

Факултет Машински

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

1312/5
(Број захтева)13.11.2025.
(Датум)Веће научних области техничких наука
(Назив већа научне области коме се захтев
упућује)**ЗАХТЕВ****за давање сагласности на одлуку о прихватању теме докторске дисертације и
о одређивању ментора**

Молимо да, сходно члану 47. ст. 5. тач. 3. Статута Универзитета у Београду ("Гласник Универзитета", број 186/15-пречишћени текст и 189/16), дате сагласност на одлуку о прихватању теме докторске дисертације:

Моделирање спрегнутих осцилација и оптимизација облика аксијално
функционално градијентних греда
(пун назив предложене теме докторске дисертације)

НАУЧНА ОБЛАСТ: Машинство (ужа научна област: Механика)

ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ:

1. Име, име једног од родитеља и презиме кандидата: Марко (Александар) Вег
2. Претходно образовање (назив и седиште факултета, студијски програм):
Универзитет у Београду - Машински факултет, Краљице Марије 16, 11120 Београд 35
3. Година завршетка претходног нивоа студија: 2020.
4. Година уписа на докторске студије: 2020.
5. Назив студијског програма докторских студија: Машинско инжењерство

ПОДАЦИ О МЕНТОРУ:

Име и презиме ментора: Александар Томовић

Звање: ванредни професор

Списак радова који квалификују ментора за вођење докторске дисертације:

1. Veg M., Tomović A., Karličić D., An analytical approach to determining crossing and veering phenomena, *Filomat* 39:15, 5285–5296, (2025) (DOI:10.2298/FIL2515285V). ISSN: 0354-5180, IF: 0,9
2. Tomović A., Šalinić S., Obradović A., Zorić N., Mitrović Z., Coupled Bending and Axial Vibrations of Axially Functionally Graded Euler-Bernoulli Beams, *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 12, 2987–3004. (2024) Springer. (DOI:10.1007/s42417-023-01027-y). ISSN: 2523-3920, IF: 2,4
3. Obradović, A., Jeremić, B., Tomović, A., Šalinić S., Mitrović Z., Mass Minimization of Axially Functionally Graded Euler–Bernoulli Beams with Coupled Bending and Axial Vibrations, *Mechanics of Solids* 59, 1358–1375 (2024). Springer. (DOI:10.1134/S002565442460260X). ISSN: 0025-6544, IF: 0,9
4. Šalinić S., Obradović A., Tomović A., Trifković D., Grbović A., Coupled axial-bending vibration of axially functionally graded Timoshenko cantilever beams of non-uniform cross-section with an attached rigid body, *Meccanica*, 58, 1233–1248. (2023) Springer. (DOI: 10.1007/s11012-023-01672-3). ISSN: 0025-6455, IF: 2.2
5. Tomović A., Šalinić S., Obradović A., Grbović A., Milovančević M., Closed-form solution for the free axial-bending vibration problem of structures composed of rigid bodies and elastic beam segments, *Applied Mathematical Modelling*, Vol 77, Part 2, January, pp. 1148-1167, 2020. (DOI: 10.1016/j.apm.2019.09.008). ISSN: 0307-904X, IF: 5.1
6. Zorić N., Tomović A., Obradović A., Radulović R., Petrović G.: Active vibration control of smart composite plates using optimized self-tuning fuzzy logic controller with optimization of placement, sizing and orientation of PFRC actuators, *Journal of Sound and Vibration*, Vol 456, No 15, pp. 173–198, 2019. (DOI: 10.1016/j.jsv.2019.05.035). ISSN: 0022-460X, IF: 4,9
7. Šalinić S., Obradović A., Tomović A.: Free vibration analysis of axially functionally graded tapered, stepped, and continuously segmented rods and beams, *Composites Part B*, No 150, pp. 135–143, 2018. (DOI: 10.1016/j.compositesb.2018.05.060). ISSN: 1359-8368, IF: 14.2

ПОДАЦИ О МЕНТОРУ:

Име и презиме ментора: Данило Карличић

Звање: виши научни сарадник

Списак радова који квалификују ментора за вођење докторске дисертације:

