

Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду

На седници Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, која је одржана 3. 7. 2026., именовани смо за чланове Комисије за оцену докторске дисертације "*Novel goodness-of-fit tests based on independence-type characterizations*" (Нови тестови сагласности засновани на карактеризацијама независности статистика) докторанда Катарине Халај Милеуснић. После прегледа рукописа који је Катарина Халај Милеуснић предала комисији, подносимо следећи

ИЗВЕШТАЈ

1 Биографија

Катарина Халај Милеуснић рођена је 17.11.1993. године у Београду. Основне студије на Математичком факултету (студијски програм Математика, модул Статистика, актуарска и финансијска математика) је уписала 2012. године и завршила 2016. године са просеком 9.21. Мастер студије на истом модулу завршава 2017. године са просеком 10, одбранивши мастер рад „Оптимизација портфолија заснована на вредности при ризику“ под менторством проф. др Бојане Милошевић. Докторске студије на Математичком факултету (студијски програм Математика) је уписала 2017. године.

Од 2017. године је запослена на Саобраћајном факултету Универзитета у Београду, и то прво у звању сарадника у настави, а од 2018. у звању асистента. Члан је Катедре за општу и примењену математику. У академској 2022/2023 држала је вежбе на Фармацеутском факултету.

2 Научни рад кандидата

Објављени научни радови у вези са темом дисертације

1. K. Halaj, B. Milošević, M. Obradović and M. D. Jiménez-Gamero. Correlation type goodness-of-fit tests based on independence characterization. AStA Advances in Statistical Analysis, 108: 185-207, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10182-023-00475-x> [M22] IF2024=1.5 Statistics & Probability
2. K. Halaj and B. Milošević. On the application of Ferguson characterization for the construction of a goodness-of-fit test for the geometric distribution. Statistical Methods & Applications, 34: 545-560, 2025. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10260-025-00787-z> [M22] IF2024=1.1 Statistics & Probability
3. K. Halaj. A goodness-of-fit test for the wrapped normal distribution based on an independence characterization. Communications in Statistics - Simulation and Computation, 2025. DOI: <https://doi.org/10.1080/03610918.2025.2566830> [M22] IF2024=1.0 Statistics & Probability

Остали научни радови

1. N. Stepanović, V. Tubić, M. Milenković and K. Halaj. The impact of basic traffic flow characteristics on traffic accident occurrence on 2-lane rural roads in Serbia. *Transport*, 40(1): 64-73, 2023. DOI: <https://doi.org/10.3846/transport.2025.20543> [M22] IF2024=1.4 Transportation Science & Technology

Сопштења на конференцијама штампана у изводу

- K. Halaj, B. Milošević, M. Veljović. Specification tests for error distribution in regression models with a directional response variable. 9th European Congress of Mathematics (9ECM), Seville, Spain, 15-19 July 2024. (презентујући аутор)
- K. Halaj, B. Ebner, B. Milošević, M. Veljović. On diagnostic tests for circular regression models. European Young Statisticians Meeting, Ljubljana, Slovenia, 11-15 September 2023. (по позиву, презентујући аутор)
- K. Halaj, B. Milošević. On the characterization-based gof tests for geometric distribution. IMS International Conference on Statistics and Data Science (ICSDS), Florence, Italy, 13-16 December 2022. (презентујући аутор)
- K. Halaj, B. Milošević, M. Obradović, M.D. Jiménez-Gamero. New class of goodness-of-fit tests based on independence-type characterizations. Applied Statistics, Ribno, Slovenia, 20-22 September 2021. (презентујући аутор)
- B. Ivanović, K. Halaj, B. Milošević, D. Subotić, M. Veljović. The impact of missing data imputation procedures on the data topology. Applied Statistics, Ribno, Slovenia, 20-22 September 2021. (коаутор)
- D. Tomotić, K. Halaj, M. Paskota, F. Netjasov. Analiza uticajnih faktora nebezbednih događaja na aerodromima primenom metoda multivarijacione statističke analize. Symopis, Banja Koviljacha, Srbija, 20-23 septembar 2021. (коаутор)
- M. Prokić, K. Halaj, M. Paskota. Classifying countries for railway performance benchmarking: A hierarchical clustering approach. Railcon, Niš, Serbia, 15-16 October 2020. (коаутор)
- M. Prokić, K. Halaj, M. Paskota. Performance of railway system and its determinants: A principal component analysis approach. Symopis, Beograd, Serbia, 20-23. September 2020. (коаутор)

3 Предмет дисертације

Тема докторске дисертације је развој тестова сагласности базираних на карактеризацијама расподела на основу независности статистика, односно карактеризација које се могу приказати у следећем облику.

