УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Бр. 1016/3-22
10.01. 20 23. год.
Београд, Студентски трг 16
Тел. 20 27 801, Факс: 26 30 151

Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

Извештај Комисије за оцену научне заснованости теме докторске дисертација кандидата Ане Меркле

Одлуком Научно-наставног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, донетој на седници одржаној 23. децембра 2023. године именовани смо за чланове Комисије за оцену научне заснованости теме докторске дисертације

Стохастичка предвидивост филтрација и процеса по непрекидном параметру

кандидата Ане Меркле. Усмена одбрана предложене теме је одржана 30. децембра 2022. године пред Комисијом. Након излагања кандидата у коме су представљени досадашњи резултати као и неки правци истраживања на којима се ради, уследила је дискусија у којој су предложени још неки могући правци истраживања. Константовано је да је тема научно занована и актуелна.

1 Кратка биографија кандидата

Ана Меркле је рођена 19. маја 1995. године у Београду. Основне студије на Математичком факултету (смер Статистика, актуарска и финансијска математика) је уписала 2014. године и завршила 2018. године са просеком 9.36. Мастер студије на истом смеру завршава 2019. године са просеком 9.75. Докторске студије на Математичком факултету Универзитета у Беогарду (студијски програм Математика) је уписала 2019. године.

Од 2018. године је запослена на Математичком факултету и то прво у звању сарадника у настави за ужу научну област Вероватноћа и статистика, а затим од 2020. године у звању асистента за ужу научну област Вероватноћа и статистика. У том периоду је била ангажована на пројекту Минитарства просвете, науке и технолошког развоја 174012 : Геометрија, образовање и визуализација са применама.

2 Научни рад кандидата

Објављени научни радови

- A. Merkle, Predictability and uniqueness of weak solutions of the stochastic differential equations, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constasnta, 2022. прихваћен за штампу (M22, $IF2021 = 0.886$)
- D. Valjarević, A. Merkle, Statistical causality and measurable separability of σ algebras, Statistics and Probability Letters, 2021. vol. 177, 109166 (M23, IF2020=0.870)

На рецензији се налазе још 2 самостална рада у вези са предложеном темом дисертације.

Саопштења на конференцијама

- A. Merkle, Stochastic Predictability and Applications on Stochastic Differential Equations, Conference on Stochastic Analysis and Stochastic Partial Differential Equations, Centre de Recerca Matematica, Barcelona, 2022.

3 Предмет и садржај докторске дисертације

Један од приоритетних задатака у многим областима науке је проучавање међусобне повезаности различитих појава и испитивање њихове међусобне зависности. Предмет докторске дисертације је дефинисање нових облика зависности између случајних процеса и фамилија σ-алгебри догађаја, односно филтрација. Идеја увођења времена код испитивања зависности и међусобног утицаја појава је значајна и за предвиђање разматраних појава.

У раду ће бити дефинисан нови концепт зависности под називом стохастичка предвидивост, а затим ће бити разматрана веза те релације са познатим дефиницијама зависности. Разматраће се непрекидни случајни процеси јер модели са непрекидним временом имају широку примену у финансијама, екологији, епидемиологији, демографији и многим другим областима науке.

Уводна поглавља ће садржати познате дефиниције и резултате. Нови резултати докторске тезе ће бити приказани у две главе.

Једна глава ће садржати нове теоријске резултате где ће бити дефинисани нови облици зависности између појава. Разматрање ће бити у два главна правца: зависност између филтрација и зависност између случајних процеса и филтрација. Прецизније, у раду ће бити дефинисан облик зависности под називом **стохастичка предвидивост**.

Појам стохастичке предвидивости уведен је преко Теорије мартингала. Резултати и методе из Теорије мартингала представљају једну од главних техника у многим областима Теорије вероватноћа, као што су стохастичка интеграција и марковски процеси и омогућава примену метода Теорије вероватноће за доказивање многих важних резултата у Математичкој анализи.

Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{F}, P)$ простор вероватноћа снабдевен филтрацијом, где је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа и $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t \in T\}$ неопадајућа фамилија σ-алгебри из $\mathcal{A}$, која се назива филтрација. Претпоставља се да све филтрације у раду задовољавају уобичајне услове.

Једна од почетних мотивација за увођење појма стохастичке предвидивости потиче из проблема одређивања услова за слабу јединственост слабих решења стохастичких диференцијалних једначина, а како је приликом испитивања услова за слабу јединственост потребно проверити одређене релације за сваку вероватносну меру P и сваку филтрацију $\mathbf{F}$ за дефинисање стохастичке предвидивости коришћен је изоморфизам између вероватносних простора према идеји Жакода [5], Мемина [6] и Лебедева [9].