1. Rosić, N., M. Cajić, D. Karličić, S. Adhikari, and M. Lazarević. "Enhanced wave attenuation through inertial amplification periodic beam-rigid body structure." *Applied Mathematical Modelling* 149 (2026): 116273. M21a
2. Rosić, N., Karličić, D., Cajić, M., Adhikari, S., & Lazarević, M. (2024). Wave propagation in tailored metastructures on elastic beams and rigid bodies. *Philosophical Transactions A*, 382(2279), 20230362. M21
3. Cajić, M., Karličić, D., & Adhikari, S. (2024). Inerter-controlled topological interface states in locally resonant lattices w beyond-nearest neighbor coupling. *Journal of Applied Physics*, 135(18). M22
4. Karličić, D., Cajić, M., Paunović, S., Obradović, A., Adhikari, S., & Christensen, J. (2023). Non-reciprocal wave propagation in time-modulated elastic lattices with inerters. *Applied Mathematical Modelling*, 117, 316-335. M21a
5. Chatterjee, T., Karličić, D., Cajić, M., Adhikari, S., & Friswell, M. I. (2023). Uncertainty quantification in inerter-based quasiperiodic lattices. *International Journal of Mechanical Sciences*, 249, 108258. M21a+
6. Mukherjee, S., Cajić, M., Karličić, D., & Adhikari, S. (2023). Enhancement of band-gap characteristics in hexagonal and entrant lattices via curved beams. *Composite Structures*, 306, 116591. M21a
7. Cajić, M., Karličić, D., Christensen, J., & Adhikari, S. (2023). Tunable topological interface states in one-dimensional inerter-based locally resonant lattices with damping. *Journal of Sound and Vibration*, 542, 117326. M21a
8. Nešić, N., Cajić, M., Karličić, D., Obradović, A., & Simonović, J. (2022). Nonlinear vibration of a nonlocal functionally graded beam on fractional visco-Pasternak foundation. *Nonlinear Dynamics*, 107(3), 2003-2026. M21a
9. Nešić, N., Karličić, D., Cajić, M., Simonović, J., & Adhikari, S. (2025). Vibration suppression of a platform by a fractional electromagnetic damper and inerter-based nonlinear energy sink. *Applied Mathematical Modelling*, 137, 115651. M21a
10. Karličić, D., Cajić, M., Paunović, S., & Adhikari, S. (2021). Periodic response of a nonlinear axially moving beam with a nonlinear energy sink and piezoelectric attachment. *International Journal of Mechanical Sciences*, 195, 106230. M21a+
11. Karličić, D., Cajić, M., Paunović, S., & Adhikari, S. (2021). Bloch waves in an array of elastically connected periodic structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 155, 107591. M21a+
12. Karličić, D., Cajić, M., Chatterjee, T., & Adhikari, S. (2021). Wave propagation in mass embedded and pre-stressed hexagonal lattices. *Composite Structures*, 256, 113087. M21a

Обавештавамо вас да је Наставно – научно веће на седници одржаној 13.11.2025. године размотрило предложену тему и закључило да је тема подобна за израду докторске дисертације јер садржи оригиналну идеју и да је од значаја за развој науке, примену њених резултата, односно развој научне мисли уопште.

ДЕКАН ФАКУЛТЕТА

Прилог:

1. Одлука Наставно-научног већа о прихватању теме и одређивању ментора
2. Извештај Комисије о оцени научне заснованости теме докторске дисертације

Напомена:

Факултет доставља Универзитету захтев са прилозима у електронској форми и једном писаном примерку за архиву Универзитета

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
- МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ -
Број: 1312/5
Датум: 13.11.2025. године
Београд, Краљице Марије 16

На основу члана 40. Закона о високом образовању („Службени гласник РС“, број 88/2017, 73/2018, 27/2018 – др. закон 67/2019, 6/2020 – др. закони, 11/2021 – аутентично тумачење, 67/2021, 67/2021 – др. закон и 76/2023), члана 64. Статута Машинског факултета – пречишћени текст (број 1136/4 од 28.06.2021. године), Одлуке о изменама и допунама Статута број 239/6 од 17.02.2023. године и члана 38. Правилника о докторским студијама на Универзитету у Београду - Машинском факултету, Наставно-научно веће Машинског факултета на седници од 13.11.2025. године донело је:

ОДЛУКУ

о прихватању Извештаја Комисије за оцену научне заснованости теме докторске дисертације

Прихвата се Извештај Комисије за оцену научне заснованости теме докторске дисертације кандидата **Марка Вега**, маг. инж. маш. под насловом „Моделирање спрегнутих осцилација и оптимизација облика аксијално функционално градијентних греда“.

Извештај је поднела Комисија у саставу: др Александар Обрадовић, ред. проф., др Александар Томовић, ванр. проф., др Данило Карличић, виши научни сарадник, Математички институт САНУ, др Милош Пјевић, ванр. проф. и др Славиша Шалинић, ред. проф., Универзитет у Крагујевцу – Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву.

За менторе докторске дисертације именују се др Александар Томовић, ванр. проф. и др Данило Карличић, виши научни сарадник, Математички институт САНУ.

Одлуку доставити: Универзитету у Београду, кандидату, ментору и архиви Факултета.

ДЕКАН
МАШИНСКОГ ФАКУЛТЕТА

проф. др Владимир Поповић

Предмет: Извештај о научној заснованости теме докторске дисертације кандидата Марка А. Вега, магист. инж. маш.

