

На седници Наставно-научног већа Математичког факултета одржаној 18. 11. 2011. у Београду одређени смо у Комисију за преглед и оцену докторске дисертације

## Гребнерове базе и имерзије Грасманових многострукости

магистра Бранислава Првуловића. Кандидат је предао текст, комисија је исти прегледала и подноси Већу следећи

### ИЗВЕШТАЈ

#### 1. Биографија кандидата

Бранислав Првуловић је рођен 12. октобра 1977. године у Београду. Средњу електротехничку школу „Никола Тесла” завршио је 1997. године. Дипломирао је на Математичком факултету у Београду (смер Теоријска математика и примене) у октобру 2003. године са просечном оценом 9,32. Магистрирао је у мају 2007. године, такође на Математичком факултету у Београду, смер Топологија, одбравивши рад под насловом „Карактеристичне класе у теорији опструкција” (ментор проф. др. Синиша Врећница). Већ шест и по година ради као асистент на катедри за топологију Математичког факултета у Београду. Сарадник је на пројекту „Топологија, геометрија и глобална анализа на многострукостима и дискретним структурама”, број 174034.

#### 2. Списак научних радова кандидата

- (1) Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, *On Groebner bases and immersions of Grassmann manifolds*  $G_{2,n}$ , Homology Homotopy Appl. **13(2)** (2011) 113–128. (SCI)
- (2) Đ. Baralić, B. Prvulović, G. Stojanović, S. Vrećica, R. Živaljević, *Topological obstructions to totally skew embeddings*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012) 2213–2226. (SCI)
- (3) B. I. Prvulović, *Gröbner bases for complex Grassmann manifolds*, Publ. Inst. Math. **90(104)** (2011) 23–46.
- (4) Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, *Groebner bases and some immersion theorems for Grassmann manifolds*  $G_{3,n}$ , на рецензији.
- (5) Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, *Equivariant maps between complex Stiefel manifolds*, на рецензији.

### 3. Предмет докторске дисертације

У свом класичном раду из 1944. године, Х. Витни је доказао да се свака компактна глатка  $n$ -димензиона многострукост може имерзовати у еуклидски простор  $\mathbb{R}^{2n-1}$ . Питање које се природно намеће је да ли се овај резултат може поправити и у општем случају, а и у појединачним случајевима (дакле за конкретне многострукости). Као завршетак дугогодишњег истраживања више истакнутих тополога, Р. Коен је у свом раду из 1985. године доказао познату *immersion conjecture*: свака компактна глатка многострукост димензије  $n$  може се имерзовати у простор  $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$ , где је  $\alpha(n)$  број јединица у бинарном развоју броја  $n$ . Овај резултат се не може поправити у општем случају. Наиме, ако је  $n = 2^{k_1} + \dots + 2^{k_s}$ , где је  $k_1 > \dots > k_s$ , тј. ако је  $\alpha(n) = s$ , онда се многострукост  $\mathbb{R}P^{2^{k_1}} \times \dots \times \mathbb{R}P^{2^{k_s}}$  не може имерзовати у  $\mathbb{R}^{2n-s-1}$ , што се лако може показати помоћу Штифел-Витнијевих карактеристичних класа.

Пошто је општи случај разрешен, поставља се питање да ли се за конкретну многострукост, односно за конкретну фамилију многострукости, резултат може поправити. Највише радова у овом контексту је посвећено питању имерзија реалних пројективних простора, мада су истраживани и комплексни пројективни простори, а у новије време, на пример, и лећасти простори и Грасманове многострукости. Реални пројективни простори су због своје једноставне структуре омогућавали разне приступе овом проблему. Општи резултат Џ. Милграма и К. Лама показује да се  $\mathbb{R}P^n$  може имерзовати у  $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)-k(n)}$ , где је  $k(n) = 1, 2$  или  $4$  у зависности од броја  $n$ . Дакле, тај резултат „поправља” општи Коенов резултат само за  $1, 2$ , или  $4$  у појединим случајевима. Као што видимо представљање броја  $n$  преко степена двојке је централно у овим проблемима. Стога су разним другим методама добијени бољи резултати од ових уколико је  $n$  сума неколико степена двојке, или неког другог погодног облика.

