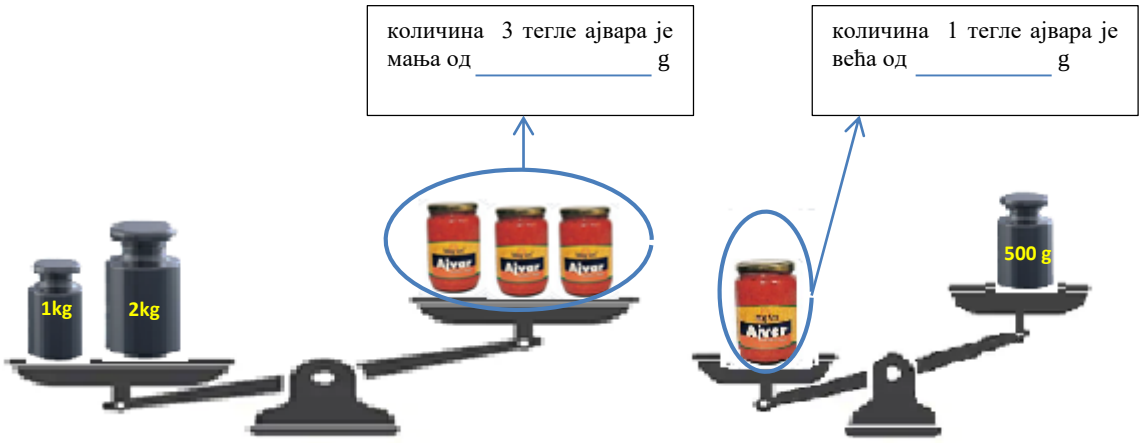
_____

_____

_____

Примјер 3

Помоћу слике постави неједначину, а затим ријеши колика је најмања а колика највећа количина 1 тегле ајвара.



Теглу ајвара означимо са a .

Одговор: Најмања количина 1 тегле ајвара је _____ , а највећа _____.

Примјер 4

Ријеши дату неједначину у скупу N_0, а затим састави њој одговарајући текст.

$14 \cdot x > 4\,000 + 3\,000$

Да би вриједност израза $14 \cdot x$ била већа од збира бројева 4 000 и 3 000 вриједност промјенљивог чиниоца x треба да се повећа.

$x >$ _____

_____

_____

_____

_____

_____

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛАН РАД

1. Посматрај слику и упиши шта недостаје, а затим у скупу N_0 ријеши неједначину.

Производ је 12 360		
x	x	x

$3 \cdot x =$ _____

Производ је _____ од 12 360		
x	x	x

$3 \cdot x$ _____ 12 360

_____

_____

$x \in$ _____

Да би вриједност израза $3 \cdot x$ била _____ од 1 200, вриједност промјенљивог чиниоца треба да се _____ .То је правило зависности производа од промјене _____ .

2. Богдан је за рођендан добио 2 исте новчанице. Од тог новца потрошио је 1 000 центи, тако да му је остало мање или једнако од 3 000 центи. Које је новчанице Богдан могао добити?

Постави и ријеши неједначину у скупу N_0.

2 исте новчанице: $2 \cdot n$ → Потрошио 1 000 центи → остало мање или једнако од 3 000 центи

Неједначина: $2 \cdot n - 1\,000$ _____

(допуни запис за неједначину)

Да би вриједност израза $2 \cdot n - 1\,000$ била мања или једнако од 3 000, вриједност промјенљивог умањеника $2 \cdot n$ треба да је мања или једнако:

$2 \cdot n \leq$ _____

$2 \cdot n \leq$ _____

$n \leq$ _____

$n \in$ _____

ПАЗИ КАД РЈЕШЕЊЕ $2 \cdot n - 1\,000$ ИМА СМИСЛА?

Да ли вриједност умањеника $2 \cdot n$ може бити мања од 1000:

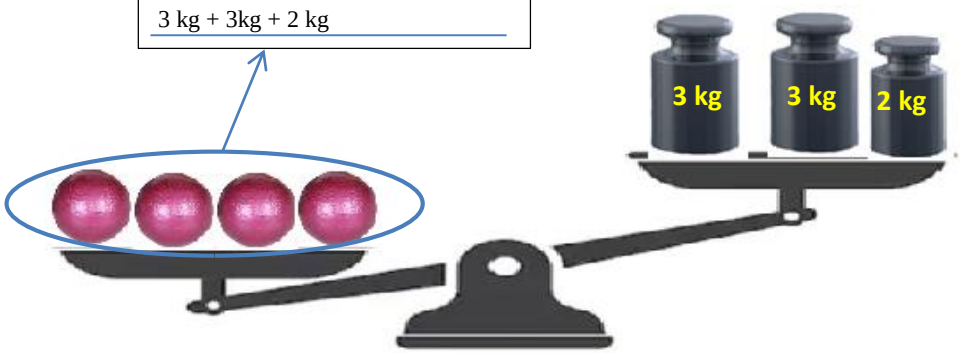
а)да б) не

(заокружи тачан одговор)

3. На основу слике постави, а затим ријеши колика је најмања а колика највећа тежина 1 кугле.

тежина 4 кугле је већа од

3 kg + 3kg + 2 kg



тежина 1 кугле је мања од

2 kg + 2kg + 200g

тежина 4 кугле је већа од

3 kg + 3kg + 2 kg = g

тежина 1 кугле је мања од

2 kg + 2kg + 200g

Вриједност једне кугле означимо са k

$4 \cdot k$

Скуп рјешења: $k \in$

НЕЈЕДНАЧИНЕ СА МНОЖЕЊЕМ И ДИЈЕЉЕЊЕМ

2.дио

Примјер 1

Посматрај слику и упиши шта недостаје, а затим у скупу N_0 ријеши неједначину.

Производ је 1 950				
x	x	x	x	x

5 · _____ = 1 950

Производ је мањи од 1 950				
x	x	x	x	x

Да би вриједност израза _____ била _____ од 1 950 , вриједност промјенљивог чиниоца треба да се _____ . То је правило зависности производа од промјене _____ .

5 · _____ < 1 950

_____

_____

$x \in$ _____

б) За постављену неједначину покушај да осмислиш текст задатка.

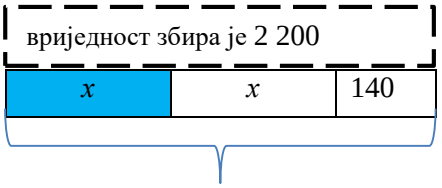
_____

_____

_____

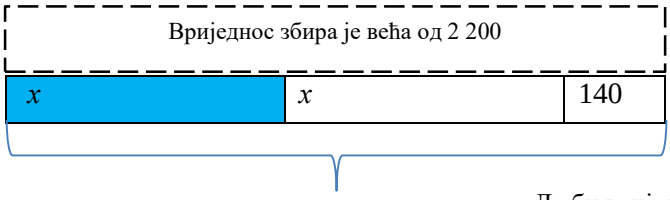
Примјер 2

Посматрај слику и упиши шта недостаје, а затим у скупу N ријеши неједначину.



_____ · **x** + 140 = 2 200 → збир

_____ 2.сабирак



_____ · x + 140 ___ 2 200

_____

_____

_____

$x \in$ _____

Да би вриједност збира _____ била _____ од 2 200 вриједност промјенљивог сабирка треба да се_____. То је правило зависности збира од промјене_____ .