Претпоставимо да постоје мерљиве функције $\psi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $\psi_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, које карактеришу фамилију $\mathcal{F}$ класе расподела на следећи начин:

$$\psi_1(X_1, \dots, X_n) \text{ и } \psi_2(X_1, \dots, X_m) \text{ су независне} \iff F \in \mathcal{F},$$

где су $X_1, \dots, X_{\max(n,m)}$ независне и једнако расподеле случајне променљиве са функцијом расподеле F .

Оригинални резултати аутора односе се на конструкцију тестова за различите типове података чиме је илустрована свеобухватност приступа. Разматране су карактеризације за неколико апсолутно непрекидних расподела, за геометријску расподелу као пример дискретне, као и за обавијену нормалну расподелу као пример карактеризације за циркуларне расподеле. На основу њих су конструисани тестови коришћењем U -емпиријских функција расподеле као и различитих V -емпиријских интегралних трансформација. За све предложене тестове су изведене граничне расподеле под нултом хипотезом. Исте се у неким случајевима могу користити за апроксимацију расподела статистика у случају узорака коначног обима. Поред тога, изведене расподеле су важне јер представљају основу за оправдање коришћених бутстреп техника.

4 Приказ дисертације

Дисертација је написана на $viii + 141$ страни, а структура је следећа:

1	Introduction (Увод)	1
1.1	Convergence results for random elements in metric and Hilbert spaces (Резултати о конвергенцији случајних елемената у метричким и Хилбертовим просторима)	2
1.2	U - and V - statistics (U - и V -статистике)	7
1.3	U -processes (U -процеси)	22
1.4	Characterizations of probability distributions (Карактеризације рас- подела)	25
2	Goodness-of-fit tests for the geometric distribution based on Ferguson's characte- rization (Тестови сагласности са геометријском расподелом засновани на Фергусоновој карактеризацији)	28
2.1	Proposed test statistics (Предложене тест статистике)	28
2.2	Asymptotic properties (Асимптотска својства)	31
2.3	Bootstrap approximation of the null distribution (Бутстреп апрокси- мација расподеле под нултом хипотезом)	38
2.4	Power study (Емпиријска студија моћи)	43
3	A correlation-type goodness-of-fit test for absolutely continuous distributions (Тест сагласности корелационог типа за апсолутно непрекидне рас- поделе)	49
3.1	Large sample properties (Асимптотска својства)	52
3.2	Goodness-of-fit testing for selected distributions (Тестирање сагла- сности за одабране расподеле)	64
3.3	The list of alternative distributions (Листа алтернативних расподела)	72

4	A goodness-of-fit test for the wrapped normal distribution (Тест сагласности са обавијеном нормалном расподелом)	75
4.1	Construction of the novel test statistic (Конструкција нове тест статистике)	81
4.2	Asymptotic properties (Асимптотска својства)	82
4.3	Power study (Емпиријска студија моћи)	86
5	A new approach to goodness-of-fit testing based on linear combinations of degenerate V -statistics (Нови приступ тестирању сагласности заснован на линеарним комбинацијама дегенерисаних V -статистика)	96
5.1	Weight selection (Одабир тежина)	98
5.2	Applications to different testing problems (Примена на различите проблеме тестирања)	100
5.3	Combining test statistics of other types (Комбиновање тест статистика других типова)	113
6	Real data analysis (Анализа реалних података)	119
6.1	Applications to discrete data (Примена на дискретне типове података)	119
6.2	Applications to continuous data (Примена на непрекидне типове података)	121
6.3	Applications to circular data (Примена на циркуларне податке)	125
	Conclusion (Закључак)	130
	Bibliography (Литература) (106 библиографских јединица)	134

Прво поглавље је уводног карактера. У њему су дефинисани појмови и наведена тврђења неопходна за даље праћење дисертације. Поред тога, поглавље садржи и оригинални резултат аутора који се односи на граничну расподелу линеарне комбинације V статистика са оцењеним параметрима. Као специјални случај, наведени су резултати за линеарне комбинације које укључују V -статистике без оцењених параметара. Остатак дисертације садржи оригиналне резултате аутора.

У другом поглављу предложена су два теста сагласности са геометријском расподелом на основу Фергусонове карактеризације. Под нултом хипотезом изведене су граничне расподеле тест статистика, док је за практичну примену тестова предложено коришћење параметарског бутстрепа, које је и теоријски образложено.