Одлуком Наставно-научног већа Универзитета у Београду, Машинског факултета број 1312/3 од 23.10.2025. године, именовани смо за чланове Комисије за оцену научне заснованости теме докторске дисертације кандидата Марка А. Вега, магист. инж. маш. (у даљем тексту **Кандидат**) под називом:

**Моделирање спрегнутих осцилација и оптимизација облика аксијално
функционално градијентних греда.**

На основу материјала приложеног уз Захтев кандидата Комисија подноси следећи Извештај.

Извештај

1. Подаци о кандидату

1.1 Биографски подаци

Кандидат је рођен 11. августа 1995. године у Београду, Република Србија. Основну школу „Војвода Радомир Путник“ у Београду завршио је као носилац Вукове дипломе. Средњу школу „Трећа београдска гимназија“, природни смер, завршио је такође као носилац Вукове дипломе.

Машински факултет Универзитета у Београду уписао је школске 2014/2015. године. Основне академске студије – машинско инжењерство завршио је 2017. године са укупном просечном оценом 10,00 (десет и 0/100). Завршни рад из предмета Бродске конструкције 1 код проф. др Милорада Мотока одбранио је са оценом 10 (десет).

Добитник је похвале за изванредан успех на првој, другој и трећој години Основних академских студија Машинског факултета у Београду. Са колегицом Мираном Шумарац делио је титулу ђака генерације уписане школске 2014/2015. године. У току прве и друге године Основних академских студија био је добитник стипендије за студенте Републике Србије, коју додељује министарство просвете док је на трећој години Основних академских студија био добитник стипендије „Доситеја“ коју додељује Фонд за младе таленте Републике Србије.

Мастер академске студије – машинско инжењерство, модул Бродоградња, уписао је школске 2017/2018. године, а завршио их 2. јула 2020. године одбравши мастер рад под називом „Избор основних параметара бродске форме са аспекта енергетске ефикасности“ са оценом 10 (десет), под менторством проф. др Милана Калајића. На Мастер академским студијама остварио је укупну просечну оцену 10,00 (десет и 0/100). Добитник је похвале за изванредан успех на првој, години Мастер академских студија Машинског факултета у Београду.

У школској 2020/2021. години уписао је Докторске академске студије – машинско инжењерство на Машинском факултету Универзитета у Београду. Кандидат је положио све испите на докторским студијама и тренутно је студент треће године.

Кандидат је од 22.01.2021. године запослен на месту асистента на Катадри за механику на Машинском факултету Универзитета у Београду.

Познавање страних језика

- енглески језик – говори, чита и пише,
- италијански језик – споразумева се у свакодневном говору.

Познавање рада на рачунару

Кандидат се активно служи свим софтверским пакетима неопходним за инжењерске прорачуне, истраживање и научни рад, а посебно са:

- 1) *MATLAB*,
- 2) *Wolfram Mathematica*,
- 3) *SolidWorks*,
- 4) *LaTeX*,
- 5) *AutoCAD*,
- 6) *MS Office*.

Истраживачке области

- теоријска и примењена механика, аксијално функционално градијентни материјали

Остало

- вишегодишњи члан Српског друштва за механику
- возачка дозвола за Б категорију возила.

1.2 Сечено научноистраживачко искуство

Кандидат је уписао Докторске академске студије – машинско инжењерство на Машинском факултету Универзитета у Београду школске 2020/2021. године. У циљу реализације Програма усавршавања, положио је следеће обавезне и изборне предмете према Табели 1.

Табела 1: списак положених предмета у оквиру Програма усавршавања

Назив предмета	Предметни наставник	ЕСПБ	Оцена
Обавезни предмети			
Виши курс математике	Слободан Радојевић	5	10
Нумеричке методе	Миодраг Спалевић	5	10
ОМНИР и комуникација	Милош Недељковић	5	10
Истраживање и публикавање 1	Немања Зорић	10	10
Истраживање и публикавање 2	Немања Зорић	15	10
Истраживање и публикавање 3	Александар Обрадовић	20	10
Пројекат идеје докторске дисертације	Александар Обрадовић	30	10
Изборни предмети			
Аналитичка механика	Оливера Јеремић	5	10
Динамика система крутих тела	Михаило Лазаревић	5	10
Интеграција паметних актуатора и сензора	Небојша Петровић	5	10
Одабрана поглавља из механике	Зоран Митровић	5	10
Осцилације механичких система	Александар Обрадовић	5	10
Рачун нецелобројног реда са применама у инжењерству	Михаило Лазаревић	5	10

Кандидат учествује у извођењу наставе на Основним академским студијама на следећим предметима катедре за Механику: Механика 1, Механика 2, Механика 3 и Теорија осцилација.

