

Извештај Комисије за оцену научне заснованости
теме докторске дисертације кандидата Милана Павловића

Одлуком Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, донетој на 443. седници одржаној 29. маја 2026. године, именовани смо за чланове Комисије за оцену заснованости теме докторске дисертације

„Суб-Риманови геодезијски токови на Хајзенберговој групи”

кандидата Милана Павловића. Усмена одбрана предложене теме одржана је 16. јуна 2026. године пред Комисијом. Након излагања кандидата уследила је дискусија у којој су чланови Комисије изнели своја запажања и сугестије. Комисија подноси Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду следећи Извештај.

1 Биографија кандидата

Лични подаци

Име и презиме: Милан (Драгутин) Павловић
Место и датум рођења: Чачак, 2.11.1992.
Звање: мастер математичар
Електронска адреса: milan.pavlovic@matf.bg.ac.rs

Образовање

Милан Павловић је основне студије на смеру Теоријска математика и примене Математичког факултета Универзитета у Београду уписао 2011. године и завршио 2016. године са просечном оценом 9.23. На истом факултету је завршио и мастер студије 2018. године, на смеру Теоријска математика, са просечном оценом 10. Одбранио је мастер рад на тему „Класична афина геометрија Блашкеових хиперповрши” под менторством проф. др Мирославе Антић. Од школске 2018/2019. године похађа докторске студије на Математичком факултету, ужа област Геометрија, где је положио све испите са просечном оценом 10.

Радно искуство

Од 2016. године, Милан Павловић је ангажован на Математичком факултету као сарадник у настави, прво на Катедри за математичку анализу, а затим на Катедри за геометрију. У звање асистента на Катедри за геометрију је изабран 2018. године. Држао је вежбе из предмета Пројективна геометрија са применама у рачунарству, Геометрија кривих и површи, Геометрија 1, Геометрија 3, Геометрија 4, Геометријска визуелизација, Геометрија за информатичаре, Примена пројективне геометрије у рачунарству, Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, Анализа 1, Анализа 1 за информатичаре.

Учешће на конференцијама и пројектима

Милаш Павловић је имао саопштење на конференцији

- *XXII Geometrical Seminar* (Врњачка Бања, Србија, 2024.)

и постер на конференцијама

- *Geometry, Dynamics, Integrable Systems* (Златибор, Србија, 2024.);
- *Sub-Riemannian geometry and beyond III* (Пиза, Италија, 2023.)

Учествовао је без саопштења на међународним конференцијама:

- *The Eight International Conference Geometry, Dynamics, Integrable Systems* (Златибор, Србија, 2022.);
- *XXI Geometrical seminar* (Београд, Србија, 2022.);
- *Geometry, Dynamics, Integrable Systems* (Златибор, Србија, 2022.);
- *Geometry, Groups, Operator algebras and Integrability* (Москва, Русија (online) 2022.);
- *XX Geometrical Seminar* (Врњачка Бања, Србија, 2018.).

Био је члан Организационог одбора међународне конференције *XXI Geometrical seminar* одржане у Београду 2022. године.

Милаш Павловић је био учесник семинара „*Reading Seminar on the works of Kleiner, Müller and Xie on rigidity of Sobolev mappings between Carnot groups*” који је у хибридном формату одржан у периоду од фебруара до априла 2023. године, у заједничкој организацији Karlsruhe Institute of Technology и Scuola Normale Superiore, Pisa. Такође, активан је члан семинара „*Геометрија, образовање и визуелизација са применама*”.

У периоду од фебруара до децембра 2019. године био је учесник пројекта број 74012: „*Геометрија, образовање и визуелизација са применама*” Министарства науке и образовања Републике Србије.

2 Списак научних радова

1. М. Pavlović, Т. Šukilović: „*Integrability of the sub-Riemannian geodesic flow of the left-invariant metric on the Heisenberg group*” (arXiv: 2404.06586, 2024)
2. М. Pavlović: „*Classification of the geodesic curves of the sub-Riemannian LR system on the Heisenberg group in dimension 5*” (arXiv: 2512.11155, 2025)

3 Образложење теме

Суб-Риманова геометрија је уопштење Риманове геометрије и понекад се описује као Риманова геометрија са ограничењима која наглашавају њену анизотропију. Међу суб-Римановим многострукостима, нилпотентне групе чине веома важну класу. Оне су тангентни копуси суб-Риманових многострукости, који представљају најближи аналогон тангентним просторима у Римановој геометрији, а Хајзенбергова група је најважнији и најзначајнији пример суб-Риманове геометрије који није Риманов. Иако је то релативно нова област геометрије, суб-Риманова геометрија је плодно поље истраживања захваљујући широком спектру примена, укључујући роботiku, теорију оптималног управљања, механику, теорију хипоелиптических оператора, геометријску теорију група и диференцијалну геометрију.

