Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

Одлуком Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду на 396. седници одржаној 23. септембра 2022. године именовани смо за чланове Комисије за оцену докторске дисертације под насловом

**„Шести момент Дирихлеових $L$-функција над рационалним функцијским пољима“**

кандидата Драгана Ђокића. Након прегледања дисертације Комисија подноси Наставно-научном већу Математичког факултета следећи

# ИЗВЕШТАЈ

## 1 Основни подаци о кандидату и дисертацији

Кандидат **Драган Ђокић** је рођен 24. фебруара 1992. године у Лесковцу. Основну школу је завршио у Ораовици и Грделици, а гимназију у Лесковцу. Школске 2011./2012. године уписао је Основне академске студије на Математичком факултету у Београду и завршио их 2015. године са просечном оценом 10 (смер Теоријска математика и примене). Мастер студије на Математичком факултету је завршио 2016. године са просечном оценом 10 одбранивши мастер рад под насловом „Аритметика целобројних Аполонијевих конфигурација кругова“ под менторством проф. др Горана Ђанковића. Добио је Награду Математичког института Српске академије наука и уметности за најбољи мастер рад у области математике и механике. На истом факултету је уписао докторске студије школске 2016./2017. године, на којима је положио свих осам испита са просечном оценом 10.

Од 2015. године Драган Ђокић је запослен на Математичком факултету на Катедри за алгебру и математичку логику (од 2015. до 2017. као сарадник у настави, а од 2017. као асистент). Држао је вежбе из предмета Теорија бројева 1, Линеарна алгебра, Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, Алгебра 1, Алгебра 2, Дискретна математика, Методика наставе математике и рачунарства и Методика наставе математике А. Био је члан пројекта 174012 Министарства науке, технолошког развоја и иновација Републике Србије, под називом „Геометрија, образовање и визуелизација са применама“, од 2016. до 2020. године.

**Наслов дисертације**: Шести момент Дирихлеових $L$-функција над рационалним функцијским пољима.

**Обим дисертације и библиографија**: Дисертација се састоји из $113 + \text{xi}$ страна и 3 прилога (изјава о ауторству, изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада и изјава о коришћењу). Дисертација садржи 16 глава (укључујући и увод), литературу и биографију аутора. У литератури су наведене 84 референце.

## 2 Предмет и циљ докторске дисертације

Тема дисертације припада *Аналитичкој теорији бројева.* Ова област проучава просте бројеве и њихову расподелу, као и аналитички објекат (мероморфну функцију) који ту расподелу контролише - Риманову зета-функцију. Слично, да би се проучавала расподела простих бројева у аритметичким прогресијама, Дирихле је увео нове аналитичке објекте - Дирихлеове $L$-функције.

Расподела простих бројева је директно условљена расподелом нула, а посредно и расподелом величине Дирихлеових $L$-функција на тзв. критичној линији $\Re(s) = 1/2$. Све ове $L$-функције задовољавају функционалну једначину облика $L(s) = (\text{гама-фактори}) \cdot L(1-s)$, па је $\Re(s) = 1/2$ линија симетрије. На крају крајева, хипотеза да се све нетривијалне нуле оваквих $L$-функција налазе на критичној линији је *Риманова хипотеза*, најзначајнији отворени проблем математике.

Зато је проучавање момената $L$-функција, тј. њихових средњих вредности у неким добро дефинисаним фамилијама, један од кључних циљева аналитичке теорије бројева, поготово од Монтгомеријевог открића да се расподеле размака између ордината нула $\zeta$-функције статистички подударају са одговарајућим расподелама размака између аргумената сопствених вредности великих унитарних матрица. Ова веза $L$-функција и *Теорије случајних матрица* је један од основних покретачких принципа у области данас. Теорија случајних матрица је уведена и развијена за потребе физике - моделовање језгара тешких атома, у физици чврстог стања, квантном хаосу итд.