Проблем имерзије, као проблем из диференцијалне топологије, се помоћу Хиршове теореме из 1959. године, своди на проблем из теорије хомотопије. Наиме, посматра се класа стабилног нормалног раслојења дате многострукости  $M^n$ , која се види као пресликавање  $\nu: M^n \rightarrow BO$  и испитује се да ли се то пресликавање може „подићи” до пресликавања у простор  $BO(m)$  (што би значило да постоји имерзија  $M^n$  у  $\mathbb{R}^{n+m}$ ). У сврху испитивања постојања овог подизања, користи се теорија опструкција, прецизније метод модификованих кула Постникова. Идеја је да се простор  $BO(m)$  замени простором  $E = E_r$ , а пресликавање  $BO(m) \rightarrow BO$  низом пресликавања  $E_s \rightarrow E_{s-1}$ ,  $s = \overline{1, r}$ , где је  $E_0 = BO$ , тако да је постојање подизања до  $BO(m)$  еквивалентно постојању подизања до  $E$  за многострукости димензије не веће од датог броја. Подизање се врши „спрат по спрат” (до  $E_1$ , потом до  $E_2$  итд.), тако да се испитивање постојања сваког подизања врши одређивањем такозваних  $k$ -инваријанти (одређених кохомолошких класа у наведеним просторима) и по потреби варирањем подизања на нижим нивоима, да би се могло прећи на више спратове. Да би се то могло извести, потребно је да постоји одлична контрола над кохомологијом простора (све кохомологије које се овде разматрају су кохомологије са  $\mathbb{Z}/2$  коефицијентима) дате многострукости, не само као кохомолошке алгебре, него и као модула над Стинродовом алгебром. У случају пројективних простора, то је уистину тако, али у случају Грасманових многострукости то већ није случај.

Грасманова многострукост  $G_{k,n} = G_k(\mathbb{R}^{n+k})$  је многострукост димензије  $kn$ , коју чине  $k$ -димензиони потпростори у  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Реални пројективни простори су специјални случај Грасманових многострукости –  $\mathbb{R}P^n = G_{1,n}$ . Кохомологија Грасманове многострукости  $G_{k,n}$  (у Бореловој слици) је алгебра  $\mathbb{Z}/2[w_1, \dots, w_k]/I_{k,n}$ , где је идеал  $I_{k,n}$  заправо идеал генерисан дуалним класама  $\bar{w}_{n+1}, \dots, \bar{w}_{n+k}$  задатим релацијом  $(1 + w_1 + \dots + w_k)(1 + \bar{w}_1 + \dots + \bar{w}_{n+k}) = 1$ . Као што видимо, ради се о полиномијалној алгебри са више неодређених посеченој по јасно дефинисаном идеалу. Да би се метода модификованих кула Постникова применила, потребно је пре свега имати што бољи опис ове кохомологије. У овој тези, пажња је посвећена случајевима  $k = 2$  и  $k = 3$ , дакле, добијању нових резултата о имерзији  $G_{2,n}$  и  $G_{3,n}$ . Контрола кохомологије се успоставља одређивањем Гребнерових база идеала  $I_{2,n}$  и  $I_{3,n}$ .

#### 4. Приказ дисертације

Ова дисертација се састоји од предговора на 4 стране, текста од 208 страна подељеног у 4 главе и списка литературе од 38 библиографских јединица.

Прва глава (стр. 9–38) има 5 одељака и посвећена је стандардном материјалу о Гребнеровим базама. Има за циљ увођење неопходне терминологије, појмова и ознака, као и резултата, који ће касније бити коришћени. Ради комплетности, наведени су докази неких теорема, а посебно треба истаћи теорему 36 у петом одељку у којој су наведени еквивалентни услови да би неки скуп полинома чинио Гребнерову базу датог идеала. Наиме, у овом раду за одређивање Гребнерове базе није коришћен Бухбергеров алгоритам, него један критеријум, који се ослања на тзв.  $t$ -презентацију  $S$  полинома.