У односу на Риманову геометрију, суб-Риманова геометрија има своје посебне особине. На пример, постоје локално минимизујуће криве које пишу решења Хамилтоновог система, и њих називамо абнормалним геодезијским кривама. Такође, Хаусдорфова димензија је увек већа од тополошке димензије, што је особина која одражава анизотропију у суб-Римановим структурама.

Проблем интеграбилности Хамилтонових система је важан проблем у класичној механици и динамичким системима. Од посебног значаја је проучавање интеграбилности суб-Риманових геодезијских токова индукованих лево-инваријантном Римановом метриком на Лијевој групи. Постоје две различите класе овог проблема: прва је повезана са лево-инваријантном (LL системи), а друга са десно-инваријантном дистрибуцијом (LR системи).

Суб-Риманови LL системи су иптезивно проучавани у литератури. Примери интеграбилних суб-Риманових геодезијских токова на Лијевим групама и хомогеним просторима могу се наћи, на пример, у [2, 6, 11].

При проучавању нехолономних система на Лијевим групама јавља се важна класа проблема који се моделују LR системима (видети [5, 13]). На пример, кретање крутог тела око фиксне тачке под нехолономним ограничењем (пројекција угаоне брзине на фиксни вектор у простору је константна) описује се интеграбилним LR системом. Још један важан пример таквих система је Чапљигинов проблем кутле која се котрља по храпавој равни. Ови системи се такође проучавају у оквиру суб-Риманове геометрије (видети [1, 7, 12]), али су сви резултати везани искључиво за димензију 3.

На примеру Хајзелбергове групе, дисертација би требало да прикаже прве резултате интеграбилности суб-Риманових LR система у вишим димензијама.

3.1 Предмет и садржај докторске дисертације

Суб-Риманова структура на многострукости Q димензије n је пар $(\mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{sR})$, где је $\mathcal{D}$ дистрибуција константног ранга $m < n$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle_{sR}$ скаларни производ на $\mathcal{D}$. Ако у свакој тачки $q \in Q$ векторска поља из $\mathcal{D}_q$, заједно са свим њиховим Лијевим заградама, генеришу цео простор $T_q Q$, кажемо да је ова дистрибуција потпуно нехолономна.

За дати скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle_{sR}$, линеарно пресликавање $g(q) : T_q^* M \rightarrow \mathcal{D}_q \subset T_q M$ се дефинише тако да је $g(q)\lambda$ јединствени вектор за који важи $\langle g(q)\lambda, Y \rangle_{sR}(q) = \lambda(Y(q))$, за све $Y \in \mathcal{D}_q$, при чему се на десној страни користи уобичајено упаривање вектора и ковектора. Симетрични тензор g^{ij} назива се Карно-Каратеодоријев метрички тензор. Он је непегативно дефинитан, али није позитивно дефинитан, јер пресликавање није сурјективно. Упаривање $\lambda(Y(q))$ фиксираних вектора Y и ковектора λ се означава са $P_Y(q, \lambda)$ и назива момент пресликавања.

Суб-Риманов Хамилтонијан се дефинише као:

$$H(q, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{ij} P_{X_i}(q, \lambda) P_{X_j}(q, \lambda),$$

а одговарајући Хамилтонов систем једначина на котангентном раслојењу је:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \quad \dot{\lambda}_i = \{\lambda_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (1)$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ означава Пуасонову заграду, стандардно дефинисану помоћу Пуасоновог тензора $\Lambda: \{f, g\}|_x = \Lambda_x(df(x), dg(x))$. Први интегрални Хамилтоновог система (1), тј. све функције $f \in C^\infty(T^*Q)$ које задовољавају услов $\{f, H\} = 0$, чине Лијеву алгебру $\mathcal{F}$. Нека је $F_x = \{df | f \in \mathcal{F}\}$ потпростор од $T^*(T^*Q)$ разапет диференцијалима функција из $\mathcal{F}$ у тачки $x \in T^*Q$. Тада се диференцијална димензија $\text{ddim } \mathcal{F}$ и диференцијални индекс $\text{dind } \mathcal{F}$ од $\mathcal{F}$ дефинишу као димензије од F_x и $\dim \ker \Lambda_x|_{F_x}$, редом. Алгебра $\mathcal{F}$ је комплетна ако је

$\dim F + \dim F = \dim T^*Q$. Хамилтонов систем (1) је комплетно интеграбилан у некому-
тативном смислу ако поседују комплетну алгебру $\mathcal{F}$ првих интеграла. Ако је $\mathcal{F}$ комплетна
и комутативна, $\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{F} = \frac{1}{2} \dim T^*Q$, тада имамо стандардну Лиувилу интег-
рабилност.