Асимптотску формулу, за други и четврти момент Риманове зета функције на критичној линији

$$\int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^{2k} dt, \qquad T \to \infty$$

су доказали Харди и Литлвуд ($k = 1$), односно Ингам ($k = 2$). Одговарајући резултат за $k \geq 3$ није познат и већ шести момент представља један од чувених отворених проблема у области.

Докторска дисертација се бави двоструко аналогном ситуацијом - најпре, уместо вредности Риманове зета-функције дуж критичне линије, предмет проучавања су вредности фамилије Дирихлеових $L$-функција, и додатно уместо фамилије над пољем рационалних бројева $\mathbb{Q}$, посматрају се одговарајуће $L$-функције над рационалним функцијским пољима $\mathbb{F}_q(\mathrm{x})$, где је $\mathbb{F}_q$ коначно поље.

Циљ дисертације је добијање асимптотске формуле за шести момент вредности $L(1/2 + it, \chi)$ где $\chi$ пролази фамилијом примитивних Дирихлеових карактера за модул $Q$, при чему модул $Q$ такође пролази свим полиномима фиксираног степена над $\mathbb{F}_q$, а аргументи такође варирају по критичном кругу (над функцијским пољима постоји $2\pi i$-периодичност по $s$-променљивој). Сва ова додатна усредњавања су тренутно неопходна да би се извела асимптотска формула. Циљ је да се у главном члану идентификује константа и потврди њено поклапање са хипотетичком константом изведеном применом Теорије случајних матрица (интеграцијом одговарајућих момената вредности карактеристичних полинома по унитарним групама $U(N)$, где параметар $N$, грубо говорећи, одговара $\log T$ у дефиницији момената $\zeta$-функције).

## 3 Основне хипотезе од којих се полазило у истраживању

Аналогна фамилија али над пољем $\mathbb{Q}$, је проучавана у раду J. B. Conrey, H. Iwaniec, K. Soundararajan - Geom. Funct. Anal., 22 (2012): 1257-1288. Горња поставка се разликује због специфичности $t$-аспекта $L$-функција над функцијским пољима, али над функцијским пољима постоје разни додатни алати, који не постоје над $\mathbb{Q}$, што је указивало на потенцијалну могућност извођења асимптотске формуле. Додатно, потенцијални алати за рад са $L$-функцијама над функцијским пољима су се појавили у скорашњој докторској тези Александре Флорее, Moments and zeros of $L$-functions over function fields, Stanford, 2017. за другачију фамилију *квадратних* (реда 2) Дирихлеових карактера.

## 4 Кратак опис садржаја дисертације

Главни део дисертације се састоји из 16 глава.

Прва глава је уводног карактера. У њој су дефинисане $\zeta$ и $L$ функције над пољем $\mathbb{Q}$, и приказана је њихова повезаност са расподелом простих бројева као мотивација за даље изучавање. У овој глави су дати неки познати резултати о моментима $\zeta$ и $L$ функција. Затим, приказана су и

нека отворена питања и хипотезе у области, које се углавном заснивају на Теорији случајних матрица.

Друга глава преноси причу о $L$-функцијама на рационална функцијска поља, и приказује аналогију ових поља са пољем рационалних бројева.

У трећој глави су дати основни резултати дисертације у виду две теореме и једне последице.

Четврта глава садржи неке помоћне резултате о функцијским пољима, Дирихлеовим $L$-функцијама и њиховом уопштењу – $L$-функцијама придруженим Хајесовим карактерима.

У петој глави је изведена „апроксимативна“ функционална једначина за производ шест Дирихлеових $L$-функција, који се појављује у главној теореми. Ова једначина омогућава да се преполови дужина сумације, што ће бити кључно у даљем доказу.

У шестој глави је уведена сума $\mathcal{I}$. Њена асимптотика је еквивалент главног резултата дисертације. Сума $\mathcal{I}$ је анализирана и разложена на делове како би се препознали (асимптотски) највећи доприноси у тој суми и одвојили од остатка који је прихватљиво мали.