Друга глава (стр. 39–128) посвећена је детаљном опису теорије модификованих кула Постникова. Наиме, ова теорија је формулисана у радовима, пре свега, М. Маховалда и С. Гитлера и нема одговарајућу презентацију у уџбеничкој литератури (а неки важни резултати се могу наћи само у докторској дисертацији Ф. Нусбаума, ученика М. Маховалда, и никада нису објављени у неком часопису, или књизи), а и саме дефиниције се унеколико разликују у појединим радовима. Стога је овде учињен напор да се за случај модуло 2 кохомологије, који је једини од интереса за ову тезу, презентује та теорија што комплетније. У ту сврху, кандидат је дао неке оригиналне доказе, који су једноставнији и јаснији од постојећих, а осим тога је неке комплетирао и појаснио. Ова глава има 12 одељака. У прва два одељка разматра се општи проблем подизања пресликавања, обичне куле Постникова, као и појам трансгресије. Трећи одељак посвећен је презентацији резултата Нусбаума, од којих посебно вреди истаћи чињеницу о тривијалности дејства фундаменталне групе базе на трансгресивне класе у слоју, што знатно поједностављује примене (јер немамо проблем локалних коефицијената). Одељци 4 до 7 баве се постепеним увођењем модификованих кула Постникова, преко Адамсових кула (торњева) и резолуција над Стинродовом алгебром. Ту се даје веза са Адамсовим спектралним низом. Осми одељак посвећен је Меси-Питерсовој алгебри, док је девети одељак посвећен релативној трансгресији. У одељку 10, кандидат детаљно објашњава како се одређују  $k$ -инваријанте, док је наредни одељак заправо сажетак претходних резултата. У завршном, дванаестом и најобимнијем одељку, кандидат гради модификовану кулу Постникова за фибрацију  $V_n \rightarrow BO(n) \rightarrow BO$  (где је

$V_n$  бесконачна Штифелова многострукост). Детаљно се разматрају сви случајеви, који су од значаја за примене у четвртој глави ове тезе и описује се како се из Адамсових карти за хомотопију Штифелове многострукости  $V_n$  добијају  $k$ -инваријанте. Детаљан рачун за одређивање ових инваријанти је изведен.

Трећа глава (стр. 129–162) има 5 одељака и садржи оригиналне алгебарске доприносе аутора. Наиме, К. Монкс је у раду из 2001. године одредио Гребнерове базе за  $I_{2,n}$  у случају када је  $n$  облика  $2^s - 3$  и  $2^s - 4$  и те резултате касније применио за добијање резултата о имерзијама  $G_{2,n}$ . Он је користио лексикографски поредак монома из  $\mathbb{Z}/2[w_1, w_2]$  базиран на уређењу  $w_1 < w_2$ . У овој тези, мр Б. Првуловић је користио градиран (градуисани) лексикографски поредак монома базиран на уређењу  $w_1 > w_2$  и добио редуковану Гребнерову базу за  $G_{2,n}$  за све  $n$ . Осим тога, коришћењем градираног лексикографског поретка базираног на уређењу  $w_1 > w_2 > w_3$ , кандидат је одредио редуковану Гребнерову базу за  $I_{3,n}$  за све  $n$ . У првом одељку ове главе, кандидат је доказао неке везе међу биномним коефицијентима, које леже у основи одређивања наведених Гребнерових база. Мада се у овом раду кандидат бави модуло 2 кохомологијом, ипак су неки докази дати за целе бројеве и они су основа за одређивање одговарајућих Гребнерових база за идеале који одређују целобројну кохомологију комплексних Грасманијана, а које је кандидат објавио у свом самосталном раду (3). Други одељак ове главе је посвећен кратком опису кохомологије Грасманијана, а у трећем и четвртном одељку су одређене наведене Гребнерове базе. Ови резултати су садржани у радовима (1) и (4) – рад (1) је објављен у часопису са SCI листе, док је рад (4) на рецензији. Ове Гребнерове базе су послужиле кандидату да одреди и базе за кохомологију Грасманијана као векторског простора над  $\mathbb{Z}/2$ . У петом одељку, кандидат је навео своје хипотезе о Гребнеровим базама за  $I_{k,n}$  за случај  $k \geq 4$  и о базама кохомологије Грасманијана као векторског простора над  $\mathbb{Z}/2$  за  $k \geq 4$ .

Четврта глава (стр. 163–216) има три одељка и садржи оригиналне тополошке резултате кандидата. У првом одељку је дат кратак увод са прегледом добијених резултата, други одељак је посвећен имерзијама  $G_{2,n}$ , а трећи имерзијама  $G_{3,n}$ .