Проширење простора вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ је простор вероватноћа $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P})$ ако постоји мерљива сурјективна функција $f : (\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{A})$ таква да је $\hat{P}f^{-1} = P$ на $\mathcal{A}$. Тада за филтрације $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$, $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$ и $\mathbf{J} = \{\mathcal{J}_t\}$ на истом простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ важи

$$\hat{\mathcal{G}}_t = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{G}_t\}, \quad \hat{\mathcal{H}}_t = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{H}_t\}, \quad \hat{\mathcal{J}}_t = \{f^{-1}(A) : A \in J_t\}.$$

Дефиниција 1. Нека су $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$, $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$ и $\mathbf{J} = \{\mathcal{J}_t\}$ филтрације дефинисане на истом простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ са заједничким скупом параметара T. Нека је $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}, \mathbf{J} \subseteq \mathbf{G}$ и нека су

$$H = \{(M_t) : M_t \text{ је } \mathbf{G}\text{-мартингал и } \exists A \in \mathcal{H}_\infty \quad M_t = P(A|\mathcal{G}_t), \forall t \in T\}$$

и

$$J = \{(M_t) : M_t \text{ је } \mathbf{G}\text{-мартингал и } \exists A \in \mathcal{J}_\infty \quad M_t = P(A|\mathcal{G}_t), \forall t \in T\}$$

колекције мартингала. Каже се да је $\mathbf{J}$ стохастички предвидиво са $\mathbf{H}$ у односу на $\mathbf{G}$, ако за свако проширење $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P})$ простора вероватноће $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ са филтрацијама $\hat{\mathbf{F}}$ и $\hat{\mathbf{G}}$ које задовољава

$$\hat{\mathbf{G}} \subseteq \hat{\mathbf{F}}, \ \hat{P}f^{-1} \ll P \text{ на } \mathcal{G}_\infty, \ \frac{d\hat{P}f^{-1}}{dP} \in L^1(\Omega, \mathcal{G}_\infty, P)$$

и за које важи да је
$\hat{H} = \{(\hat{M}_t) : \hat{M}_t(\hat{\omega}) = M_t(f(\hat{\omega})), (M_t) \in H\}$ колекција $\hat{\mathbf{F}}$-мартингала у односу на $\hat{P}$,
мора да важи и да је
$\hat{J} = \{(\hat{M}_t) : \hat{M}_t(\hat{\omega}) = M_t(f(\hat{\omega})), (M_t) \in J\}$ колекција $\hat{\mathbf{F}}$-мартингала у односу на $\hat{P}$.

У раду ће бити приказани и различити алтернативни облици наведене дефиниције. У истом делу ће бити наведене бројне особине новог дефинисаног облика зависности - стохастичке предвидивости, као и веза са другим облицима зависности који су познати у Теорији вероватноће.

У посебној глави ће бити приказана примена наведених теоријских резултата у различитим областима. Резултати ће бити примењени на одређивање услова за слабу јединственост слабих решења стохастичких диференцијалних једначина са Брауновим кретањем и стохастичких диференцијалних једначина са семимартингалима. Стохастичка предвидивост ће бити примењена у теорији мартингала, при решавању мартингалног проблема и проблема мартингалне репрезентације, као и у финансијској математици код моделирања заштите од ризика. Нови концепт зависности ће бити повезан и са појмом мерљиве раздвојености σ-алгебри и филтрација који има широку примену у бајесовској статистици. Биће дате и неке примене у теорији оптималног транспорта.

4 Научни циљ докторске дисертације

Циљ докторске дисертације је добијање нових резултата по угледу на постојеће, на пример, Жакода [5], Флоренса и Фужера [3], који се односе на дефинисање различитих облика зависности између филтрација, као и случајних процеса и филтрација у непрекидном случају јер модели са непрекидним параметром имају широку примену у многим областима науке. Биће разматрана веза уведене релације са познатим дефиницијама зависности и примене добијених разултата у стохастичкој анализи, у теорији мартингала, при решавању мартингалног проблема и проблема мартингалне репрезентације, као и у финансијској математици код моделирања заштите од ризика.

5 Хипотезе од којих се полази

У раду ће бити добијени нови резултати, у терминима стохастичке предвидивости, који се односе на слаба решења стохастичких диференцијалних једначина. Полазна тачка за ове резултате ће бити познати резултати из литературе исказани преко других појмова из теорије случајних процеса, специјално Теорије мартингала и процеса Брауновог кретања. Такође се претпоставља да се уведени облик зависности може применити у различитим областима науке за добијање једноставнијих облика познатих резултата, као и за добијање нових резултата. Претпоставља се и да се уведени појмови и добијени резултати могу применити за предвиђање појава које се мењају у времену.

