

Наставно-научном већу Математичког факултета  
Универзитета у Београду

Извештај Комисије за преглед и оцену докторске дисертације

*"Дискриминантно сепарабилни полиноми  
и интеграбилни динамички системи"*

кандидата мр Катарине Кукић

Дисертација има 138 куцаних страна и чине је: Садржај (3-4), Резиме (на српском и енглеском језику) (5-6), Предговор (7-8), осам глава

1. Увод (9-14),
2. Преглед појмова (15-34),
3. Случај Коваљевске (35-54),
4. Дискриминантно сепарабилни полиноми (55-62),
5. Интеграбилни системи типа Коваљевске (63-84)
6. Друге методе за конструисање система типа Коваљевске (85-102)
7. Дискриминантно сепарабилни полиноми типа  $P_3^2$  (103-114)
8. Дискриминантна сепарабилност и квад-графови (115-131)  
и Литература (132-138).

Тема ове дисертације је из области алгебарско-геометријске интеграције интеграбилних динамичких система, тачније анализа алгебарских и геометријских структура и конфигурација аналогних класичној интеграцији Коваљевске из динамике крутог тела. Полазне савремене структуре су дискриминантно-сепарабилни полиноми,  $n$ -значне Бухштабер-Новиковљеве групе и интеграбилни квад-графови. Кључне речи и изрази су: системи типа Коваљевске, случај Коваљевске, дискриминантно сепарабилни полиноми, интеграбилни квад-графови, дво-вредносне Бухштабер-Новиковљеве групе, елиптичке и хипер-елиптичке криве.

Основни предмет дисертације је даље изучавање недавно уведеног појма дискриминантно сепарабилних полинома и то у случају када су они степена два по свакој од три променљиве (над пољима реалних и комплексних бројева) и конструкција интеграбилних динамичких система које су са овим полиномима повезани. У дисертацији су решена три основна проблема:

- Дата је класификација строго-дискриминантно сепарабилних полинома степена два по свакој од три променљиве до на групу баждарних Мебијусових трансформација;
- Уведена је нова класа интеграбилних система - типа Коваљевске, дате су методе конструисања оваквих система и њихова експлицитна интеграција у тета-функцијама рода два, базирана на дискриминантној сепарабилности;
- Конструисан је морфизам из скупа дискриминантно сепарабилних полинома степена два по свакој од три променљиве у скуп интеграбилних квад-графова у смислу Адлера, Бобенка и Суриса. Показана је корелација између класификације оваквих дискриминантно сепарабилних

полинома и класификације интегралних квад-графова типа  $Q$ , коју су дали Адлер, Бобенко и Сурис 2009.

Дисертација се састоји из осам делова. У првој, уводној глави, су представљени основни појмови дискриминантно сепарабилних полинома, њихове баждарне еквивалентности, мотивише се њихово увођење у вези са интеграцијом Ковалевске, формулисани су основни задаци који стоје пред дисертацијом, и дат је преглед рада по главама.

У другој глави се уводе појмови симплектичке и Пуасонове структуре, Хамилтонових система, инваријантне мере, елиптичких кривих и елиптичких функција, Риманових површи и њихових Јакобијана, тета-функција. Глава се завршава детаљнијим приказом Ојлер-Пуасонових једначина динамике крутог тела са непокретном тачком, Пуасонове структуре и Хамилтонијана.

У трећој глави је дата анализа и синтеза случаја Ковалевске, кроз приказ кључних корака из радова саме Ковалевске, Кетера и Голубова. Детаљна логичка анализа која је у овој глави представљена је у великој мери оригинална и чини основ за касније увођење нове класе интегралних динамичких система типа Ковалевске. У последњем поглављу 3.3 кандидат је демострирао и завидан степен мајсторства у владању апаратом тета-функција, раскривши прилично криптоване формуле које је Ковалевска изложила у седмом параграфу свог чувеног рада. Део резултата ове главе је објављен у [1].

У четвртом делу је дат преглед недавно уведене теорије дискриминантно сепарабилних полинома.