У случају  $G_{2,n}$ , до сада познати резултати су били следећи (наводимо само најбоље резултате и то оне који се тичу постојања имерзије). У раду из 2001. године К. Монкс је показао да се  $G_{2,n}$  може имерзовати у  $\mathbb{R}^{4n-3}$  када је  $n$  облика  $2^s - 3$  за неко  $s \geq 3$ . Овај резултат је бољи од Коеновог општег резултата само за случај  $G_{2,5}$ . Монксов резултат је поправио Т. Шимкус у раду из 2007. године. Он је доказао да се  $G_{2,n}$  може имерзовати у  $\mathbb{R}^{4n-5}$  уколико је  $n = 2^s - 3$ , за  $s \geq 4$ . Овај резултат је бољи од Коеновог само за  $G_{2,13}$  и  $G_{2,29}$ . Кандидат Б. Првуловић је доказао да се за сваки непаран број  $n$  Грасманијан  $G_{2,n}$  може имерзовати у  $\mathbb{R}^{4n-5}$ . Овај резултат је бољи од општег Коеновог резултата за све  $n$  за које је  $2 \leq \alpha(n) < 5$  (у случају када је  $n$  степен двојке, на основу ранијих резултата је познато да је  $\text{imm}(G_{2,2^s}) = 2^{s+2} - 2$ , за  $s \geq 1$ , где је са  $\text{imm}(M)$  означено најмање  $d$  за које постоји имерзија  $M$  у  $\mathbb{R}^d$ ).

У случају  $G_{3,n}$  познато је било да је  $\text{imm}(G_{3,3}) = 15$  и  $\text{imm}(G_{3,4}) = 21$ , а била су позната и нека доња ограничења за  $\text{imm}(G_{3,n})$  садржана у раду В. Опројуа из 1977. године. Резултати Б. Првуловића из ове тезе су следећи:

- ако је  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , онда је  $\text{imm}(G_{3,n}) \leq 6n - 3$ ;
- ако је  $n \equiv 6 \pmod{8}$ , онда је  $\text{imm}(G_{3,n}) \leq 6n - 5$ ;
- ако је  $n \equiv 1 \pmod{8}$  и  $n \neq 1$ , онда је  $\text{imm}(G_{3,n}) \leq 6n - 6$ ;
- ако је  $n \equiv 2 \pmod{8}$  и  $n \neq 2$ , онда је  $\text{imm}(G_{3,n}) \leq 6n - 7$ .

У много случајева, ови резултати су бољи од општег Коеновог за 1, 2, или 3 у зависности од случаја и облика броја  $n$ . Вреди истаћи да је, уз постојеће доње ограничење, овим резултатима установљено да је  $\text{imm}(G_{3,2^r}) = 6 \cdot 2^r - 3$ .

## 5. Закључак

Резултати до којих је мр Б. Првуловић дошао у свом раду и које је представио у поднетом тексту представљају одличан спој алгебре и топологије, као и класичног и модерног. Тополошки резултати који су добијени класичним тополошким техникама помоћу теорије опструкција, нису могли бити добијени без модерних алгебарских метода садржаних у употреби Гребнерових база. Кандидат је овладао веома напредним тополошким методама и добио значајне нове резултате у компетитивној области теорије имерзија. Они су у многим случајевима бољи од већ постојећих најбољих резултата, а понекад дају и коначан одговор на питање најбоље имерзије. Осим тога, алгебарски резултати оличени у одређивању Гребнерових база за идеале  $I_{2,n}$  и  $I_{3,n}$  сигурно ће бити од користи свима, којима је у раду потребно рачунање у кохомологији ових Грасманијана.

Због свега наведеног, предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да прихвати приложени текст као докторску дисертацију мр Б. Првуловића и одреди комисију за њену јавну одбрану.

Београд, 5. март 2012.

## КОМИСИЈА:

др Зоран Петровић (ментор),  
ванредни професор Математичког факултета

др Синиша Врећица,  
редовни професор Математичког факултета

др Александар Липковски,  
редовни професор Математичког факултета

др Раде Живаљевић,  
научни саветник, Математички институт САНУ