Треће поглавље је посвећено развоју класе тестова сагласности са апсолутно неприкидним случајним величинама базираних на карактеризацијама на основу независности. Тест статистика је корелационог типа. За њу су, у општем случају, изведена гранична својства. Након тога су разматране перформансе теста у случају када се ради о карактеризацији гама, инверзне Гаусове за непознате параметре, као и стандардне Кошијеве расподеле.

Четврто поглавље садржи нови тест сагласности са обавијеном нормалном расподелом. Тест је заснован на модификацији карактеризације Рухина која је

показана у самој дисертацији. За нову тест статистику су изведена гранична својства док су његове перформансе демонстриране у опсежној симулацијоној студији.

Пето поглавље садржи приказ новог приступа комбиновању тест статистика. Наиме, предлаже се коришћење линеарне комбинације тест статистика, при чему су тежине обрнуто пропорционалне стандардним одступањима тест статистика под нултом хипотезом. Једна од важних предности овог приступа је што се може користити као алтернатива одабиру помоћних параметара који често фигуришу у тест статистикама, а зависе од података. За разлику од наведеног приступа, нови је значајно рачунски ефикаснији. У опсежној симулационој студији је показано и да су моћи тестова добијених новим приступом задовољавајуће. Шесто поглавље је илустративног карактера. Садржи различите скупове реалних података и њихову анализу уз примену неких од тестова предложених у дисертацији, као и познатих конкуренцких тестова.

Последње поглавље садржи преглед најважнијих закључака, као и праваца за даље истраживање, што потврђује актуелност разматране теме дисертације.

5 Закључак

Резултати приказани у дисертацији представљају значајан допринос развоју области тестирања статистичких хипотеза. У њој су предложени нови тестови за тестирање сагласности са расподелама различитог типа и за сваки су изведени одговарајући гранични резултати. Поред тога, дисертација садржи и резултат аутора који се односи на граничну расподелу дегенерисаних V -статистика са оцењеним параметрима, који се могу користити и у другим проблемима тестирања.

Катарина Халај Милеуснић је у тези показала одлично познавање области, способност да самостално истражује и изводи сложене математичке закључке, као и да на одговарајући начин прикаже резултате. Поред тога, Катарина је до сада, у вези са темом дисертације, објавила два коауторска рада и један самостални рад у часописима са SCI листе и имала запажена предавања на више научних конференција, од којих једном по позиву.

На основу свега тога и пошто су испуњени и сви формални услови, предлажемо да се рукопис "*Novel goodness-of-fit tests based on independence-type characterizations*" (Нови тестови сагласности засновани на карактеризацијама независности статистика) прихвати као докторска дисертација и да се формира комисија за јавну одбрану.

У Београду, 14. августа 2026.

др Марко Обрадовић, ванредни професор

др Марија Цупарић, доцент

др Марија Долорес Хименес Гамеро, редовни професор
Математичког факултета Универзитета у Севиљи

Firmado por JIMENEZ GAMERO MARIA DOLORES -
30514575S el día 12/08/2026 con un certificado emitido
por AC FNMT Usuarios

By the decision of the Teaching-Scientific Council of the Faculty of Mathematics, University of Belgrade, adopted at the meeting held on 3 July 2026, we were appointed as members of the Committee for the Evaluation of the doctoral dissertation "*Novel goodness-of-fit tests based on independence-type characterizations*" submitted by doctoral candidate Katarina Halaj Mileusnić. Having reviewed the manuscript submitted to the Committee by Katarina Halaj Mileusnić, we hereby submit the following

REPORT

1 Biography

Katarina Halaj Mileusnić was born on 17 November 1993 in Belgrade. She enrolled in undergraduate studies at the Faculty of Mathematics (Mathematics study programme, module Statistics, Actuarial and Financial Mathematics) in 2012 and graduated in 2016 with a grade point average of 9.21. She completed her master's studies in the same module in 2017 with a grade point average of 10.00, after defending her master's thesis, "Portfolio Optimization Based on Value at Risk", under the supervision of Prof. Dr. Bojana Milošević.

She enrolled in doctoral studies at the Faculty of Mathematics (Mathematics study programme) in 2017. Since 2017, she has been employed at the Faculty of Transport and Traffic Engineering, University of Belgrade, first as a teaching associate and, since 2018, as a teaching assistant. She is a member of the Department of General and Applied Mathematics. In the 2022/2023 academic year, she taught exercise classes at the Faculty of Pharmacy.