На основу плана направљеног у шестој глави, делови суме $\mathcal{I}$ су детаљно анализирани и оцењени у главама 7, 8, 9, 10, 11, 12 и 14. Помоћу свих добијених резултата склапа се доказ главне теореме о шестом моменту у тринаестој глави.

Последње две главе се баве једним специјалним, али и најважнијим случајем претходне теореме - шестим моментом $L$-функција без помераја. Тај резултат је дат у две различите формулације, а главе 15 и 16 су заправо њихови појединачни докази.

# 5 Остварени резултати и научни допринос дисертације

Главни резултат дисертације је асимптотска формула за шести момент Дирихлеових $L$-фунцкија над рационалним функцијским пољем $\mathbb{F}_q(\mathrm{x})$. Овде се под моментом мисли на усредњење $L$-функције по:

- Критичном кругу $\frac{1}{2} + it$ (јер су $L$-функције $\frac{2\pi i}{\log q}$-периодичне).
- Непарним Дирихлеовим карактерима по модулу $Q$. Сума по таквим карактерима је означена са $\sideset{}{^\flat}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q)}$, а њихов број са $\varphi^\flat(Q)$.

- Полиномима $Q$ из скупа $\mathcal{M}_{\mathbf{d}}$ свих моничних полинома фиксираног степена $\mathbf{d}$ са коефицијентима у коначном пољу $\mathbb{F}_q$.

Сва ова три усредњења су тренутно неопходна, јер је шести момент са мање усредњења и даље отворено питање. Са друге стране, овакво усредњење по мултипликативним карактерима у овој фамилији је мотивисано теоремом Бомбијери-Виноградова.

Уз напомену да $\mathcal{P}$ означава скуп свих простих (нерастављивих) полинома, а $|\cdot|$ норму полинома над функцијским пољима, главни резултат дисертације је следећа теорема.

**Теорема 1** *Кад позитиван цео број* $\mathbf{d} \to \infty$*, важи*

$$\sum_{Q \in \mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \sideset{}{^\flat}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q)} \int_0^{\frac{2\pi}{\log q}} \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)\right|^6 \frac{dt}{\frac{2\pi}{\log q}}$$
$$\sim \frac{42\, a_{3,q}}{9!} \mathbf{d}^9 \sum_{Q \in \mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \varphi^\flat(Q) \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P | Q}} \frac{\left(1 - \frac{1}{|P|}\right)^5}{1 + \frac{4}{|P|} + \frac{1}{|P|^2}}, \tag{1}$$

*где је*

$$a_{3,q} = \prod_{P \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{|P|}\right)^4 \left(1 + \frac{4}{|P|} + \frac{1}{|P|^2}\right).$$

Претходна теорема је изражена у овом облику како би се видело поклапање са постојећим хипотезама. Затим је сума на десној страни (1) асимптотски оцењена, чиме је добијена следећа последица.

**Последица 2** *Кад позитиван цео број* $\mathbf{d} \to \infty$ *важи*

$$\sum_{Q \in \mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \sideset{}{^\flat}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q)} \int_0^{\frac{2\pi}{\log q}} \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)\right|^6 \frac{dt}{\frac{2\pi}{\log q}} \sim \frac{42\, \widetilde{a}_{3,q}}{9!} \frac{q-2}{q-1} q^{2\mathbf{d}} \mathbf{d}^9,$$

*где је*

$$\widetilde{a}_{3,q} = \prod_{P \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{|P|}\right)^5 \left(1 + \frac{5}{|P|} - \frac{5}{|P|^2} + \frac{14}{|P|^3} - \frac{15}{|P|^4} + \frac{5}{|P|^5} + \frac{4}{|P|^6} - \frac{4}{|P|^7} + \frac{1}{|P|^8}\right).$$

У дисертацији је затим дато уопштење Теореме 1 у виду шестог момента са померајима. Оно се односи на комплетирану $L$-функцију

$$\Lambda\left(\frac{1}{2} + s, \chi\right) = q^{\frac{(\deg Q - 1)s}{2}} L\left(\frac{1}{2} + s, \chi\right),$$