Кандидат је три године за редом, почевши од школске 2021/2022. припремао студенте-такмичаре за међународно студентско такмичење „Машинијада“ из области „Механика“, на ком су такмичари у све три године до престанка одржавања Машинијаде освајали прва места.

Почевши од школске 2023/2024. Кандидат учествује у извођењу наставе из предмета Механика 2 као асистент на Војној академији Универзитета одбране.

Од октобра 2022. године учествује у раду на истраживачком пројекту „Осцилације и оптимизација облика Ојлер-Бернулијевих и Тимошенкоких греда од аксијално функционално градијентних материјала“, који финансира Министарство науке, технолошког развоја и иновација Владе Републике Србије.

У наставку је дат списак објављених научних радова и других релевантних резултата Кандидата у вези са темом докторске дисертације.

Рад објављен у међународном часопису (M22):

[1] M. Veg, A. Tomović, D. Karličić, An Analytical Approach to Determining Crossing and Veering Phenomena, Filomat, Vol. 39:15 (2025), pp. 5285-5296, DOI: 10.2298/FIL2515285V.

Радови саопштени на међународном скупу, штампани у изводу (М33):

- [1] M. Veg, A. Tomovic, G. Šinikovic, S. Dikic, N. Zoric, S. Šalinic, A. Obradovic, Z. Mitrovic, EXPERIMENTAL AND NUMERICAL APPROACH TO NATURAL FREQUENCY OF TAPERED 3D PRINTED CANTILEVER BEAM WITH A TIP BODY, Book of Proceedings of the "9th International Congress of Serbian Society of Mechanics", Vrnjaska Banja, Serbia, July 5-7, 2023. ISBN: ISBN-978-86-909973-9-8,
- [2] M. Veg, A. Obradovic, A. Tomovic - MASS OPTIMIZATION OF TIMOSHENKO BEAMS BY USING THE PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE, Booklet of abstracts, 2nd International Conference on Mathematical Modelling in Mechanics and Engineering Mathematical Institute SANU, 12-14. September, 2024,
- [3] M. Veg, A. Tomovic, A. Obradovic, S. Šalinic, Yu. D. Selyutskiy, Mode Orthogonality Conditions of Spatial Vibrations of an Euler-Bernoulli Cantilever Beam With an Eccentric Rigid Tip Load, Book of Proceedings of the "10th International Congress of Serbian Society of Mechanics", Niš, Serbia, June 18-20, 2025. ISBN: 978-86-905512-1-7,
- [4] A. Tomovic, M. Pjevic, M. Veg, A. Obradovic, Z. Mitrovic, Vibration Characteristics of an Optimized Cantilever Beam, Book of Proceedings of the "10th International Congress of Serbian Society of Mechanics", Niš, Serbia, June 18-20, 2025. ISBN: 978-86-905512-1-7,
- [5] M. Pjevic, A. Tomovic, M. Veg, N. Zoric, M. Popovic, Vibration Characteristics of 3D Printed Stepped Cantilever Beam, Book of Proceedings of the "10th International Congress of Serbian Society of Mechanics", Niš, Serbia, June 18-20, 2025. ISBN: 978-86-905512-1-7.

Учешће у научно-истраживачким, стручним и образовно-развојним пројектима:

- [1] Пројекат ТР 35006-4: „Осцилације и оптимизација облика Ојлер-Бернулијевих и Тимошенкових греда од аксијално функционално градијентних материјала“, руководиоца пројекта проф. др Александар Обрадовић, научни саветник, Београд 2022.-...

1.3 Оцена подобности кандидата за рад на предложеној теми

Кандидат је својим досадашњим радом показао неопходно знање, упорност, заинтересованост и способност за научноистраживачки рад. Досадашње образовање, Програм усавршавања на докторским студијама и објављени научни радови су суштински повезани са облашћу којој припада предложена тема, што Кандидата према мишљењу Комисије квалификује за самосталан научноистраживачки рад на предметној докторској дисертацији.

2 Предмет и циљ истраживања

Статичко и динамичко понашање машинских елемената и конструкција сачињених од функционално градијентних материјала представља изузетан изазов у погледу саме теорије која га описује али и техничко-технолошких могућности за производњу таквих елемената. У литератури се могу пронаћи истраживања елемената типа плоча или љуска, где се градијентна промена карактеристика појављује по трећој димензији (дебљини), али и штапних и гредних елемената где је једна димензија значајно већа од друге две и где је градијентна промена присутна по дужини елемента па се они називају аксијално функционално градијентни (АФГ). Зависно од величине односа дужине греде и димензија попречног пресека, решења могу да дају и Ојлер-Бернулијева и Тимошенкова теорија еластичних греда. Решења могу да се потраже за модел греде као систем са коначним бројем степени слободе, када се греда дискретизује (нпр. метод коначних елемената) или за модел греде као непрекидне средине (бесконачно степени слободе).