2 Scientific Work of the Candidate

Published scientific papers related to the dissertation topic

1. K. Halaj, B. Milošević, M. Obradović and M. D. Jiménez-Gamero. Correlation type goodness-of-fit tests based on independence characterization. *ASTA Advances in Statistical Analysis*, 108: 185-207, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10182-023-00475-x> [M22] IF2024=1.5 Statistics & Probability
2. K. Halaj and B. Milošević. On the application of Ferguson characterization for the construction of a goodness-of-fit test for the geometric distribution. *Statistical Methods & Applications*, 34: 545-560, 2025. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10260-025-00787-z> [M22] IF2024=1.1 Statistics & Probability
3. K. Halaj. A goodness-of-fit test for the wrapped normal distribution based on an independence characterization. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 2025.
DOI: <https://doi.org/10.1080/03610918.2025.2566830> [M22] IF2024=1.0 Statistics & Probability

Other scientific papers

1. N. Stepanović, V. Tubić, M. Milenković and K. Halaj. The impact of basic traffic flow characteristics on traffic accident occurrence on 2-lane rural roads in Serbia. *Transport*, 40(1): 64-73, 2023. DOI: <https://doi.org/10.3846/transport.2025.20543> [M22] IF2024=1.4 Transportation Science & Technology

Conference presentations published in abstract

- K. Halaj, B. Milošević, M. Veljović. Specification tests for error distribution in regression models with a directional response variable. 9th European Congress of Mathematics (9ECM), Seville, Spain, 15-19 July 2024. (presenting author)
- K. Halaj, B. Ebner, B. Milošević, M. Veljović. On diagnostic tests for circular regression models. European Young Statisticians Meeting, Ljubljana, Slovenia, 11-15 September 2023. (invited presentation, presenting author)
- K. Halaj, B. Milošević. On the characterization-based gof tests for geometric distribution. IMS International Conference on Statistics and Data Science (ICSDS), Florence, Italy, 13-16 December 2022. (presenting author)
- K. Halaj, B. Milošević, M. Obradović, M.D. Jiménez-Gamero. New class of goodness-of-fit tests based on independence-type characterizations. Applied Statistics, Ribno, Slovenia, 20-22 September 2021. (presenting author)
- B. Ivanović, K. Halaj, B. Milošević, D. Subotić, M. Veljović. The impact of missing data imputation procedures on the data topology. Applied Statistics, Ribno, Slovenia, 20-22 September 2021. (co-author)
- D. Tomotić, K. Halaj, M. Paskota, F. Netjasov. Analysis of factors influencing safety-related events at airports using methods of multivariate statistical analysis. Symopis, Banja Koviljača, Serbia, 20-23 September 2021. (co-author)
- M. Prokić, K. Halaj, M. Paskota. Classifying countries for railway performance benchmarking: A hierarchical clustering approach. Railcon, Niš, Serbia, 15-16 October 2020. (co-author)
- M. Prokić, K. Halaj, M. Paskota. Performance of railway system and its determinants: A principal component analysis approach. Symopis, Belgrade, Serbia, 20-23 September 2020. (co-author)

3 Subject of the Dissertation

The subject of the doctoral dissertation is the development of goodness-of-fit tests based on characterizations of probability distributions through the independence of statistics, i.e. characterizations that can be represented in the following form.

Assume that there exist measurable functions $\psi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ and $\psi_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, which characterize a family $\mathcal{F}$ of probability distributions as follows:

$$\psi_1(X_1, \dots, X_n) \text{ and } \psi_2(X_1, \dots, X_m) \text{ are independent} \iff F \in \mathcal{F},$$

where $X_1, \dots, X_{\max(n,m)}$ are independent and identically distributed random variables with distribution function F .

The author's original results concern the construction of tests for different types of data, thereby illustrating the broad applicability of the proposed approach. Characterizations are considered for several absolutely continuous distributions, for the geometric distribution as an example of a discrete distribution, and for the wrapped normal distribution as an example of a characterization for circular distributions. Based on these characterizations, tests are constructed using U -empirical distribution functions and various V -empirical integral transforms. For all proposed tests, limiting distributions under the null hypothesis are derived. In some cases, these limiting distributions can be used to approximate the distributions of the statistics for finite sample sizes. Moreover, the derived distributions are important because they provide a basis for justifying the bootstrap techniques employed.