б) За постављену неједначину покушај да осмислиш текст задатка.

_____

_____

_____

Примјер 3

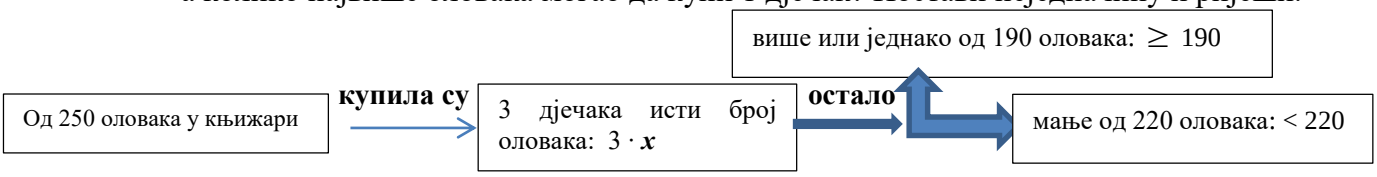
Табела приказује број анкетираних грађана о томе који ТВ програм прате. Израчунај колико највише, а колико најмање анкетираних грађана прати РТВЦГ1?
Постави и ријеши неједначину у скупу *N*.

	ТВ ПРОГРАМ			
	РТВЦГ1	РТВЦГ2	Вијести	Укупно
Број анкетираних грађана	x	4 пута више од од РТВЦГ1 _____	РТВЦГ1 и РТВЦГ2 заједно _____	мање или једнако од 1 000

Одговор: РТВЦГ1 прати највише _____ а најмање _____

Примјер 4

У књижари има 250 оловака. Матија, Урош и Дамјан купили су исти број оловака тако да је остало више или једнако од 190 а мање од 220 оловака. Колико је најмање, а колико највише оловака могао да купи 1 дјечак? Постави неједначину и ријеши.



Један дјечак је могао да купи највише _____ оловака, а најмање _____ .

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛАН РАД

1. а) Посматрај слику и упиши шта недостаје, а затим у скупу N_0 ријеши неједначину.

7 · ____ = 86 415

Производ је 86 415						
x	x	x	x	x	x	x

Производ _____ је мањи од 86 415						
x	x	x	x	x	x	x

7 · ____ < 86 415

_____

_____

_____

$x \in$ _____

Да би вриједност израза _____ била _____ од 86415, вриједност промјенљивог чиниоца треба да се _____.

То је правило зависности производа од промјене_____.

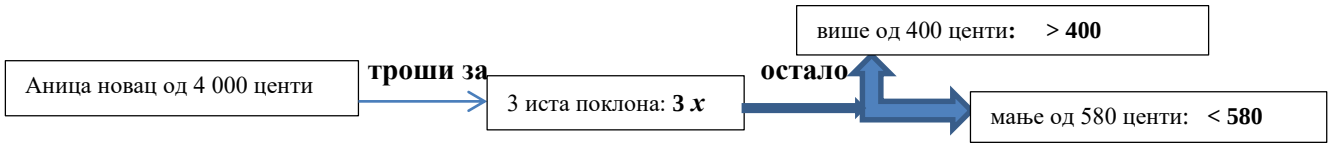
б) За постављену неједначину покушај да осмислиш текст задатка.

_____

_____

_____

2. Аница је од 4 000 центи за 3 другарице купила исти поклон, тако да јој је остало више од 400, а мање од 580 центи. Колика је највећа, а колика најмања могућа цијена једног поклона? Постави неједначину и ријеши.



б) Дату неједначину прво ријеши у скупу N_0,а затим састави њој одговарајући текст.

$4 \cdot y + 120 \leq 1\,600$

Текст задатка:

Прилог 10: Анкетни упитник за ученике

Упитник о постављању математичких проблема у петом разреду основне школе

Драга дјецо!

Пред вама је упитник о проблемским математичким задацима који се постављају у 5.разреду основне школе, па вас молимо да пажљиво прочитате питања и на њих искрено одговорите.

На питања одговарате одабиром понуђених одговора за који сматрате да је тачан. За понуђени одговор „остало“ упишите своје мишљење у предвиђени простор.

Хвала на издвојеном времену!

Назив школе: _____

Разред и одјељење: _____

Презиме: _____

Име: _____

Пол:

- ○ мушки
- ○ женски

1. Колико често знања из математике помажу у свакодневним животним ситуацијама?

   - никада
   - понекад
   - често
   - врло често

2. Колико успјешно рјешаваш задатке из математике у 5.разреду?

   - уопште нијесам успјешан/-а
   - углавном нијесам успјешан/-а
   - неодлучан/-а сам
   - углавном сам успјешан/-а
   - сасвим сам успјешан/-а

3. Задаци који се постављају у 5.разреду су:

- досадни
- једноставни
- сложени
- забавни
- изазовни
- остало_____

(упиши)

4. Колико често рјешавате проблемске (сложене) задатке у школи?

- никада
- понекад
- често
- врло често

5. Постављене проблемске задатке рјешавате на више начина?

- никада
- понекад
- често
- врло често

6. Колико су често постављени проблемски задаци повезани са стварним животним ситуацијама?

- никада
- понекад
- често
- врло често

7. Успјешно рјешавање проблемских задатака највише постижем кроз:

- контролне вјежбе са проблемским задацима
- честу израду проблема за домаћи задатак
- често рјешавање занимљивих задатака на часу
- самостално постављање (састављање) задатака на основу слике, израза или табеле
- остало_____

(упиши)

8. Колико је често у постављеним проблемским задацима поред текста понуђена слика која помаже рјешавање задатка?

- никада
- понекад
- често
- врло често

9. Колико је често постављени проблемски задатак приказан помоћу табеле?

- никада
- понекад
- често
- врло често

10. У постављеном проблемском задатку поред текста приказана је схема са важним информацијама за његово рјешавање?

- никада
- понекад
- често
- врло често

11. Колико често проблемски задатак поред текста садржи више питања и/или испланираних поступака за рјешавање проблема?

- никада
- понекад
- често
- врло често

12. Колико се често у постављеним проблемским задацима користе изрази са словима?

- никада
- понекад
- често
- врло често

13. У рјешавању проблемских задатака највише ми помаже:

- изрази са словима (једначине)
- табеларни приказ података
- додатна питања
- понуђена слика (схема) или график за разумијевање проблема
- остало_____

(упиши)

14. Колико често имаш прилику да сам/-а саставиш текст задатка на основу задате слике (схеме), табеле или израза?

- никада
- понекад
- често
- врло често

15. Да ли ти самостално састављање задатка на основу датог израза, табеле или слике (схеме) олакшава разумијевање поступка рјешавања тог задатка?