У петој глави, која је у потпуности оригинална, даје се преглед резултата из радова [2, 3, 4]. Поглавље 5.1 "Системи типа Ковалевске - увод" постављају се основни захтеви које системи типа Ковалевске морају испуњавати. Главни резултат овог дела јесте Теорема 5.1.2 која даје процедуру трансформације за све системе типа Ковалевске. Дат је у 5.2 пример новог интегралног система који се своди на један строго дискриминантно сепарабилан полином различит од фундаменталне једначине Ковалевске, а затим је дата и његова експлицитна интеграција. У параграфу 5.3 детаљно се третира подкласа система типа Ковалевске у коју се убрајају и случај Ковалевске и модални пример.

Глава 6 подељена је на четири поглавља, и базирана је на раду [4]. У 6.1 излаже се још један метод за конструкцију система типа Ковалевске. Поглавље 6.2 представља илустрацију предложеног метода на још два конкретна примера. У поглављу 6.3 формулише се Теорему 6.3.1 која је аналогон Теорему 5.1.2, али за промењене почетне услове. Доказ поменуте теореме показује како се мала промена почетних услова за систем типа Ковалевске корак по корак рефлектује на процедуру трансформације таквих система. У поглављу 6.4 показује се како се најједноставнијом баждарном афином трансформацијом параметра  $s$  може од система Ковалевске доћи до такозване Ђурђевићеве сластике. Дају се и експлицитна решења овог система.

Глава 7 подељена је на два поглавља и представља оригиналне резултате из [4]. Поглавље 7.1 даје неке релације које задовољавају строго дискрим-

инантно сепарабилни полиноми степена два по свакој од три променљиве. Поглавље 7.2 даје класификацију строго дискриминантно сепарабилних полинома у односу на Мебијусове баждарне трансформације. Главни резултат и геометријска интерпретација дати су у Теорему 7.2.1. У наставку показује се да је у случају када полином  $P$  има четири просте нуле, њему одговарајући строго дискриминантно сепарабилан полином еквивалентан дво-вредносним групама Бухштабер-Новикова, то је Последица 7.2.5.

Глава 8 подељена је на два поглавља и излаже део резултата из [4]. Поглавље 8.1 садржи преглед основних појмова који се тичу теорије Адлера, Бобенка и Суриса о квад-графовима. Појмови који се појављују у овом поглављу, дискретни интеграбилни системи, конзистенција, квад-једначина представљају основ савремене дискретне диференцијалне геометрије и кључни су за разумевање везе између дискриминантно сепарабилних полинома и квад-графова. Последње поглавље 8.2 зове се Дискриминантно сепарабилни полиноми типа  $P_3^2$  и квад-графови и конструише паралелу између дискриминантно сепарабилних полинома и интеграбилних квад-графова. Полазећи од сваког дискриминантно сепарабилног полинома од три променљиве, степена два по свакој променљивој, конструише се експлицитно њему одговарајући интеграбилни квад-граф типа  $Q$ , што је основни резултат ове главе. Класификацију интеграбилних квад-графова типа  $Q$  дали су Адлер, Бобенко и Сурис 2009. године, што је изложено у Теоремама 8.1.4 и 8.1.5. Дисертација се завршава анализом паралеле између ових резултата и класификације дискриминантно-сепарабилних полинома из главе 7, Теорема 7.2.1.

### Публиковани радови и саопштења

Део резултата дисертације је објављен, односно саопштен у:

- [1] K. Kukić: Different approaches to Kowalevski top, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 35 (2008) no. 4, 346–361
- [2] V. Dragović, K. Kukić, New examples of systems of the Kowalevski type, Regular and Chaotic Dynamics, Vol. 16 (2011) no. 5, 484–495, (Impact Factor 0,529)
- [3] V. Dragović, K. Kukić, Discriminant separability and systems of Kowalevski type, Proceedings the Third Serbian Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Vlasina lake, 5–8 July 2011
- [4] V. Dragović, K. Kukić, Systems of Kowalevski type. Discriminant separability and quad-graphs, Preprint: arXiv 1106.5770, 63 strane
- [5] K. Kukić, Different approaches to Kowalevski top, Proceedings 1st International Congress of Serbian Society of Mechanics, 10-th April 2007, Kopaonik, 975–980
- [6] K. Kukić, The Kowalevski type systems and discriminantly separable polynomials, 35 min. talk, III International Conference GEOMETRY, DYNAMICS, INTEGRABLE SYSTEMS - GDIS 2011, 10–16 September 2011, Lisbon-Sintra, Portugal
- [7] K. Kukić, Systems of the Kowalevski type. Discriminant separability, ESF-EMSERCOM Research Conference on Completely Integrable Systems and Applications, Erwin Schrödinger Institute, Vienna, Austria, 3 – 8 July 2011

- [8] K. Kukić, New integrable systems of the Kowalevski type, University of Jena, Germany, 14–19 February 2011
- [9] К. Кукић, Системи типа Ковалејевске и дискриминантно сепарабилни полиноми, Семинар Математички методи механике, Математички институт САНУ, 21. септембар 2011

### Научни циљ докторске дисертације

Случај Ковалејевске из динамике обратања крутог тела око непокретне тачке представља антологијски пример најславнијег задатка у класичној историји интеграбилних динамичких система, који је имао директни утицај на развој више научних дисциплина. У последњих 120 година не престаје да привлачи интересовање широког круга истраживача из целог света. Написане су десетине књига, стотине изнадних радова (Кетер, Голубов, Козлов, Ван Моербек, Хорозов, Бобенко, Семјонов Тјеншански, Ђурђевић, Магри, Аудин, Соколов...). Па ипак, дубина рада Ковалејевске и њена имагинација у поставци задатка и интеграцији нису до краја одгонетнути. Циљ ове дисертације је да се систематски изуче везе између недавне теорије дискриминантно сепарабилних полинома и интеграбилних динамичких система, које треба да, између осталог, баце и ново светло на чигру Ковалејевске и њену интеграцију. Испоставља се да су за достизање овога циља потребна јака, како класична средства теорије Риманових површи, тако и савремена средства теорије  $n$ -вредносних група Бухштабера-Новикова и дискретне диференцијалне геометрије Адлера, Бобенка и Суриша.

Велики интерес за ову тематику илустроваћемо и чињеницом да је рад кандидата [1], већ цитиран у раду познатог специјалисте у области интеграбилних динамичких система

A. Lesfari, Algebraic Integrability: the AdlerVan Moerbeke Approach, Regular and Chaotic Dynamics, Vol. 16 (2011) no. 34, 187-209.

Поменимо на крају да је кандидат Катарина Кукић добила и престижну награду "Растко Стојановић" 2007. године за неке од својих почетних научних резултата.

### Закључак и предлог

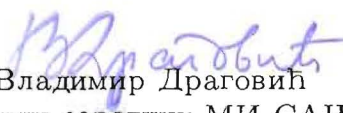
Дисертација *"Дискриминантно сепарабилни полиноми и интеграбилни динамички системи"* кандидата мр Катарине Кукић представља заокружен и оригинални научни рад који значајно доприноси развоју Геометрије интеграбилних динамичких система. Рад се бави актуелном тематиком и прилично је комплексан, јер дотиче више области алгебре, геометрије и динамике механичких система. Тако је кандидат показала висок ниво владања различитим дисциплинама, а такође упорност и креативност неопходну за разматрање тематике којом су се бавили како класици (Ковале夫ска, Кетер, Љапунов, Марков, Апельрот) тако и наши савременици (Козлов, Адлер, Ван Моербек, Хајне, Хорозов, Магри, Аудин, Бобенко ...). Кандидаткиња је објавила (коауторски) рад у међународном часопису (импакт фактор 0,529) и један самостални рад. Резултати су изложени и на више међународних конференција и на семинарима. Неки од резултата су већ цитирани или високо оцењени од стране еминентних светских научника. Кандидаткиња је и добитница награде "Растко Стојановић".

Излагање материјала у дисертацији је јасно, потпуно и прегледно. Даје се и преглед познатих резултата и историјских чињеница.

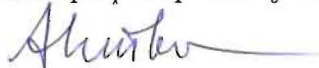
Имајући све поменуто у виду, са великим задовољством предлажемо Научно-наставном већу Математичког факултета да се рад *"Дискриминантно сепарабилни полиноми и интеграбилни динамички системи"* кандидата мр Катарине Кукић прихвати као завршни рад за степен доктора математичких наука.

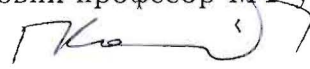
Београд, 7. новембар 2011. године

Референти:

  
др Владимир Драговић  
научни саветник МИ САНУ

  
Проф. др Миодраг Матељевић  
редовни професор МФ у Београду

  
Проф. др Александар Липковски  
редовни професор МФ у Београду

  
Проф. др Гојко Калајџић  
ванредни професор МФ у Београду

  
др Борислав Гајић  
виши научни сарадник МИ САНУ