Хајзенбергова група игра важну улогу у теорији репрезентације нилпотентних Лијевих
група. Такође, представља најједноставнији пример простора са природном контактном
структуром. Дефинишемо је као Лијеву групу $H_{2n+1} = (\mathbb{R}^{2n+1}, \cdot)$ са операцијом множења
 $(u, \zeta) \cdot (v, \chi) := (u + v, \zeta + \chi + \omega(u, v))$, где је ω стандардна симплектичка форма простора
 $\mathbb{R}^{2n}$. Одговарајућа Лијева алгебра

$$\mathfrak{h}_{2n+1} = \mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{Z} = \{(a, \alpha) \mid a \in \mathbb{R}^{2n}, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

задата је комутаторском једначином $[(a, \alpha), (b, \beta)] = (0, \omega(a, b))$, односно $[e_i, f_i] = \xi$, где
 $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ представљају стандардну базу $\mathbb{R}^{2n}$, а $\xi = (0, 1)$ је елемент који гене-
рише центар алгебре $\mathbb{Z}$.

У [3] је показано да на Хајзенберговој групи H_{2n+1} свака лево-инваријантна суб-Риманова
структура изометрична је тачно једној од структура $(\bar{D}, g^\sigma)$ задатих са:

$$\begin{cases} \bar{D}(e) = \mathcal{L}\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}, \\ g^\sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, 1, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, 1), \end{cases}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{n-1} \geq 1.$$

Дистрибуција $\bar{D}$ је контактна, тако да су сви геодезијски токови нормални, односно
анализирани су као решења Хамилтонових система. Пројекције трајекторија Хамилтоно-
вог тока на T^*H_{2n+1} са Хамилтоновом функцијом $H(x, \lambda) = \frac{1}{2} g^{ij} \lambda_i \lambda_j$ управо су природно
параметризоване нормалне геодезијске криве Карно-Каратеодоријеве метрике g^{ij} (виде-
ти [9]).

У наставку се анализирају две различите класе нормалних геодезијских токова који од-
говарају лево-инваријантној метрици на Хајзенберговој групи H_{2n+1} . Прва класа одговара
лево-инваријантној дистрибуцији (LL системи), док друга одговара десно-инваријантној
(LR системи). Резултати за LL системе су већ познати у општијем контексту и овде су
представљени у компактном облику и записани су експлицитно за општу метрику, јер се
у литератури углавном могу наћи само резултати за стандардну метрику. Најважнији ре-
зултат односи се на LR системе. Дефинише се суб-Риманов LR проблем и показује се да
је систем добијен његовом пројекцијом на хипер-раван $\mathbb{R}^{2n}$ еквивалентан Хамилтоновом
систему који описује кретање наелектрисане честице у константном магнетном пољу. По-
казује се да су и оригинални и рестриковани систем интеграбилни: у комутативном смислу
за $n = 1, 2$, а у некомутативном за $n > 2$. Специјално, за $n = 1, 2$ излаже се потпуна
класификација трајекторија рестрикованог система у хиперсферним координатама.

3.2 Научни циљ докторске дисертације

Главни циљ дисертације је испитивање интеграбилности суб-Риманових геодезијских
токова на Хајзенберговој групи H_{2n+1} .

За метрику која одговара лево-инваријантној дистрибуцији, систем је интеграбилан у
некомутативном смислу. Рестриција овог система на $\mathbb{R}^{2n}$ представља систем еквивалент-
ан Хамилтонијану који описује кретање наелектрисане честице у константном магнетном
пољу, чији се фазни простор разлаже на трајекторије које су или затворене или свуда густе
на торусу T^n . Ове тврдње представљају последицу општијих резултата који су претходно
разматрани у [4, 8, 10], али су овде први пут компактно формулисани и доказани за LL
систем који одговара уопштеној Римановој метрици на H_{2n+1} .