- да
- не

16. У рјешавању проблемских задатака највише обратим пажњу на:

- уредност писања
- рачунање
- нови, неуобичајени начин рјешавања
- више начина рјешавања
- ништа од наведеног
- остало_____
(упиши)

17. Послије урађеног проблемског задатка наставник најчешће указује на:

- типичне грешке
- најбољи начин рјешавања проблема
- различите начине рјешавања проблема
- ништа од наведеног
- остало_____
(упиши)

18. Рјешавање проблемских задатака код тебе подстиче:

- љеност и одустајање од рјешавања проблема
- страх од неуспјеха
- напетост и нервозу
- равнодушност
- самопоузање и преузимање одговорности за рјешавање проблема
- упорност и истрајност у рјешавању проблема
- радозналост и креативност рјешавања проблема

19. Да ли те постављање и рјешавање проблемских задатака припрема за боље сналажење у свакодневном животу (трговина, израда предмета и сл.)?

- да
- не

20. Колико често би волио/вољела да се у постављању проблемског задатка користе слике (схеме) које служе за разумијевање тог проблема?

- никада
- понекад
- често
- врло често
- увијек

21. Колико често би волио/вољела да се проблемски задатак поставља помоћу табеларног приказа података?

- никада
- понекад
- често
- врло често
- увијек

22. Колико често би волио/вољела да се проблемски задатак поставља помоћу питања и испланираних поступака за његово рјешавање?

- никада
- понекад
- често
- врло често
- увијек

23. Колико често би волио/вољела да су у постављеном проблемском задатку непознате вриједности издвојене и означене словима?

- никада
- понекад
- често
- врло често
- увијек

Прилог. 11: Дескриптивна статистика

Табела 1.а) Дескриптивна статистика рјешења неједначине за експерименталну групу

Group Statistics[a]

	4.a - zavisnost rezultata od promjene komponenti (retorički)	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Inicijalni test znanja	nema rješenja ili netačno rješenje	11	37.7273	16.63184	5.01469
	tačno rješenje	45	57.4444	17.74127	2.64471

a.Škola = "Milija Nikčević"

Табела 1.б) Значајност разлика у одговорима разумијевања својства множења за експерименталну групу

Independent Samples Test[a]

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
Inicijalni test znanja	Equal variances assumed	.003	.956	-3.342	54	.002	-19.71717	5.89995	-31.54586	-7.88848
	Equal variances not assumed			-3.478	16.054	.003	-19.71717	5.66936	-31.73237	-7.70197

a. Škola = "Milija Nikčević"

Табела 2.а) Дескриптивна статистика рјешења неједначине за контролну групу

Group Statistics[a]

	4.a - zavisnost rezultata od promjene komponenti (retorički)	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Inicijalni test znanja	nema rješenja ili netačno rješenje	20	41.5000	15.77640	3.52771
	tačno rješenje	36	60.6667	17.25274	2.87546

a. Škola = "Luka Simonović"

Табела 2.б) Значајност разлика у одговорима разумијевања својства множења за контролну групу

Independent Samples Test[a]

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
Inicijalni test znanja	Equal variances assumed	.123	.728	-4.103	54	.000	-19.16667	4.67083	-28.53112	-9.80221
	Equal variances not assumed			-4.211	42.460	.000	-19.16667	4.55115	-28.34832	-9.98501

a. Škola = "Luka Simonović"

Табела 3.а) Значајност разлике у рјешењима неједначине за експерименталну групу

ANOVA[a]

Inicijalni test znanja

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	4447.218	2	2223.609	7.552	.001
Within Groups	15604.496	53	294.424		
Total	20051.714	55			

a. Škola = "Milija Nikčević"

Табела 3.б) Значајност разлика између одговора у рјешењима неједначине код ученика експерименталне групе

Multiple Comparisons[a]

Dependent Variable: Inicijalni test znanja

Bonferroni

(I) 7 - rješavanje nejednačine	(J) 7 - rješavanje nejednačine	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
nema rješenja ili netačno rješenje	tačna postavka rješavanja ali netačno rješenje	-18.03668*	5.38403	.004	-31.3478	-4.7255
	tačna postavka rješavanja i tačno rješenje	-28.92857*	8.93953	.006	-51.0302	-6.8270
tačna postavka rješavanja ali netačno rješenje	nema rješenja ili netačno rješenje	18.03668*	5.38403	.004	4.7255	31.3478
	tačna postavka rješavanja i tačno rješenje	-10.89189	8.17571	.565	-31.1051	9.3213
tačna postavka rješavanja i tačno rješenje	nema rješenja ili netačno rješenje	28.92857*	8.93953	.006	6.8270	51.0302
	tačna postavka rješavanja ali netačno rješenje	10.89189	8.17571	.565	-9.3213	31.1051

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

a. Škola = "Milija Nikčević"

Табела 4.а) Значајност разлике у рјешењима неједначине код ученика контролне групе

ANOVA[a]

Inicijalni test znanja

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	4900.038	2	2450.019	8.674	.001
Within Groups	14970.176	53	282.456		
Total	19870.214	55			

a. Škola = "Luka Simonović"

Табела 4.б) Значајност разлика између одговора у рјешењима неједначине код ученика контролне групе

Multiple Comparisons[a]

Dependent Variable: Inicijalni test znanja
Bonferroni

(I) 7 - rješavanje nejednačine	(J) 7 - rješavanje nejednačine	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
nema rješenja ili netačno rješenje	tačna postavka rješavanja ali netačno rješenje	-6.60440	5.57128	.723	-20.3785	7.1697
	tačna postavka rješavanja i tačno rješenje	-24.14286*	6.15052	.001	-39.3491	-8.9367
tačna postavka rješavanja ali netačno rješenje	nema rješenja ili netačno rješenje	6.60440	5.57128	.723	-7.1697	20.3785
	tačna postavka rješavanja i tačno rješenje	-17.53846*	5.34015	.005	-30.7411	-4.3358
tačna postavka rješavanja i tačno rješenje	nema rješenja ili netačno rješenje	24.14286*	6.15052	.001	8.9367	39.3491
	tačna postavka rješavanja ali netačno rješenje	17.53846*	5.34015	.005	4.3358	30.7411

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.
a. Škola = "Luka Simonović"

Табела 5.а) Утицај одговора састављања проблема 1.5.а на резултате финалних тестова знања у експерименталној групи

ANOVA[a]

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Inicijalni test znanja	Between Groups	3076.475	2	1538.238	4.803	.012
	Within Groups	16975.239	53	320.288		
	Total	20051.714	55			
Finalni test znanja1 (množenje)	Between Groups	6386.530	2	3193.265	7.236	.002
	Within Groups	23389.310	53	441.308		
	Total	29775.839	55			
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	Between Groups	2530.070	2	1265.035	3.476	.038
	Within Groups	19290.484	53	363.971		
	Total	21820.554	55			
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	Between Groups	758.118	2	379.059	1.199	.309
	Within Groups	16753.592	53	316.106		
	Total	17511.710	55			

a. Škola = "Milija Nikčević"

Табела 5.б) Значајности разлика између одговора састављања проблема 1.5.а и одговора на финалним тестовима знања у експерименталној групи

Multiple Comparisons[a]