У овом истраживању греда се посматра као непрекидна средина док се верификација добијених резултата врши методом коначних елемената и лабораторијским експериментом на моделу штампане конзоле. У

зависности од типа ослонаца на крајевима греде може доћи до спрезања облика осциловања. Истражују се услови спрезања уздужних, попречних и увојних осцилација. При спрезању одређених типова осцилација, долази до изједначавања сопствених фреквенција код спрегнутих осцилација. У најопштијем случају спрезања, када су сва три типа осцилација спрегнута, сопствена фреквенција је једнака за све модове. Када се конзола са крутим телом произвољно круто везаним на свом слободном крају посматра кроз оквире Ојлер-Бернулијеве или Тимошенкове теорије, понашање греде описује систем од четири односно шест парцијалних диференцијалних једначина, где је шест величина у попречном пресеку греде у функцији дужинске координате и времена. Ојлер-Бернулијева теорија у општем просторном случају разматра као величине стања два попречна померања попречног пресека у равни управној на правац осе недеформисане греде, једно уздужно померање у правцу осе недеформисане греде и једно угаоно заокретање попречног пресека око исте осе. Тимошенкова теорија осим наведене четири величине стања узима у обзир и два угаона закретања попречног пресека у односу на ненапрегнуту еластичну линију греде око два ортогонална правца. Решење ових система једначина тражи се раздвајањем променљивих на амплитудне функције и временске функције, чији је општи облик бесконачан ред суперпозиција хармонијских и хиперболичких функција, за сваку од бесконачно сопствених фреквенција, почевши редом од најмање која се назива и главна или прва сопствена фреквенција. Утицај виших фреквенција у изведеним структурама је обично занемарљив па се после пете или шесте сопствене фреквенције остатак чланова реда занемарује.

Са постављеним граничним условима на сваком крају греде добија се двотачкасти гранични проблем за сваку појединачну сопствену фреквенцију, који није могуће решити аналитички. Овај проблем се у дисертацији ефикасно решава применом Бидерманове методе почетних параметара у диференцијалном облику, а још ефикасније модификованим Бидермановим методом тзв. Симболичко Нумеричким методом почетних параметара у диференцијалном облику (Symbolic Numeric Method of Initial Parameters (SNMIP)) којим се двотачкасти проблем решава параметарски за сопствену фреквенцију.

Одређивање сопствених фреквенција елемената конструкције некад је чак и важније него симулација понашања елемента у експлоатацији. Из тог разлога посебан фокус у овом истраживању јесу сопствене фреквенције АФГ греда које осцилују у простору и код којих долази до спрезања уздужних, попречних и увојних облика осциловања.

У зависности од врсте граничних услова на крајевима греде, који морају бити испуњени у сваком тренутку осциловања, у неким случајевима може се показати једнакост временских функција између облика осциловања која повлачи са собом једнакост сопствених фреквенција. Ова једнакост сопствених фреквенција назива се спрезање облика осциловања. У предложеној дисертацији се истражују услови спрезања модова осциловања код греда које осцилују у простору. Такође, изводе се услови ортогоналности модова осциловања код спрегнутих осцилација. Врши се поређење Ојлер-Бернулијеве и Тимошенкове теорије и испитује се граница примењивости ових теорија.

Модел конзоле са ексцентрично постављеним телом на слободном крају користи се за прорачун великог броја конструкција, као што су стубови ветротурбина, водоторњеви, дупле конзоле итд. Међутим у доступној литератури није обрађен утицај производа инерције и параметара ексцентричности центра масе придодатог тела на врсту спрезања аксијалних, савојних и увојних осцилација. Преглед литературе указује на то да је потребно спровести истраживање утицаја производа инерције и ексцентрицитетa центра масе придодатог тела на врсту спрезања различитих типова осцилација.

Поставља се математички модел конзоле са произвољно постављеним придодатим телом на слободном крају, а затим се коришћењем Хамилтоновог принципа одређују диференцијалне једначине понашања греде и за случај Ојлер-Бернулијеве и Тимошенкове греде. Уз коришћење граничних услова у укљештењу и диференцијалних једначина кретања придодатог тела одређују се услови под којима долази до спрезања

различитих типова осцилација. Коришћењем SNMIP методе одређују се сопствене фреквенције. Изводе се услови ортогоналности модова осциловања за просторне спрегнуте подужне, попречне, попречне и увојне осцилације конзоле.

Код одређеног типа међусобно круто везаних греда, због типа круте везе долази до изједначавања временских функција и сопствених фреквенција појединачних греда. Истражују се услови под којима долази до изједначавања две узастопне сопствене фреквенције (crossing) односно до губитка мода осциловања. Изводи се аналитички доказ који потврђује појаву crossing-а на конкретном примеру.