У [12] проучаван је суб-Риманов LR систем на Хајзенберговој групи H_3 и утврђено је да
је такав систем и интеграбилан и повезан са одређеним магнетним пољем. Циљ ове дисер-
тације је да уопшти ове резултате и покаже интеграбилност LR система на Хајзенберговој

групи произвољне димензије H_{2n+1} . Такође, рестрикција овог система на $\mathbb{R}^{2n}$ еквивалентна је систему који описује кретање наелектрисане честице у константном магнетном пољу.

За разлику од LL система, за који су геодезијске линије праве или хеликси, код LR система је ситуација знатно компликованија. Класификација геодезијских кривих на групи H_3 је представљена у раду [1] и решења су изражена помоћу елиптичких интеграла. У дисертацији ће бити изложена класификација кривих у димензији 5.

3.3 Основне хипотезе

Суб-Риманов геодезијски ток који одговара лево-инваријантној метрици на Хајзенберговој групи H_{2n+1} и десно-инваријантној дистрибуцији је Хамилтонов систем који је интеграбилан у комутативном смислу за $n = 1$ или $n = 2$, а за $n > 2$ је интеграбилан у некомутативном смислу. Такође, рестрикција LR система на $\mathbb{R}^{2n}$ је потпуно интеграбилан систем који описује кретање наелектрисане честице у константном магнетном пољу.

У димензији 5, суб-Риманове геодезијске криве за рестриковања LR систем припадају једној од две фамилије кривих: трајекторијама које леже изван неке хиперсфере или трајекторијама које леже између две хиперсфере.

3.4 Методе које се користе у истраживању

У дисертацији се користе првенствено методе Лијевих група и алгебри, диференцијалне геометрије и Хамилтонове механике. За класификацију геодезијских кривих, осим стандардних метода теорије диференцијалних једначина, користи се и теорија елиптичких интеграла, а за саму визуелизацију кривих потребно је користити и нумеричке методе решавања система диференцијалних једначина.

Литература

- [1] S. V. Agapov, M. R. Borchashvili, *On certain sub-Riemannian geodesic flow on the Heisenberg group*, Siberian Math. J., 2017; 58(6): 943–951.
- [2] V. N. Berestovskii, I. A. Zubareva, *Sub-Riemannian distance in the Lie groups $SU(2)$ and $SO(3)$* , Siberian Adv. Math., 2016; 26(2): 77–89.
- [3] R. Biggs, P. T. Nagy, *A classification of sub-Riemannian structures on the Heisenberg groups*, Acta Polytech. Hungar., 2013; 10(7): 41–52.
- [4] R. Biggs, P. T. Nagy, *On sub-Riemannian and Riemannian structures on the Heisenberg groups*, J. Dyn. Control. Syst., 2016; 22: 563–594.
- [5] Yu. N. Fedorov, B. Jovanović, *Nonholonomic LR systems as generalized Chaplygin systems with an invariant measure and geodesic flows on homogeneous spaces*, J. Nonlinear Sci., 2004; 14: 341–381.
- [6] B. Jovanović, T. Šukilović, S. Vukmirović, *Almost multiplicity free subgroups of compact Lie groups and polynomial integrability of sub-Riemannian geodesic flows*, Lett Math Phys., 2024; 114: 14.
- [7] A. D. Mazhitova, *The normal sub-Riemannian geodesic flow on $E(2)$ generated by a left-invariant metric and a right-invariant distribution*, Sib. Math. J., 2014; 55: 948–953.
- [8] A. Montanari, D. Morbidelli, *On the subRiemannian cut locus in a model of free two-step Carnot group*, Calc. Var., 2017; 56: 36.

- [9] R. Montgomery, *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, Math. Surv. Monogr., Am. Math. Soc. Providence, RI, 2002; 91: 259 pp.
- [10] A. V. Podobryaev, *Homogeneous geodesics in sub-Riemannian geometry*, ESAIM, Control Optim. Calc. Var., 2023; 29: 11.
- [11] Yu. L. Sachkov, *Left-invariant optimal control problems on Lie groups: classification and problems integrable by elementary functions*, Russian Math. Surveys, 2022; 77: 99–163.
- [12] I. A. Taimanov, *Integrable geodesic flows of nonholonomic metric*, J. Dynam. Control Syst., 1997; 3: 129–47.
- [13] A. P. Veselov, L. E. Veselova, *Integrable nonholonomic systems on Lie groups*, Mat. Zametki, 44 1988; 5: 604–619 (Russian); English translation: 1988 Mat. Notes 44 no. 5.