Bonferroni

Dependent Variable	(I) 1.5.a - sastavljanje problema na osnovu postavljenog brojevnog izraza (finalni test znanja1)	(J) 1.5.a - sastavljanje problema na osnovu postavljenog brojevnog izraza (finalni test znanja1)	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
Finalni test znanja1 (množenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	2.86413	8.62269	1.000	-18.4541	24.1824
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-20.66087*	6.06956	.004	-35.6669	-5.6548
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	-2.86413	8.62269	1.000	-24.1824	18.4541
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-23.52500*	8.53322	.024	-44.6220	-2.4280
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	20.66087*	6.06956	.004	5.6548	35.6669
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	23.52500*	8.53322	.024	2.4280	44.6220
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	3.74457	7.83079	1.000	-15.6158	23.1050
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-12.33043	5.51214	.089	-25.9583	1.2975
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	-3.74457	7.83079	1.000	-23.1050	15.6158
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-16.07500	7.74953	.129	-35.2345	3.0845

	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	12.33043	5.51214	.089	-1.2975	25.9583
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	16.07500	7.74953	.129	-3.0845	35.2345
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-2.91848	7.29773	1.000	-20.9610	15.1240
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-7.90348	5.13692	.390	-20.6037	4.7967
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	2.91848	7.29773	1.000	-15.1240	20.9610
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-4.98500	7.22201	1.000	-22.8403	12.8703
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	7.90348	5.13692	.390	-4.7967	20.6037
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	4.98500	7.22201	1.000	-12.8703	22.8403

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

a. Škola = "Milija Nikčević"

Табела 6.а) Утицај одговора састављања проблема 1.5.а на резултате финалних тестова знања у контролној групи

ANOVA[a]

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Inicijalni test znanja	Between Groups	1844.845	2	922.422	2.712	.076
	Within Groups	18025.369	53	340.101		
	Total	19870.214	55			
Finalni test znanja1 (množenje)	Between Groups	2437.124	2	1218.562	3.979	.025
	Within Groups	16231.858	53	306.261		
	Total	18668.982	55			
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	Between Groups	2052.332	2	1026.166	3.172	.050
	Within Groups	17144.793	53	323.487		
	Total	19197.125	55			
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	Between Groups	2114.219	2	1057.109	2.789	.071
	Within Groups	20086.991	53	379.000		
	Total	22201.210	55			

a. Škola = "Luka Simonović"

Табела 6.б) Значајности разлика између одговора састављања проблема 1.5.а и одговора на финалним тестовима знања у контролној групи

Multiple Comparisons[a]

Bonferroni

Dependent Variable	(I) 1.5.a - sastavljanje problema na osnovu postavljenog brojevnog izraza (finalni test znanja1)	(J) 1.5.a - sastavljanje problema na osnovu postavljenog brojevnog izraza (finalni test znanja1)	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Finalni test znanja1 (množenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-7.32432	10.50545	1.000	-33.2974	18.6488
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-14.69932*	5.23628	.021	-27.6452	-1.7534
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	7.32432	10.50545	1.000	-18.6488	33.2974
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-7.37500	11.01038	1.000	-34.5964	19.8464
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	14.69932*	5.23628	.021	1.7534	27.6452
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	7.37500	11.01038	1.000	-19.8464	34.5964
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-20.12613	10.79684	.204	-46.8196	6.5674
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-10.52196	5.38152	.168	-23.8269	2.7830
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	20.12613	10.79684	.204	-6.5674	46.8196
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	9.60417	11.31578	1.000	-18.3723	37.5806
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	10.52196	5.38152	.168	-2.7830	23.8269

		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-9.60417	11.31578	1.000	-37.5806	18.3723
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-14.69820	11.68660	.642	-43.5915	14.1951
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-12.61486	5.82501	.105	-27.0163	1.7866
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	14.69820	11.68660	.642	-14.1951	43.5915
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	2.08333	12.24830	1.000	-28.1987	32.3653
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	12.61486	5.82501	.105	-1.7866	27.0163
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-2.08333	12.24830	1.000	-32.3653	28.1987

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

a. Škola = "Luka Simonović"

Табела 7.а) Утицај одговора састављања проблема 2.5.а$_1$ на резултате финалних тестова знања у експерименталној групи

ANOVA[a]

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Inicijalni test znanja	Between Groups	3750.483	2	1875.241	6.097	.004
	Within Groups	16301.232	53	307.570		
	Total	20051.714	55			
Finalni test znanja1 (množenje)	Between Groups	9356.556	2	4678.278	12.143	.000
	Within Groups	20419.283	53	385.269		
	Total	29775.839	55			
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	Between Groups	7872.770	2	3936.385	14.958	.000
	Within Groups	13947.784	53	263.166		
	Total	21820.554	55			
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	Between Groups	3326.302	2	1663.151	6.214	.004
	Within Groups	14185.408	53	267.649		
	Total	17511.710	55			

a. Škola = "Milija Nikčević"

Табела 7.б) Значајности разлика између одговора састављања проблема 2.5.a_1 и одговора на финалним тестовима знања у експерименталној групи

Multiple Comparisons[a]

Bonferroni

Dependent Variable	(I) 2.5.a1 - sastavljanje problema na osnovu postavljene slike (finalni test znanja2)	(J) 2.5.a1 - sastavljanje problema na osnovu postavljene slike (finalni test znanja2)	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
Finalni test znanja1 (množenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-19.15966	8.14678	.067	-39.3013	.9820
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-28.92157*	6.08408	.000	-43.9635	-13.8796
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	19.15966	8.14678	.067	-.9820	39.3013
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-9.76190	8.98461	.847	-31.9749	12.4511
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	28.92157*	6.08408	.000	13.8796	43.9635
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	9.76190	8.98461	.847	-12.4511	31.9749
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-17.45588*	6.73315	.037	-34.1025	-.8092
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-26.55588*	5.02837	.000	-38.9877	-14.1240

	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	17.45588*	6.73315	.037	.8092	34.1025
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-9.10000	7.42560	.677	-27.4586	9.2586
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	26.55588*	5.02837	.000	14.1240	38.9877
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	9.10000	7.42560	.677	-9.2586	27.4586
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-7.12185	6.79026	.897	-23.9097	9.6660
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-17.83137*	5.07103	.003	-30.3687	-5.2941
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	7.12185	6.79026	.897	-9.6660	23.9097
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-10.70952	7.48858	.476	-29.2239	7.8048
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	17.83137*	5.07103	.003	5.2941	30.3687
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	10.70952	7.48858	.476	-7.8048	29.2239

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

a. Škola = "Milija Nikčević"

Табела 8.а) Утицај одговора састављања проблема 2.5.а1 на резултате финалних тестова знања у контролној групи

ANOVA[a]

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Inicijalni test znanja	Between Groups	1566.707	2	783.354	2.268	.113
	Within Groups	18303.507	53	345.349		
	Total	19870.214	55			
Finalni test znanja1 (množenje)	Between Groups	1337.719	2	668.860	2.045	.139
	Within Groups	17331.263	53	327.005		
	Total	18668.982	55			
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	Between Groups	4594.347	2	2297.173	8.337	.001
	Within Groups	14602.778	53	275.524		
	Total	19197.125	55			
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	Between Groups	3628.001	2	1814.001	5.176	.009
	Within Groups	18573.209	53	350.438		
	Total	22201.210	55			

a. Škola = "Luka Simonović"

Табела 8.б) Значајности разлика између одговора састављања проблема 2.5.а1 и одговора на финалним тестовима знања у контролној групи

Multiple Comparisons[a]