6 Методе које се користе у истраживању

У раду ће бити примењене главне методе стохастичке анализе: условно математичко очекивање, условна независност, стохастичка интеграција по процесу Брауновог кретања и по семимартингалима, Итов метод диференцирања случајних процеса. Биће примењене и методе функционалне анализе које се односе на меру - вероватноћу.

7 Преглед литературе

Претходни резултати из области

1. A. Calzolari, B. Torti, A Note on the Strong Predictable Representation Property and Enlargement of Filtration. Mathematics, 10, 2022.

2. D. Coculescu, M. Jeanblanc, A. Nikeghbali, Default times, no-arbitrage conditions and changes of probability measures, Finance and Stochastics, 16(3):513-535, 2012.

3. J.P. Florens and D. Fougères. Noncausality in continuous time. Econometrica, (64(5)):1195-1212, 1996

4. H. Föllmer P. Protter, Local martingales and filtration shrinkage, in Rencontres Probabilistes a l'occasion du 60ème anniversaire de Marc Yor, ESAIM Probability and Statistics, 14, 825-838, 2011.

5. J. Jacod, Weak and strong solutions of stochastic differential equations. Stochastics, (3):171-191, 1980.

6. J. Jacod and J. Memin, Existence of weak solutions for stochastic dif- ferential equation with driving semimartingales. Stochastics, 4:317-337, 1981.

7. T. Kurtz, Weak and strong solutions of general stochastic models, Electron. Commun. Probab. 19, no. 58, 1-16 2014.

8. T. Kurtz, Equivalence of stochastic equations and martingale problems. Stochastic Analysis 2010. Dan Crisan, Ed., 113-130, 2011.

9. V.A. Lebedev. On the existence of weak solutions for stochastic diffe- rential equations with driving martingales and random measures. Stoc- hastics, 9:37–76, 1981.

10. A. Nikeghbali, An essay on the general theory of stochastic processes, Prob. Surveys, 3, 345-412, 2006.

11. J. Peng, On weak solutions of SDEs with singular time-dependent drift and driven by stable processes, Stochastics and DynamicsVol. 18, No. 02, 2018.

12. A. Sokol, N. Hansen, Causal interpretation of stochastic differential equations. Electronic Journal of Probability. 19, 2013.

Преглед додатне литературе која ће се користити

1. R. B. Ash and C. A. Dolèans-Dade. Probability Measure Theory. Harcourt Academic Press, 2000.

2. P. Billingsley. Convergence of Probability Measures. John Wiley and Sons, New York, 1968.

3. P. Bremaund and M. Yor. Changes of filtration and of probability measures. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 30:269-295, 1978

4. C. Dellacherie and P. A. Meyer. Probabilitès et potentiel, Vol. I. Hermann, Paris, 1975.

5. R. J. Eliot. Stochastic Calculus and Applications. Springer-Verlag, 1982.

6. K. Ito. Stochastic integral. Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20:519-524, 1944.

7. J. Jacod and A. Shiryaev. Limit Theorems for Stochastic Processes. Springer, 2003.

8. T. G. Kurtz. Lectures on Stochastic Analysis. Preprint, 2001.

9. R.S. Liptser and A. N. Shiryaev. Statistics of Radnom Processes, volume I and II. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

10. M. Mouchart and J.M. Rolin. A note on conditional independence with statistical applications. Statistica, 557-584, 44(4), 1985.

11. P.A. Mykland. Statistical causality, report no.14. University of Bergen, pages 1-26, 1986.

12. B. Øksendal. Stochastic Differential Equations. Springer, 2003.

13. P. E. Protter. Stochastic Integration and Differential Equations. Springer, 2004.

14. D. Revuz and M. Yor. Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer, 1998.

15. D.W. Strook and M. Yor. On extremal solutions of martingale problems. Am.Scient, Escole Norm. Sup., pages 95-164, 1980.

8 Закључак и предлог комисије

Предложена тема припада области стохастичке анализе. Досадашњи и резултати који се очекују ће представљати научни допринос теорији стохастичких диференцијалних једначина и решавању проблема мартингалне репрезентације. Очекује се и примена у финансијској математици. Кандидат је до сада објавио 2 рада, у вези са дисертацијом, у часописима на *SCI*-листи. Због свега наведеног, предлажемо Научно-наставном већу Математичког факултета да донесе одлуку о прихватању теме докторске дисертације **Стохастичка предвидивост филтрација и процеса по непрекидном параметру** кандидата Ане Меркле, и за менторе одреди проф. др Миљану Јовановић, редовног професора Природно-математичког факултета Универзитета у Нишу и академика Стевана Пилиповића.

У Београду, 10. јануара 2023.

Бојана Милошевић

проф. др Бојана Милошевић

Јелена Јоцковић

доц. др Јелена Јоцковић

Марија Милошевић

проф. др Марија Милошевић,
Природно-математички факултет у Нишу