4 Overview of the Dissertation

The dissertation consists of $viii + 141$ pages and has the following structure:

1	Introduction	1
1.1	Convergence results for random elements in metric and Hilbert spaces	2
1.2	U - and V - statistics	7
1.3	U -processes	22
1.4	Characterizations of probability distributions	25
2	Goodness-of-fit tests for the geometric distribution based on Ferguson's characterization	28
2.1	Proposed test statistics	28
2.2	Asymptotic properties	31
2.3	Bootstrap approximation of the null distribution	38
2.4	Power study	43
3	A correlation-type goodness-of-fit test for absolutely continuous distributions	49
3.1	Large sample properties	52
3.2	Goodness-of-fit testing for selected distributions	64
3.3	The list of alternative distributions	72
4	A goodness-of-fit test for the wrapped normal distribution	75
4.1	Construction of the novel test statistic	81
4.2	Asymptotic properties	82
4.3	Power study	86
5	A new approach to goodness-of-fit testing based on linear combinations of degenerate V-statistics	96
5.1	Weight selection	98
5.2	Applications to different testing problems	100
5.3	Combining test statistics of other types	113

6	Real data analysis	119
6.1	Applications to discrete data	119
6.2	Applications to continuous data	121
6.3	Applications to circular data	125
	Conclusion	130
	Bibliography (106 bibliographic entries)	134

The first chapter is introductory in nature. It defines the concepts and states the results necessary for following the remainder of the dissertation. In addition, the chapter contains an original result of the author concerning the limiting distribution of a linear combination of V -statistics with estimated parameters. As a special case, results are presented for linear combinations involving V -statistics without estimated parameters. The remainder of the dissertation contains the author's original results.

In the second chapter, two goodness-of-fit tests for the geometric distribution are proposed on the basis of Ferguson's characterization. Under the null hypothesis, the limiting distributions of the test statistics are derived, while for the practical implementation of the tests, the use of a parametric bootstrap is proposed and theoretically justified.

The third chapter is devoted to the development of a class of goodness-of-fit test for absolutely continuous random variables based on independence characterizations. The test statistic is of a correlation type. Its limiting properties are derived in a general setting. The performance of the test is then investigated for characterizations of the gamma distribution, the inverse Gaussian distribution with unknown parameters, and the standard Cauchy distribution.

The fourth chapter presents a new goodness-of-fit test for the wrapped normal distribution. The test is based on a modification of Rukhin's characterization established in the dissertation itself. Limiting properties are derived for the new test statistic, while its performance is demonstrated in an extensive simulation study.

The fifth chapter presents a new approach to combining test statistics. Specifically, it proposes using a linear combination of test statistics with weights inversely proportional to the standard deviations of the test statistics under the null hypothesis. One important advantage of this approach is that it can be used as an alternative to selecting auxiliary parameters that often appear in test statistics and depend on the data. Compared with such parameter-selection procedures, the new approach is substantially more computationally efficient. An extensive simulation study also shows that the powers of the tests obtained using the new approach are satisfactory.

The sixth chapter is illustrative in nature. It contains various real data sets and their analyses using some of the tests proposed in the dissertation, as well as well-known competing tests.

The final chapter provides an overview of the most important conclusions and directions for further research, confirming the current relevance of the dissertation topic.

5 Conclusion

The results presented in the dissertation make a significant contribution to the development of the field of statistical hypothesis testing. New goodness-of-fit tests for distributions of different types are proposed, and appropriate limiting results are derived for each of them. In addition, the dissertation contains an original result of the author concerning the limiting distribution of degenerate V -statistics with estimated parameters, which can also be used in other testing problems.

In the dissertation, Katarina Halaj Mileusnić has demonstrated excellent knowledge of the field, the ability to conduct independent research and derive complex mathematical conclusions, as well as the ability to present results appropriately. In addition, Katarina has so far published, in connection with the dissertation topic, two co-authored papers and one single-authored paper in SCI-indexed journals, and has delivered notable presentations at several scientific conferences, including one invited talk.

Taking all of the above into the account, and given that all formal requirements have also been fulfilled, we propose the manuscript "*Novel goodness-of-fit tests based on independence-type characterizations*" to be accepted as a doctoral dissertation, and to appoint a committee for its public defense.

Belgrade, 14 August 2026.

Dr. Marko Obradović, Associate Professor

Dr. Marija Cuparić, Assistant Professor

Dr. María Dolores Jiménez-Gamero, Full Professor
Faculty of Mathematics, University of Seville

Firmado por JIMENEZ GAMERO MARIA
DOLORES - 30514575S el día 12/08/2026
con un certificado emitido por AC FNMT
Usuarios