Bonferroni

Dependent Variable	(I) 2.5.a1 - sastavljanje problema na osnovu postavljene slike (finalni test znanja2)	(J) 2.5.a1 - sastavljanje problema na osnovu postavljene slike (finalni test znanja2)	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Finalni test znanja1 (množenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-12.83953	6.34864	.145	-28.5356	2.8565
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-2.13953	10.79845	1.000	-28.8370	24.5579
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	12.83953	6.34864	.145	-2.8565	28.5356
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	10.70000	11.90387	1.000	-18.7305	40.1305
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	2.13953	10.79845	1.000	-24.5579	28.8370
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-10.70000	11.90387	1.000	-40.1305	18.7305
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-23.38605*	5.82752	.001	-37.7937	-8.9784
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-11.85271	9.91206	.711	-36.3587	12.6533

	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	23.38605*	5.82752	.001	8.9784	37.7937
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	11.53333	10.92675	.888	-15.4813	38.5480
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	11.85271	9.91206	.711	-12.6533	36.3587
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-11.53333	10.92675	.888	-38.5480	15.4813
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-20.97442*	6.57218	.007	-37.2231	-4.7257
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-8.50775	11.17866	1.000	-36.1452	19.1297
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	20.97442*	6.57218	.007	4.7257	37.2231
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	12.46667	12.32300	.949	-18.0000	42.9334
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	8.50775	11.17866	1.000	-19.1297	36.1452
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-12.46667	12.32300	.949	-42.9334	18.0000

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

a. Škola = "Luka Simonović"

Табела 9.а) Утицај одговора састављања проблема 2.5.b_1 на резултате финалних тестова знања у експерименталној групи

ANOVA[a]

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Inicijalni test znanja	Between Groups	5314.080	2	2657.040	9.555	.000
	Within Groups	14737.634	53	278.069		
	Total	20051.714	55			
Finalni test znanja1 (množenje)	Between Groups	6985.755	2	3492.878	8.123	.001
	Within Groups	22790.084	53	430.002		
	Total	29775.839	55			
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	Between Groups	7476.706	2	3738.353	13.813	.000
	Within Groups	14343.847	53	270.639		
	Total	21820.554	55			
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	Between Groups	1768.876	2	884.438	2.978	.059
	Within Groups	15742.834	53	297.035		
	Total	17511.710	55			

a. Škola = "Milija Nikčević"

Табела 9.б) Значајности разлика између одговора састављања проблема 2.5.b_1 и одговора на финалним тестовима знања у експерименталној групи

Multiple Comparisons[a]

Bonferroni

Dependent Variable	(I) 2.5.b1 - sastavljanje problema na osnovu postavljenog brojevnog izraza (finalni test znanja2)	(J) 2.5.b1 - sastavljanje problema na osnovu postavljenog brojevnog izraza (finalni test znanja2)	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Finalni test znanja1 (množenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-9.67097	9.99356	1.000	-34.3785	15.0366
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-23.97097*	5.94736	.001	-38.6749	-9.2671
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	9.67097	9.99356	1.000	-15.0366	34.3785
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-14.30000	10.36824	.521	-39.9338	11.3338

	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	23.97097*	5.94736	.001	9.2671	38.6749
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	14.30000	10.36824	.521	-11.3338	39.9338
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-17.40323	7.92830	.098	-37.0047	2.1983
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-24.32823*	4.71828	.000	-35.9934	-12.6630
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	17.40323	7.92830	.098	-2.1983	37.0047
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-6.92500	8.22555	1.000	-27.2614	13.4114
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	24.32823*	4.71828	.000	12.6630	35.9934
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	6.92500	8.22555	1.000	-13.4114	27.2614
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-11.44516	8.30594	.522	-31.9803	9.0900
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-11.27016	4.94302	.080	-23.4910	.9507

	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	11.44516	8.30594	.522	-9.0900	31.9803
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	.17500	8.61735	1.000	-21.1300	21.4800
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	11.27016	4.94302	.080	-.9507	23.4910
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-.17500	8.61735	1.000	-21.4800	21.1300

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

a. Škola = "Milija Nikčević"

Табела 10.а) Утицај одговора састављања проблема 2.5.b_1 на резултате финалних тестова знања у контролној групи

ANOVA[a]

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Inicijalni test znanja	Between Groups	1851.459	2	925.730	2.723	.075
	Within Groups	18018.755	53	339.977		
	Total	19870.214	55			
Finalni test znanja1 (množenje)	Between Groups	700.148	2	350.074	1.033	.363
	Within Groups	17968.835	53	339.035		
	Total	18668.982	55			
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	Between Groups	1647.145	2	823.573	2.487	.093
	Within Groups	17549.980	53	331.132		
	Total	19197.125	55			
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	Between Groups	1741.550	2	870.775	2.256	.115
	Within Groups	20459.660	53	386.031		
	Total	22201.210	55			

a. Škola = "Luka Simonović"

Табела 10.б) Значајности разлика између одговора састављања проблема 2.5.b_1 и одговора на финалним тестовима знања у контролној групи

Multiple Comparisons[a]

Bonferroni

Dependent Variable	(I) 2.5.b1 - sastavljanje problema na osnovu postavljenog brojevnog izraza (finalni test znanja2)	(J) 2.5.b1 - sastavljanje problema na osnovu postavljenog brojevnog izraza (finalni test znanja2)	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-7.48256	9.51229	1.000	-31.0002	16.0351
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-14.45478	6.67032	.104	-30.9461	2.0365
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	7.48256	9.51229	1.000	-16.0351	31.0002
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-6.97222	10.93505	1.000	-34.0074	20.0630
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	14.45478	6.67032	.104	-2.0365	30.9461
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	6.97222	10.93505	1.000	-20.0630	34.0074
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-8.44186	10.27060	1.000	-33.8343	16.9506
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-14.71964	7.20207	.138	-32.5256	3.0864

	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	8.44186	10.27060	1.000	-16.9506	33.8343
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-6.27778	11.80679	1.000	-35.4682	22.9126
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	14.71964	7.20207	.138	-3.0864	32.5256
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	6.27778	11.80679	1.000	-22.9126	35.4682

a. Škola = "Luka Simonović"

Табела 11.a) Утицај одговора састављања проблема 3.1.b на резултате финалних тестова знања у експерименталној групи

ANOVA[a]

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Inicijalni test znanja	Between Groups	1701.384	2	850.692	2.457	.095
	Within Groups	18350.330	53	346.233		
	Total	20051.714	55			
Finalni test znanja1 (množenje)	Between Groups	3578.210	2	1789.105	3.620	.034
	Within Groups	26197.629	53	494.295		
	Total	29775.839	55			
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	Between Groups	2754.605	2	1377.303	3.829	.028
	Within Groups	19065.948	53	359.735		
	Total	21820.554	55			
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	Between Groups	2634.308	2	1317.154	4.692	.013
	Within Groups	14877.402	53	280.706		
	Total	17511.710	55			

a. Škola = "Milija Nikčević"

Табела 11.б) Значајности разлика између одговора састављања проблема 3.1.b и одговора на финалним тестовима знања у експерименталној групи

Multiple Comparisons[a]