Применом Понтрјагиновог принципа максимума оптимизује се маса греде тако да се жељена главна сопствена фреквенција АФГ греде константног попречног пресека рачуна, а затим одређује АФГ греда која има исту главну сопствену фреквенцију али увођењем променеивог попречног пресека оптимизовану минималну масу.

Резултати се верификују применом методе коначних елемената али и експериментом. Испитују се сопствене фреквенције АФГ греда применом принудне силе пиезо-актуаторима. У експерименталном делу истраживања, користе се методе за производњу 3Д штампаних АФГ греда. Испитују се могућности штампања АФГ греда коришћењем FDM (Fused Deposition Modeling) 3Д штампача који имају могућност депозиције више различитих материјала. Испитују се осцилације 3Д штампаних греда са периодичном структуром упоредно са хомогеним 3Д штампаним гредама. Добијени резултати код физичких модела у експерименту се пореде са нумеричким резултатима код математичких модела.

2.1 Библиографски извори: преглед релевантних референци

У наставку је наведен део релевантне литературе на којој се заснивају истраживања предвиђена овом докторском дисертацијом:

- [1] S. Šalinić, A. Obradović, and A. Tomović, "Free vibration analysis of axially functionally graded tapered, stepped, and continuously segmented rods and beams," *Compos B Eng*, vol. 150, pp. 135–143, Oct. 2018, doi: 10.1016/j.compositesb.2018.05.060,
- [2] A. Tomović, "Coupled transverse and longitudinal vibrations of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams of functionally graded materials," University of Belgrade, Belgrade, 2019,
- [3] Leonard. Meirovitch, *Fundamentals of vibrations*. McGraw-Hill, 2001,
- [4] T. M. Atanackovic and A. P. Seyranian, "Application of Pontryagin's principle to bimodal optimization problems," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 37, no. 1, pp. 1–12, Dec. 2008, doi: 10.1007/s00158-007-0211-6,
- [5] T. M. Atanackovic and V. B. Glavardanov, "Optimal shape of a heavy compressed column," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 28, no. 6, pp. 388–396, Dec. 2004, doi: 10.1007/s00158-004-0457-1,
- [6] T. M. Atanackovic, "Optimal Shape of Column with Own Weight: Bi and Single Modal Optimization," *Meccanica*, vol. 41, no. 2, pp. 173–196, Apr. 2006, doi: 10.1007/s11012-005-2168-0,
- [7] G. A. L. da Silva and R. Nicoletti, "Optimization of natural frequencies of a slender beam shaped in a linear combination of its mode shapes," *J Sound Vib*, vol. 397, pp. 92–107, Jun. 2017, doi: 10.1016/j.jsv.2017.02.053,
- [8] M.-X. He and J.-Q. Sun, "Multi-objective structural-acoustic optimization of beams made of functionally graded materials," *Compos Struct*, vol. 185, pp. 221–228, Feb. 2018, doi: 10.1016/j.compstruct.2017.11.004,