4 Подаци о предложеном ментору

Име и презиме: Тијана (Зоран) Шукиловић

Установа где је запослен: Математички факултет, Универзитет у Београду

Звање: вапреди професор

4.1 Одабрани научни радови који квалификују предложеног ментора за вођење докторске дисертације

1. Božidar Jovanović, Tijana Šukilović, Srđan Vukmirović:
Normal sub-Riemannian geodesics related to filtrations of Lie algebras,
accepted in: The Journal of Geometric Analysis.
2. Tijana Šukilović, Srđan Vukmirović, Neda Bokan:
On the moduli spaces of left invariant metrics on cotangent bundle of Heisenberg group,
Revista de la Unión Matemática Argentina, Vol. 68, No. 2, 485–518, 2025.
3. Božidar Jovanović, Tijana Šukilović, Srđan Vukmirović:
Almost multiplicity free subgroups of compact Lie groups and polynomial integrability of sub-Riemannian geodesic flows, Letters in Mathematical Physics, Vol. 114: 14, 2024.
4. Tijana Šukilović, Srđan Vukmirović:
Riemannian and sub-Riemannian structures on a cotangent bundle of Heisenberg group,
Filomat, Vol. 37, No. 25, 8481–8488, 2023.
5. Tijana Šukilović, Srđan Vukmirović:
Geometry of cotangent bundle of Heisenberg group, Differential Geometry and its Applications, Vol. 88, 101997, 2023.
6. Božidar Jovanović, Tijana Šukilović, Srđan Vukmirović:
Integrable systems associated to the filtrations of Lie algebras, Regular and Chaotic Dynamics, Vol. 28, No. 1, 44–61, 2023.
7. Tijana Šukilović:
Classification of left invariant metrics on 4-dimensional solvable Lie groups, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 47, No. 2, 181–204, 2020.
8. Wafa Batat, Tijana Šukilović, Srđan Vukmirović:
Ricci solitons of three-dimensional Bianchi-Cartan-Vranceanu spaces, Journal of Geometry, Vol. 111, No. 1, 2020.

9. Srđan Vukmirović, Tijana Šukilović:
Geodesic completeness of the left-invariant metrics on $\mathbb{R}H^n$, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 72, No. 5, 702–711, 2020.
10. Neda Bokan, Tijana Šukilović, Srđan Vukmirović:
Geodesically equivalent metrics on homogenous spaces, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 69, No. 144, 945–954, 2019.
11. Tijana Šukilović:
Geometric properties of neutral signature metrics on 4-dimensional nilpotent Lie groups, Revista de la Unión Matemática Argentina, Vol. 57, No. 1, 23–47, 2016.
12. Tijana Šukilović:
Isometry groups of 4-dimensional nilpotent Lie groups, Fundamental and Applied Mathematics, Vol. 20, No. 3, pp. 257–271, 2015. (in Russian)
13. Neda Bokan, Tijana Šukilović, Srđan Vukmirović:
Lorentz geometry of 4-dimensional nilpotent Lie groups, Geometriae Dedicata, Vol. 177, No. 1, pp. 83–102, 2015.

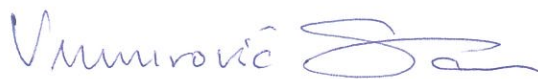
5 Закључак и предлог

Предложена тема је веома интересантна и актуелна у области суб-Риманове геометрије, Хамилтонове геометрије и динамичких система. Резултати до којих је кандидат дошао у досадашњим истраживањима представљају значајан научни допринос у изучавању интеграбилности LL и LR система на Хајзенберговој групи произвољне димензије и разумевању геодезијских токова LR система на Хајзенберговој групи димензије пет.

Очекује се да ће даља истраживања проблема из ове области довести до нових значајних научних резултата.

Због свега наведеног предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да донесе одлуку о прихватању теме докторске дисертације „Суб-Риманови геодезијски токови на Хајзенберговој групи” кандидата Милана Павловића, као и одлуку о одређивању проф. др Тијане Шукиловић за ментора.

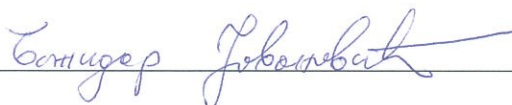
У Београду, 16. јуна 2026. године



проф. др Срђан Вукмировић, редовни професор
Математички факултет, Универзитет у Београду



проф. др Јелена Катић, редовни професор
Математички факултет, Универзитет у Београду



др Бождар Јовановић, научни саветник
Математички институт САНУ