Bonferroni

Dependent Variable	(I) 3.1.b - sastavljanje problema za jednačinu sa 1 računskom operacijom, postavljenu pomoću sheme (finalni test znanja3)	(J) 3.1.b - sastavljanje problema za jednačinu sa 1 računskom operacijom, postavljenu pomoću sheme (finalni test znanja3)	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
Finalni test znanja1 (množenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	3.42857	17.82585	1.000	-40.6430	47.5002
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-19.04255	16.05193	.722	-58.7284	20.6433
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	-3.42857	17.82585	1.000	-47.5002	40.6430
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-22.47112*	9.00725	.047	-44.7401	-.2021
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	19.04255	16.05193	.722	-20.6433	58.7284
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	22.47112*	9.00725	.047	.2021	44.7401
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	6.42857	15.20717	1.000	-31.1688	44.0259
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-13.87234	13.69384	.947	-47.7282	19.9835
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	-6.42857	15.20717	1.000	-44.0259	31.1688
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-20.30091*	7.68405	.032	-39.2985	-1.3033
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	13.87234	13.69384	.947	-19.9835	47.7282

		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	20.30091*	7.68405	.032	1.3033	39.2985
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-10.25000	13.43330	1.000	-43.4617	22.9617
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-26.05851	12.09650	.107	-55.9652	3.8482
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	10.25000	13.43330	1.000	-22.9617	43.4617
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-15.80851	6.78773	.071	-32.5901	.9731
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	26.05851	12.09650	.107	-3.8482	55.9652
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	15.80851	6.78773	.071	-.9731	32.5901

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

a. Škola = "Milija Nikčević"

Табела 12.а) Утицај одговора састављања проблема 3.1.b на резултате финалних тестова знања у контролној групи

ANOVA[a]

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Inicijalni test znanja	Between Groups	3238.920	2	1619.460	5.161	.009
	Within Groups	16631.294	53	313.798		
	Total	19870.214	55			
Finalni test znanja1 (množenje)	Between Groups	3290.638	2	1645.319	5.670	.006
	Within Groups	15378.345	53	290.157		
	Total	18668.982	55			
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	Between Groups	1891.447	2	945.724	2.896	.064
	Within Groups	17305.678	53	326.522		
	Total	19197.125	55			
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	Between Groups	5962.580	2	2981.290	9.730	.000
	Within Groups	16238.630	53	306.389		
	Total	22201.210	55			

a. Škola = "Luka Simonović"

Табела 12.б) Значајности разлика између одговора састављања проблема 3.1.b и одговора на финалним тестовима знања у контролној групи

Multiple Comparisons[a]

Bonferroni

Dependent Variable	(I) 3.1.b - sastavljanje problema za jednačinu sa 1 računskom operacijom, postavljenu pomoću sheme (finalni test znanja3)	(J) 3.1.b - sastavljanje problema za jednačinu sa 1 računskom operacijom, postavljenu pomoću sheme (finalni test znanja3)	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
Finalni test znanja1 (množenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-15.24638	7.80866	.169	-34.5521	4.0593
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-15.65378*	4.83344	.006	-27.6037	-3.7039
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	15.24638	7.80866	.169	-4.0593	34.5521
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-.40741	7.68805	1.000	-19.4149	18.6001
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	15.65378*	4.83344	.006	3.7039	27.6037
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	.40741	7.68805	1.000	-18.6001	19.4149
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-5.57971	8.28354	1.000	-26.0595	14.9000
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-12.32045	5.12738	.059	-24.9971	.3562
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	5.57971	8.28354	1.000	-14.9000	26.0595
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-6.74074	8.15560	1.000	-26.9042	13.4227
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	12.32045	5.12738	.059	-.3562	24.9971
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	6.74074	8.15560	1.000	-13.4227	26.9042
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-13.83333	8.02410	.272	-33.6717	6.0050

		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-21.87037*	4.96679	.000	-34.1500	-9.5908
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	13.83333	8.02410	.272	-6.0050	33.6717
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-8.03704	7.90017	.941	-27.5690	11.4949
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	21.87037*	4.96679	.000	9.5908	34.1500
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	8.03704	7.90017	.941	-11.4949	27.5690

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

a. Škola = "Luka Simonović"

Табела 13.а) Утицај одговора састављања проблема 3.5.а$_1$ на резултате финалних тестова знања у експерименталној групи

ANOVA[a]

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Inicijalni test znanja	Between Groups	1954.316	2	977.158	2.862	.066
	Within Groups	18097.398	53	341.460		
	Total	20051.714	55			
Finalni test znanja1 (množenje)	Between Groups	4269.052	2	2134.526	4.435	.017
	Within Groups	25506.788	53	481.260		
	Total	29775.839	55			
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	Between Groups	3249.340	2	1624.670	4.637	.014
	Within Groups	18571.214	53	350.400		
	Total	21820.554	55			
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	Between Groups	5920.630	2	2960.315	13.536	.000
	Within Groups	11591.079	53	218.700		
	Total	17511.710	55			

a. Škola = "Milija Nikčević"

Табела 13.б) Значајности разлика између одговора састављања проблема 3.5.а$_1$ и одговора на финалним тестовима знања у експерименталној групи

Multiple Comparisons[a]

Bonferroni

Dependent Variable	(I) 3.5.a1 - sastavljanje problema za postavljenu jednačinu sa 2 računske operacije (finalni test znanja3)	(J) 3.5.a1 - sastavljanje problema za postavljenu jednačinu sa 2 računske operacije (finalni test znanja3)	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
Finalni test znanja1 (množenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-13.21053	8.57062	.388	-34.4000	7.9790
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-19.50682*	6.56917	.013	-35.7481	-3.2656

	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	13.21053	8.57062	.388	-7.9790	34.4000
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-6.29630	8.12099	1.000	-26.3742	13.7816
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	19.50682*	6.56917	.013	3.2656	35.7481
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	6.29630	8.12099	1.000	-13.7816	26.3742
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-12.27632	7.31315	.297	-30.3569	5.8043
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-16.95224*	5.60535	.012	-30.8106	-3.0939
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	12.27632	7.31315	.297	-5.8043	30.3569
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-4.67593	6.92949	1.000	-21.8080	12.4561
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	16.95224*	5.60535	.012	3.0939	30.8106
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	4.67593	6.92949	1.000	-12.4561	21.8080
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-11.91579	5.77758	.132	-26.2000	2.3684
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-23.00097*	4.42837	.000	-33.9494	-12.0525

	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	11.91579	5.77758	.132	-2.3684	26.2000
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-11.08519	5.47448	.144	-24.6200	2.4496
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	23.00097*	4.42837	.000	12.0525	33.9494
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	11.08519	5.47448	.144	-2.4496	24.6200

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

a. Škola = "Milija Nikčević"

Табела 14.а) Утицај одговора састављања проблема 3.5.a_1 на резултате финалних тестова знања у контролној групи

ANOVA[a]

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Inicijalni test znanja	Between Groups	3059.452	2	1529.726	4.823	.012
	Within Groups	16810.762	53	317.184		
	Total	19870.214	55			
Finalni test znanja1 (množenje)	Between Groups	6099.554	2	3049.777	12.860	.000
	Within Groups	12569.429	53	237.159		
	Total	18668.982	55			
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	Between Groups	4127.792	2	2063.896	7.259	.002
	Within Groups	15069.333	53	284.327		
	Total	19197.125	55			
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	Between Groups	9868.394	2	4934.197	21.205	.000
	Within Groups	12332.815	53	232.695		
	Total	22201.210	55			

a. Škola = "Luka Simonović"