која задовољава симетричну функционалну једначину $\Lambda(s,\chi) = \Lambda(1-s,\overline{\chi})$. Посматрани су мали комплексни помераји $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{C}^3$, и производ шест $L$-функција:

$$\Lambda(\chi; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \prod_{j=1}^{3} \Lambda\left(\frac{1}{2} + \alpha_j, \chi\right) \Lambda\left(\frac{1}{2} - \beta_j, \overline{\chi}\right).$$

Коришћене су ознаке $\boldsymbol{\alpha}+s = (\alpha_1+s, \alpha_2+s, \alpha_3+s)$ за транслирани померај, као и $\pi(\boldsymbol{\alpha})$ и $\pi(\boldsymbol{\beta})$ за прве и последње три координате шесторке $\pi(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, где је $\pi$ пермутација из $\mathbb{S}_6$.

**Теорема 3** *Нека* $\mathbf{d} \to \infty$ *по позитивним целим бројевима, и нека су* $\boldsymbol{\alpha}$ *и* $\boldsymbol{\beta}$ *две тројке комплексних бројева такве да је* $\alpha_j, \beta_j \ll \frac{1}{\mathbf{d}}$, *за* $j = 1, 2, 3$. *Тада за свако* $\varepsilon > 0$ *важи*

$$\begin{aligned}
&\sum_{Q \in \mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \sideset{}{^\flat}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, Q)} \int_0^{\frac{2\pi}{\log q}} \Lambda(\chi; \boldsymbol{\alpha} + it, \boldsymbol{\beta} + it) \frac{dt}{\frac{2\pi}{\log q}} \\
&= \sum_{Q \in \mathcal{M}_{\mathbf{d}}} \varphi^\flat(Q) \widetilde{\mathcal{Q}}(Q; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + O\left(q^{\mathbf{d}\left(\frac{7}{4}+\varepsilon\right)}\right),
\end{aligned}$$

*где је*

$$\widetilde{\mathcal{Q}}(Q; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{\pi \in \mathbb{S}_6/(\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3)} \mathcal{Q}(Q; \pi(\boldsymbol{\alpha}), \pi(\boldsymbol{\beta}))$$

*а* $\mathcal{Q}$ *је мероморфна функција експлицитно формулисана у дисертацији.*

У поређењу са аналогним резултатом над пољем $\mathbb{Q}$ (Теорема 1 у J. B. Conrey, H. Iwaniec, K. Soundararajan - Geom. Funct. Anal., 22 (2012): 1257-1288) Теорема 3 доноси два побољшања: оштрију оцену за грешку и експлицитнији израз за главни члан.

# 6 Објављени и саопштени резултати

### Објављени радови који су у вези са темом докторске дисертације

1. G. Djanković, **D. Đokić**: *The sixth moment of Dirichlet L-functions over rational function fields*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 514(1): 126296, 2022., ISSN: 0022-247X, DOI: 10.1016/j.jmaa.2022.126296, IF 2021: 1.417, M21.

2. G. Djanković, **D. Đokić**: *The mixed second moment of quadratic Dirichlet L-functions over function fields*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 51(6): 2003-2017, 2021., ISSN: 0035-7596, DOI: 10.1216/rmj.2021.51.2003, IF 2021: 0.813, M23

**Остали објављени радови**

1. G. Djanković, **D. Đokić**, N. Lelas: *The triple reciprocity law for the twisted second moments of Dirichlet L-functions over function fields*, Proceedings of the American Mathematical Society, 149: 2851-2860, 2021., ISSN: 0002-9939, DOI: 10.1090/proc/15507, IF 2020: 0.971, M22.

2. **D. Đokić**, N. Lelas, I. Vrećica: *Large values of Dirichlet L-functions over function fields*, International Journal of Number Theory, 16(5): 1081-1109, 2020., ISSN: 1793-0421, DOI: 10.1142/S1793042120500566, IF 2020: 0.674, M23,

3. **D. Đokić**: *A Note on the distribution of angles associated to indefinite integral binary quadratic forms*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 69, No. 2 (2019), pp. 443 - 452, ISSN: 0011-4642, DOI: 10.21136/CMJ.2018.0370-17, IF 2019: 0.412, M23.