- [9] M. H. Ghayesh, "Vibration analysis of shear-deformable AFG imperfect beams," *Compos Struct*, vol. 200, pp. 910–920, Sep. 2018, doi: 10.1016/j.compstruct.2018.03.091,
- [10] J. N. Reddy, *An Introduction to Continuum Mechanics, Second Edition*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. doi: 10.1017/CBO9781139178952,
- [11] A. Obradović, S. Šalinić, and A. Grbović, "Mass minimization of an Euler-Bernoulli beam with coupled bending and axial vibrations at prescribed fundamental frequency," *Eng Struct*, vol. 228, p. 111538, Feb. 2021, doi: 10.1016/j.engstruct.2020.111538,
- [12] B. L. Karihaloo and F. I. Niordson, "Optimum design of vibrating cantilevers," *J Optim Theory Appl*, vol. 11, no. 6, pp. 638–654, Jun. 1973, doi: 10.1007/BF00935563,
- [13] A. Obradović, B. Jeremić, A. Tomović, S. Šalinić, and Z. Mitrović, "Mass Minimization of Axially Functionally Graded Euler–Bernoulli Beams with Coupled Bending and Axial Vibrations," *Mechanics of Solids*, vol. 59, no. 3, pp. 1358–1375, Jun. 2024, doi: 10.1134/S002565442460260X,
- [14] B. Palancz and G. Popper, "Symbolic solution of boundary value problem via mathematica," *Periodica Polytechnica: Civil Engineering*, vol. 44, Aug. 2000,
- [15] A. Tomović, S. Šalinić, A. Obradović, M. Lazarević, and Z. Mitrović, "The exact natural frequency solution of a free axial- bending vibration problem of a non-uniform AFG cantilever beam with a tip body," in *7th International Congress of Serbian Society of Mechanics*, Sremski Karlovci, Serbia, 2019,
- [16] A. Tomović, "A novel approach to the free axial-bending vibration problem of inhomogeneous elastic beams with variable cross-sectional profiles," in *6th International Congress of Serbian Society of Mechanics*, Tara, Serbia, 2017,
- [17] S. S. Rao, *Vibration of continuous systems*. Wiley, 2007,
- [18] I. Elishakoff and S. Candan, "Apparently first closed-form solution for vibrating: inhomogeneous beams," *Int J Solids Struct*, vol. 38, no. 19, pp. 3411–3441, May 2001, doi: 10.1016/S0020-7683(00)00266-3,
- [19] B. S. Shvartsman and J. Majak, "Free vibration analysis of axially functionally graded beams using method of initial parameters in differential form," *Advances in Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 9, pp. 31–42, 2016, doi: 10.12988/atam.2016.635,
- [20] B. Vadim, *Theory of mechanical vibration (In Russian)*. 1980,
- [21] W. R. Chen and H. Chang, "Closed-Form Solutions for Free Vibration Frequencies of Functionally Graded Euler-Bernoulli Beams," *Mechanics of Composite Materials*, vol. 53, no. 1, pp. 79–98, Mar. 2017, doi: 10.1007/s11029-017-9642-3,
- [22] S. Šalinić, A. Obradović, and A. Tomović, "Free vibration analysis of axially functionally graded tapered, stepped, and continuously segmented rods and beams," *Compos B Eng*, vol. 150, pp. 135–143, Oct. 2018, doi: 10.1016/j.compositesb.2018.05.060,
- [23] A. Nikolić and S. Šalinić, "A rigid multibody method for free vibration analysis of beams with variable axial parameters," *Journal of Vibration and Control*, vol. 23, no. 1, pp. 131–146, Jan. 2017, doi: 10.1177/1077546315575818,
- [24] M. Bambaeechee, "Free vibration of AFG beams with elastic end restraints," *Steel and Composite Structures*, vol. 33, no. 3, pp. 403–432, Nov. 2019,

- [25] S. Šalinić, M. Todorović, and A. Obradović, "An analytical approach for free vibration analysis of Euler-Bernoulli stepped beams with axial-bending coupling effect," *Engineering Today*, vol. 1, no. 4, pp. 7–17, 2022, doi: 10.5937/engtoday2204007S,
- [26] J. R. Banerjee, A. Ananthapuvirajah, X. Liu, and C. Sun, "Coupled axial-bending dynamic stiffness matrix and its applications for a Timoshenko beam with mass and elastic axes eccentricity," *Thin-Walled Structures*, vol. 159, p. 107197, Feb. 2021, doi: 10.1016/j.tws.2020.107197,
- [27] J. R. Banerjee and A. Ananthapuvirajah, "Coupled axial-bending dynamic stiffness matrix for beam elements," *Comput Struct*, vol. 215, pp. 1–9, Apr. 2019, doi: 10.1016/j.compstruc.2019.01.007,
- [28] A. Nikolić, "Free vibration analysis of a non-uniform axially functionally graded cantilever beam with a tip body," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 87, no. 7, pp. 1227–1241, Jul. 2017, doi: 10.1007/s00419-017-1243-z,
- [29] V. Boggarapu *et al.*, "State of the art in functionally graded materials," *Compos Struct*, vol. 262, p. 113596, Apr. 2021, doi: 10.1016/j.compstruct.2021.113596,
- [30] I. Elishakoff, D. Pentaras, and C. Gentilini, *My library My History Mechanics Of Functionally Graded Material Structures*. World Scientific, 2015,
- [31] A. Tomović, S. Šalinić, A. Obradović, N. Zorić, and Z. Mitrović, "Coupled Bending and Axial Vibrations of Axially Functionally Graded Euler–Bernoulli Beams," *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, vol. 12, no. 3, pp. 2987–3004, Mar. 2024, doi: 10.1007/s42417-023-01027-y.

3. Полазне хипотезе

За равну АФГ греду у недеформисаном стању као предмет истраживања узимају се претпоставке о непрекидности средине и малим деформацијама греде (деформације које остају у оквиру линеарне еластичности материјала). Затим се уводе претпоставке за Ојлер-Бернулијеву греду код које попречни пресеци остају управни у односу на еластичну линију али и за Тимошенкову греду код које долази до закретања попречних пресека око осе управне на еластичну линију и раван савијања. Користи се Хамилтонов принцип за добијање тачних парцијалних диференцијалних једначина кретања греде са бесконачно степени слободе.