Табела 14.б) Значајности разлика између одговора састављања проблема 3.5.a_1 и одговора на финалним тестовима знања у контролној групи

Multiple Comparisons[a]

Bonferroni

Dependent Variable	(I) 3.5.a1 - sastavljanje problema za postavljenu jednačinu sa 2 računske operacije (finalni test znanja3)	(J) 3.5.a1 - sastavljanje problema za postavljenu jednačinu sa 2 računske operacije (finalni test znanja3)	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Finalni test znanja1 (množenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-21.42857*	6.28701	.004	-36.9722	-5.8849
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-26.42857*	6.28701	.000	-41.9722	-10.8849

	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	21.42857*	6.28701	.004	5.8849	36.9722
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-5.00000	8.23163	1.000	-25.3514	15.3514
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	26.42857*	6.28701	.000	10.8849	41.9722
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	5.00000	8.23163	1.000	-15.3514	25.3514
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-23.33333*	6.88388	.004	-40.3527	-6.3140
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-15.19048	6.88388	.095	-32.2098	1.8288
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	23.33333*	6.88388	.004	6.3140	40.3527
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	8.14286	9.01312	1.000	-14.1407	30.4264
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	15.19048	6.88388	.095	-1.8288	32.2098
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-8.14286	9.01312	1.000	-30.4264	14.1407
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-34.94048*	6.22755	.000	-50.3371	-19.5438
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-25.36905*	6.22755	.000	-40.7657	-9.9724

	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	34.94048*	6.22755	.000	19.5438	50.3371
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	9.57143	8.15378	.737	-10.5875	29.7304
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	25.36905*	6.22755	.000	9.9724	40.7657
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-9.57143	8.15378	.737	-29.7304	10.5875

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

a. Škola = "Luka Simonović"

Табела 15.а) Утицај одговора састављања проблема 3.2.b_1 на резултате финалних тестова знања у експерименталној групи

ANOVA[a]

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Inicijalni test znanja	Between Groups	1629.415	2	814.708	2.344	.106
	Within Groups	18422.299	53	347.591		
	Total	20051.714	55			
Finalni test znanja1 (množenje)	Between Groups	1926.987	2	963.494	1.834	.170
	Within Groups	27848.852	53	525.450		
	Total	29775.839	55			
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	Between Groups	3763.729	2	1881.864	5.524	.007
	Within Groups	18056.825	53	340.695		
	Total	21820.554	55			
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	Between Groups	6836.285	2	3418.143	16.970	.000
	Within Groups	10675.425	53	201.423		
	Total	17511.710	55			

a. Škola = "Milija Nikčević"

Табела 15.б) Значајности разлика између одговора састављања проблема 3.2.b_1 и одговора на финалним тестовима знања у експерименталној групи

Multiple Comparisons[a]

Bonferroni

Dependent Variable	(I) 3.2.b1 - sastavljanje problema za nejednačinu sa 1 računskom operacijom, postavljenu pomoću sheme (finalni test znanja3)	(J) 3.2.b1 - sastavljanje problema za nejednačinu sa 1 računskom operacijom, postavljenu pomoću sheme (finalni test znanja3)	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
Finalni test znanja1 (množenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-11.37302	10.21058	.811	-36.6171	13.8710

		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-12.78315	6.79277	.196	-29.5772	4.0109
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	11.37302	10.21058	.811	-13.8710	36.6171
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-1.41014	9.59241	1.000	-25.1259	22.3056
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	12.78315	6.79277	.196	-4.0109	29.5772
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	1.41014	9.59241	1.000	-22.3056	25.1259
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-15.14286	8.22181	.213	-35.4700	5.1843
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-17.96774*	5.46970	.005	-31.4907	-4.4448
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	15.14286	8.22181	.213	-5.1843	35.4700
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-2.82488	7.72404	1.000	-21.9214	16.2716
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	17.96774*	5.46970	.005	4.4448	31.4907
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	2.82488	7.72404	1.000	-16.2716	21.9214

Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-14.13095	6.32178	.089	-29.7606	1.4987
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-24.48118*	4.20567	.000	-34.8791	-14.0833
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	14.13095	6.32178	.089	-1.4987	29.7606
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-10.35023	5.93904	.262	-25.0336	4.3331
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	24.48118*	4.20567	.000	14.0833	34.8791
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	10.35023	5.93904	.262	-4.3331	25.0336

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

a. Škola = "Milija Nikčević"

Табела 16.а) Утицај одговора састављања проблема 3.2.b_1 на резултате финалних тестова знања у контролној групи

ANOVA[a]

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Inicijalni test znanja	Between Groups	5872.788	2	2936.394	11.118	.000
	Within Groups	13997.426	53	264.102		
	Total	19870.214	55			
Finalni test znanja1 (množenje)	Between Groups	6779.315	2	3389.657	15.110	.000
	Within Groups	11889.668	53	224.333		
	Total	18668.982	55			
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	Between Groups	2577.205	2	1288.603	4.109	.022
	Within Groups	16619.920	53	313.583		
	Total	19197.125	55			
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	Between Groups	4425.457	2	2212.728	6.597	.003
	Within Groups	17775.753	53	335.392		
	Total	22201.210	55			

a. Škola = "Luka Simonović"

Табела 16.б) Значајности разлика између одговора састављања проблема 3.2.b$_1$ и одговора на финалним тестовима знања у контролној групи

Multiple Comparisons[a]

Bonferroni

Dependent Variable	(I) 3.2.b1 - sastavljanje problema za nejednačinu sa 1 računskom operacijom, postavljenu pomoću sheme (finalni test znanja3)	(J) 3.2.b1 - sastavljanje problema za nejednačinu sa 1 računskom operacijom, postavljenu pomoću sheme (finalni test znanja3)	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
Finalni test znanja1 (množenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-15.40811*	5.33820	.017	-28.6060	-2.2102
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-28.77477*	5.56678	.000	-42.5378	-15.0118
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	15.40811*	5.33820	.017	2.2102	28.6060
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-13.36667	6.88181	.172	-30.3809	3.6475
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	28.77477*	5.56678	.000	15.0118	42.5378
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	13.36667	6.88181	.172	-3.6475	30.3809
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-4.87027	6.31138	1.000	-20.4742	10.7336
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-18.82583*	6.58163	.018	-35.0979	-2.5538
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	4.87027	6.31138	1.000	-10.7336	20.4742
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-13.95556	8.13640	.276	-34.0715	6.1604
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	18.82583*	6.58163	.018	2.5538	35.0979
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	13.95556	8.13640	.276	-6.1604	34.0715
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-16.37027*	6.52716	.046	-32.5076	-.2329

		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-20.99249*	6.80664	.010	-37.8208	-4.1641
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	16.37027*	6.52716	.046	.2329	32.5076
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-4.62222	8.41456	1.000	-25.4259	16.1815
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	20.99249*	6.80664	.010	4.1641	37.8208
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	4.62222	8.41456	1.000	-16.1815	25.4259

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.
a. Škola = "Luka Simonović"

Табела 17.а) Утицај одговора састављања проблема 3.5.b_1 на резултате финалних тестова знања у експерименталној групи