4. G. Djanković, **D. Đokić**, N. Lelas, I. Vrećica: *On some hybrid power moments of products of generalized quadratic Gauss sums and Kloosterman sums*, Lithuanian Mathematical Journal, Vol. 58, No. 1 (2018), pp. 1 - 14, ISSN: 0363-1672, DOI: 10.1007/s10986-018-9383-6, IF 2018: 0.566, M22.

**Саопштења на научним скуповима која су у вези са темом докторске дисертације**

1. **Д. Ђокић**: *Шести момент Дирихлеових L-функција над рационалним функцијским пољима*, II конгрес младих математичара, Нови Сад, 29. септембар - 1. октобар 2022.

2. **D. Đokić**: *The sixth moment of Dirichlet L-functions over rational function fields*, XXI Geometrical Seminar, Belgrade, June 26 - July 2 2022.

3. G. Djanković, **D. Đokić**: *The sixth moment of Dirichlet L-functions over rational function fields*, Symposium "Mathematics and Applications", Belgrade, December 3 - 4 2021.

**Остала сопштења на научним скуповима**

1. G. Djanković, **D. Đokić**, N. Lelas, I. Vrećica: *The fourth moment and large values of Dirichlet L-functions over rational function fields*, X Symposium "Mathematics and Applications", Belgrade, December 6 - 7 2019.

2. **D. Đokić**: *Distribution of the angles associated to indefinite integral binary quadratic forms*, XX Geometrical Seminar, Vrnjačka Banja, May 20 - 23 2018.

**Учешћа на летњим школама и научним скуповима**

1. Automorphic Forms Summer School, Budapest, August 29 - September 2 2022.
2. Building Bridges: 5th EU/US Summer School + Workshop on Automorphic Forms and Related Topics, Sarajevo, August 1 - 13 2022.
3. A Workshop on Moments of $L$-functions, Northern British Columbia, July 25 - 29 2022.
4. 50 Years of Number Theory and Random Matrix Theory Conference, Institute for Advanced Study, Princeton, June 21 - 24 2022.
5. SSANT2021 Summer School in analytic number theory, Paris, June 28 - July 2 2021.
6. Hausdorff Summer School: Polynomial Methods, Bonn, June 7 - 17 2021.
7. Hausdorff Summer School: The Circle Method - Entering its Second Century, Bonn, May 10 - 21 2021.
8. Hausdorff Summer School: $L$-functions - Open problems and current methods, Bonn, June 25 - 29 2018.
9. XIX Geometrical Seminar, Zlatibor, August 28 - September 4 2016.

# 7 Закључак

Дисертација *„Шести момент Дирихлеових L-функција над рационалним функцијским пољима“* се бави једном од централних проблематика у аналитичкој теорији бројева – одређивањем асимптотике момената $L$-функција у добро дефинисаним фамилијама. Проучавани шести момент је на самој граници свих постојећих техника у области. Кандидат је у тези демонстрирао техничко умеће изводећи веома компликоване аргументе и процене. Проучио је и обимну литературу, показао одлично познавање области и оспособљеност за самостално истраживање.

Кандидат Драган Ђокић је до сада објавио шест радова у часописима са SCI листе, од тога један самосталан. На основу свега наведеног, како су испуњени и сви формални услови, предлажемо да се рукопис *„Шести момент Дирихлеових L-функција над рационалним функцијским пољима“* **прихвати** као докторска дисертација из математике и да се закаже његова јавна одбрана.

У Београду, 16. новембра 2022. године

Чланови комисије:

---

проф. др Александар Липковски, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

---

проф. др Марко Радовановић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

---

проф. др Драган Станков, ванредни професор
Универзитет у Београду, Рударско-геолошки факултет

---

др Тања Стојадиновић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет