

Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

Извештај комисије за преглед и оцену докторске дисертације

*„Стрмост у светлу теореме Нехорошева и њени нумерички аспекти на примеру
четвородимензионе симплектичке мапе“*

кандидата мр Наташе Тодоровић

Биографија кандидата

Наташа Тодоровић рођена је 27. јула 1974. године у Манхајму у Немачкој. Основну школу и гимназију похађа у Тузли (Босна и Херцеговина) и у Београду где матурира 1993. године у Четвртој београдској гимназији. Уписује студије на Математичком факултету у Београду, смер астрономија где и дипломира почетком 2002. године са просечном оценом 8.3. Крајем 2002. године запошљава се на Астрономској опсерваторији у Београду као истраживач приправник. 2007. године брани магистарску тезу под називом *“Истраживање динамичке структуре и дифузије у системима хамилтонијанског типа. Четвородимензиона симплектичка мапа”* и стиче звање истраживач сарадник. У току 2008. године започиње свој рад на докторској дисертацији у којој се бави проблемом стрмих функција и нумеричком илустрацијом њиховог утицаја на динамику датог система у оквиру Нехорошевљеве теореме. Наташа Тодоровић учествовала је на многим домаћим и међународним скуповима и објавила је више научних радова од којих је укупно седам са SCI листе.

Структура докторске дисертације

Дисертација садржи 95 страна текста са 30 слика, 5 табела и 50 референци.
Структура текста је следећа:

1 Хамилтонијански системи (7-19. стр)

- Појам и основне дефиниције
- Канонске трансформације
- Интеграбилни системи
- Арнолд-Лиувилова теорема. Дејство-угао променљиве
- Примери интеграбилних система

2 Квази-интеграбилни хамилтонијански системи (19-49. стр)

- КАМ теорема
- Илустрација КАМ теореме на примеру стандардне мапе
- Нехорошевљева теорема
- Дефиниција стрмих функција
- Нехорошевљева структура
- Арнолдова дифузија
- Нумеричка детекција Арнолдове дифузије
- Брзи индикатори Љапунова

3 Модел мапе и нумерички резултати њене динамике (49-91. стр)

- Дефиниција модела
- Провера услова стрмости функције h
- Оцена индекса стрмости функције h
- Коефицијенти стрмости C_k и параметар m
- Арнолдова мрежа модела
- Динамика 1-1 резонанце
- Алгоритам за рачунање коефицијената дифузије
- Рачун коефицијената $D(\varepsilon)$ за фиксиране вредности параметра m
- Оцена експоненцијалног и степеног закона $D(\varepsilon)$
- Рачун коефицијенеата дифузије $D(m)$ за фиксиране вредности параметра ε
- Избор почетних услова
- Трансформација координата
- Коефицијенти $D(m)$

4 Закључак

Библиографија (91. стр)

У првој глави дат је преглед основних појмова и дефиниција хамилтонијанског система, при чему су интеграбилни системи детаљно описани и илустровани са два примера реалног кретања. Квази-интеграбилни системи, проблеми у њиховом решавању и две основне теореме хамилтонијанске динамике КАМ теорема и теорема Нехорошева, описани су у другој глави. За примену Нехорошевљеве теореме потребно је да интеграбилна апроксимација система буде недегенерисана функција. Нехорошев је показао да овај услов задовољавају такозване стрме функције. Показао је такође да су конвексне, квази-конвексне и 3-струја функције, знатно једноставније у формулацији, задовољавају услов стрмости. Поред описа динамике коју предвиђају ове две теореме, посебна пажња посвећена је феномену такозване Арнолдове дифузије; њеном опису, илустрацији и нумеричким методама којима се она мери. Феномен Арнолдове дифузије очекује се на такозваној Арнолдовој мрежи која се на простор фреквенција пројектује на резонанце у систему. Структуру простора и Арнолдову мрежу нумерички детектујемо помоћу такозваног брзог индикатора Љапунова, којем је посвећено једно поглавље. Прве две главе, дакле, дају опис терминологије, динамике коју очекујемо у складу са теоријом и нумеричких алата који се у дисертацији користе.

У трећој глави дефинисан је модел, четвородимензиона симплекичка мапа, која је испитана аналитичким и нумеричким методама са циљем да се Нехорошевљева очекивања потврде. Интензитет стрмости се на овом моделу лако подешава варијацијом одређеног параметра (параметар m). Најпре је аналитичким путем испитан домен и одређене су оне области у којима је систем конвексан, квази-конвексан или задовољава 3-струја услов. Помоћу брзог индикатора Љапунова детектована је структура система укључујући и Арнолдову мрежу. Одабрана је резонанца (резонанца 1-1) на којој се испитује динамика. За пет различитих вредности параметра стрмости m , мерена је промена коефицијената дифузије у односу на параметар поремећаја ε . Очекиван резултат је да се систем брже стабилизује повећањем параметра m . У другом експерименту, примењена је извесна канонска трансформација чији је смисао описан у раду, а затим је за фиксирану вредност поремећаја ε , мерена дифузија као функција параметра стрмости m .

Закључци изведени из добијених резултата описани су у посебном поглављу.

Преглед важнијих резултата

Аналитичким путем испитан је домен целог простора и одређене су оне области у којима је систем конвексан, квази-конвексан или задовољава 3-струја услов. Цео простор је мапиран помоћу брзог индикатора Љапунова, чиме је детектована структура Арнолдове мреже. Упоредјујући стрму неконвексну и стрму квази-конвексну област, закључили смо да је систем стабилнији у стрмој квази-конвексној области, чиме је потврђена Нехорошевљева претоставка о већој стабилности квази-конвексних функција.

На резонанци 1-1 мерена је промена стабилности дејстава за различите услове поремећаја и различите интензитете стрмости. Отежавајућа околност у овом истраживању била је изразита спорост Арнолдове дифузије, која захтева јако дуга рачунска времена, због које је често резултат био на ивици тачности. Из тог разлога, тачна оцена вредности експоненцијалног закона $D(\epsilon)$ у првих пет експеримената није дата. Мада, индиректно, резултат наводи на закључак о природи промене система тј. о њеном успорењу. Овде је међутим откривено да функција $D(\epsilon)$ на извесан начин осцилира око предвиђених вредности, што је нов и неочекиван резултат који је објашњен природом промене хиперболичких структура.

У другом делу треће главе, где је мерена зависност $D(m)$ за фиксиране вредности поремећаја ϵ , показано је да се Арнолдова мрежа другачије „понаша“ са повећањем интензитета стрмости. Откривено је да промена $D(m)$ има двојако понашање. У једном делу интервала m , брзина дифузије не зависи од m , док у једном тренутку та зависност постаје експоненцијална. Иста природа ове функције детектована је у два различита експеримента. Штавише, испоставило се да у оба случаја промена $D(m)$ има идентично понашање, што наводи на закључак да утицај параметра стрмости на стабилност дејстава у извесном смислу има генерички карактер, независан од осталих параметара у систему. Детаљније аналитичко објашњење овог последњег резултата свакако је један од будућих задатака у интерпретацији Нехорошевљеве теореме.

Научни радови из области истраживања презентованог у дисертацији

1. *A numerical study of the stabilization effect of steepness*, Todorović, Nataša, Guzzo, Massimiliano Lega, Elena and Froeschlé, Claude; *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Volume 110, Issue 4, pp.389-398.
2. *The Role of a Steepness Parameter in the Exponential Stability of a Model Problem. Numerical Aspects*, Todorović, Nataša, *Serbian Astronomical Journal*, vol. 182, pp. 25-33.
3. *Local and global diffusion in the Arnold web of a priori unstable systems*, Todorović, Nataša, Lega, Elena and Froeschlé, Claude; *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Volume 102, Issue 1-3, pp. 13-27.

Закључак и предлог

Докторска дисертација мр Наташе Тодоровић под називом „*Стрмост у светлу теореме Нехорошева и њени нумерички аспекти на примеру четвородимензионе симплектичке мапе*“ представља дело које је посвећено истраживању актуелних проблема из области хамилтонијанске динамике. Овај рад је изложен прегледно и систематично, са детаљним списком литературе. Кандидат је показао висок ниво знања из истраживачке области којом се бави, као и оригиналан приступ актуелној проблематици. Дисертација садржи доста занимљивих научних резултата и представља значајан допринос разумевању проблема стабилности у контексту Нехорошевљеве теореме. Из научне области којом се бави у овој дисертацији кандидат је објавио три научна рада.

Предлажемо наставно-научном већу Математичког факултета да прихвати овај извештај и позитивну оцену докторске дисертације „*Стрмост у светлу теореме Нехорошева и њени нумерички аспекти на примеру четвородимензионе симплектичке мапе*“ мр Наташе Тодоровић и одреди комисију за њену одбрану.

Београд, 22. март 2012. године

Комисија:

Др Мике Кузманоски
редовни професор

Др Раде Павловић
научни сарадник

Др Зоран Кнежевић
научни саветник