ANOVA[a]

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Finalni test znanja1 (množenje)	Between Groups	5616.364	2	2808.182	6.160	.004
	Within Groups	24159.475	53	455.839		
	Total	29775.839	55			
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	Between Groups	4160.870	2	2080.435	6.244	.004
	Within Groups	17659.683	53	333.202		
	Total	21820.554	55			
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	Between Groups	6988.699	2	3494.349	17.600	.000
	Within Groups	10523.011	53	198.547		
	Total	17511.710	55			

a. Škola = "Milija Nikčević"

Табела 17.б) Значајности разлика између одговора састављања проблема 3.5.b_1 и одговора на финалним тестовима знања у експерименталној групи

Multiple Comparisons[a]

Bonferroni

Dependent Variable	(I) 3.5.b1 - sastavljanje problema za postavljenu nejednačinu sa 2 računske operacije (finalni test znanja3)	(J) 3.5.b1 - sastavljanje problema za postavljenu nejednačinu sa 2 računske operacije (finalni test znanja3)	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
Finalni test znanja1 (množenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-16.40741	9.63619	.283	-40.2314	7.4166
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-20.78422*	6.05822	.004	-35.7622	-5.8062

	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	16.40741	9.63619	.283	-7.4166	40.2314
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-4.37681	9.78735	1.000	-28.5745	19.8209
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	20.78422*	6.05822	.004	5.8062	35.7622
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	4.37681	9.78735	1.000	-19.8209	28.5745
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-17.67593	8.23859	.110	-38.0446	2.6927
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-17.13607*	5.17956	.005	-29.9417	-4.3304
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	17.67593	8.23859	.110	-2.6927	38.0446
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	.53986	8.36783	1.000	-20.1483	21.2280
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	17.13607*	5.17956	.005	4.3304	29.9417
		djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-.53986	8.36783	1.000	-21.2280	20.1483
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	-15.59259	6.35963	.053	-31.3158	.1306
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-23.51288*	3.99826	.000	-33.3980	-13.6278
	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	15.59259	6.35963	.053	-.1306	31.3158
		u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana situacija i postavljeno pitanje)	-7.92029	6.45939	.677	-23.8901	8.0495
	u potpunosti sastavljen problem (tačno opisana	nema odgovora ili netačno sastavljen problem	23.51288*	3.99826	.000	13.6278	33.3980

	situacija i postavljeno pitanje)	djelimično sastavljen problem (tačno opisana situacija, ali nedostaje pitanje ili netačno post.pitanje)	7.92029	6.45939	.677	-8.0495	23.8901

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

a. Škola = "Milija Nikčević"

Табела 18.а) Утицај одговора састављања проблема 3.5.b_1на резултате финалних тестова знања у контролној групи

ANOVA[a]

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Finalni test znanja1 (množenje)	Between Groups	4783.547	1	4783.547	18.603	.000
	Within Groups	13885.435	54	257.138		
	Total	18668.982	55			
Finalni test znanja2 (dijeljenje)	Between Groups	2161.086	1	2161.086	6.850	.011
	Within Groups	17036.039	54	315.482		
	Total	19197.125	55			
Finalni test znanja3 (jednačine i nejednačine)	Between Groups	5801.688	1	5801.688	19.104	.000
	Within Groups	16399.521	54	303.695		
	Total	22201.210	55			

a. Škola = "Luka Simonović"

Биографија аутора

Рада Шћепановић рођена је 14.11.1982. године у Никшићу. Основну школу и гимназију „Стојан Церовић“, природно–математички смјер завршила је у Никшићу. Учитељски факултет на Филозофском факултету у Никшићу уписала је школске 2001/2002. године и, као најбољи студент у генерацији, дипломирала 2006. године, са средњом оцјеном 9, 30. Радни однос заснива 2007. године у ЈУОШ „Милија Никчевић“ у Никшићу.

Као студент прве генерације магистарских студија−Методика наставе математике, на Филозофском факултету у Никшићу, магистрирала је 2014. године, са средњом оцјеном „А“ (9,62). Докторске студије−Методика наставе математике на Учитељском факултету у Београду уписује 2017. године и у редовном року полаже све испите предвиђене планом докторских студија, са средњом оцјеном 9,86. Током докторских студија учествовала је на међународним научним скуповима „Савремени приступи у професионалном развоју и раду васпитача и учитеља“, 25. маја 2018. године у Београду и „Нови хоризонти васпитања и образовања“, 28. маја 2022. године у Београду. У научном часопису Методичка теорија и пракса објавила је следеће радове:

•Дидактичка транспозиција аритметичких садржаја у уџбеницима почетне наставе математике, број 1/2018. УДК: 511.1:371.671-053.4 стр.31−44;

•Постављање проблемских задатака за подстицање креативног приступа решавању проблема, број 1/2019.УДК:371.3::5151::159.9.072 стр. 155–170;

•Изометријске трансформације у развоју просторног резоновања, број 1/2019.УДК: 371.3::514]::159.937 стр. 133–154;

У Зборнику радова Педагошког факултета у Ужицу објављен рад:

Шћепановић, Р. & Милинковић, Ј. (2021). *Формативно вредновање постигнућа у математици и одабир задатака*. У: Зборник радова Педагошког факултета у Ужицу. Ур. Снежана Маринковић. Ужице, 23, стр. 127–150.

Током студирања и рада у основној школи похађала је низ семинара стручног усавршавања наставника. Аутор је семинара Дидактичка транспозиција скупа природних бројева у почетној настави математике, који се налази у Каталогу програма стручног усавршавања наставника Завода за школство за школску 2016/17. годину, под редним бројем 41. Носилац је звања наставник–ментор од 27. јануара 2017. године. За школску 2017/18. годину добитник је награде из Фонда за квалитет и таленте Министарства просвјете у Црној Гори.

Изјава о ауторству

Име и презиме аутора: Рада Шћепановић

Број индекса: 3002/2017

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Постављање проблема у циљу вредновања математичких знања

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у цјелини ни у дјеловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нијесам кршио/кршила ауторска права и користио/користила интелектуалну својину других лица.

Аутор

У Београду, 2022. године Рада Шћепановић

Изјава о истовјетности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора: Рада Шћепановић

Број инедкса: 3002/2017

Студијски програм: Методика наставе математике

Наслов рада: Постављање проблема у циљу вредновања математичких знања

Ментор: проф. др Јасмина Милинковић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истовјетна електронској верзији коју сам предао/предала ради похрањивања у **Дигиталном репозиторију Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање акедемског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и мјесто рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Аутор

У Београду, 2022. године Рада Шћепановић

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Постављање проблема у циљу вредновања математичких знања,

која је моје ауторско дјело.

Дисертацију са свим прилозима предао/предала сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучила.

1. Ауторство (CC BY)

2. Ауторство – некомерцијално (CC BY–NC)

3. Ауторство – некомерцијално–без прерада (CC BY–NC–ND)

4. Ауторство – некомерцијално–дијелити под истим условима (CC BY–NC–SA)

5. Ауторство – без прерада (CC BY–ND)

6. Ауторство – дијелити под истим условима (CC BY–SA)

Аутор

У Београду, 2022. године Рада Шћепановић