4. Научне методе истраживања

Током реализације циљева истраживања користиће се следеће научне методе (теорије):

- механика непрекидних средина;
- теорија еластичности;
- теорија осцилација линијских носача;
- парцијалне диференцијалне једначине;
- елементи линеарне алгебре, за формирање фреквентне једначине;
- нумеричке методе за интеграцију система линеарних диференцијалних једначина;
- Понтрјагинов принцип максимума за оптимизацију масе греде;
- лабораторијско истраживање на дизајну и производњи функционално градијентног материјала;
- експериментално испитивање и обрада података у циљу верификације математичког модела АФГ греде као непрекидне средине и модела греде за методу коначних елемената;

5. Очекивани научни допринос

- Проналажење решења у затвореном облику за спрегнуте уздужне, попречне и увојне осцилације АФГ греда и решавање тачних диференцијалних једначина кретања непрекидних средина коришћењем савремених нумеричких метода (креирање рачунарског кода за решавање предложеног проблема);
- Формирање поступка одређивања геометријских и масених карактеристика греде за жељену сопствену фреквенцију;

6. План истраживања и структура рада

Истраживање у оквиру теме докторске дисертације биће спроведено и написано према следећим корацима:

- преглед истраживања у оквиру области осцилација АФГ греда из доступне литературе ;
- формулација математичког модела еластичне греде и граничних услова у општем случају;
- формулација граничних услова који спречу аксијалне, попречне и увојне осцилације
- одређивање система диференцијалних једначина кретања Ојлер-Бернулијеве и Тимошенкове АФГ греде;
- Модификација *SNMIP* поступка у циљу решавања система тачних диференцијалних једначина у циљу одређивања сопствене фреквенције спрегнутих уздужних, попречних и увојних осцилација Ојлер-Бернулијевих и Тимошенкових АФГ греда променљивог попречног пресека;
- испитивање услова под којима долази до спрезања одређених типова осцилација;
- за случај спрегнутих уздужних, савојних и увојних осцилација одређују се услови ортогоналности модова;
- на основу одређених услова ортогоналности одређују се непознате константе у решеним једначинама кретања АФГ греде;
- утврђивање границе важења Ојлер-Бернулијеве и Тимошенкове теорије;
- примена Понтрјагиновог принципа максимума на оптимизацију масе греде за задату сопствену фреквенцију осциловања;
- креирање експерименталне поставке за лабораторијска испитивања осцилација греда од функционално градијентног материјала;
- обрада експерименталних података;
- поређење резултата математичког модела АФГ греде као непрекидне средине са резултатима методе коначних елемената на конкретном примеру као и са резултатима добијених експериментом;
- испитивање утицаја ексцентрицитета тела на сопствене фреквенције;
- закључна разматрања.

7. Закључак и предлог

На основу анализе пријаве теме докторске дисертације Кандидата, архивираних под евиденцијским бројем 1312/1 од 26.09.2025. године, а сходно сагласности Колегијума наставника Катедре за механику 1312/2 од 06.10.2025. године, као и Одлуци Наставно-научног већа број 1312/3 од 23.10.2025. године, Комисија за оцену научне заснованости теме докторске дисертације закључује да је предложена тема научно утемељена и адекватна за израду докторске дисертације, као и да Кандидат испуњава све услове прописане Законом о високом образовању и Статутом Машинског факултета који га квалификују за рад на предметној докторској дисертацији.

Имајући у виду наведено, Комисија предаже Наставно-научном већу Машинског факултета Универзитета у Београду да се Кандидату одобри израда докторске дисертације под називом:

**Моделирање спрегнутих осцилација и оптимизација облика аксијално
функционално градијентних греда,**

научна област: **машинско инжењерство** (ужа научна област – **механика**).

На основу Одлуке Наставно-научног већа број 1312/3 од 23.10.2025. године, за менторе Кандидата током рада на предметној докторској дисертацији, Комисија предлаже да буду именовани др Александар Томовић, ванр. проф. и др Данило Карличић, виши научни сарадник, Математички институт САНУ, који задовољавају услове члана 28, став 9, Правилника о докторским студијама на Универзитету у Београду – Машинском факултету (Образац 3) и то у домену машинског инжењерства – механике, дакле имају све неопходне компетенције у оквиру научне области којој припада тема докторске дисертације, са чиме је Комисија у потпуности сагласна.

У Београду, 6.11.2025. године.

Чланови комисије:

др Александар Обрадовић, редовни професор,
Универзитет у Београду – Машински факултет,

др Александар Томовић, ванредни професор,
Универзитет у Београду – Машински факултет,

др Данило Карличић, виши научни сарадник,
Математички институт САНУ,

др Милош Пјевић, ванредни професор,
Универзитет у Београду – Машински факултет,

др Славиша Шалинић, редовни професор,
Универзитет у Крагујевцу – Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву.